Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101694**

ID профиля: **804597**

Вариант 18

Чистовик [redacted]

Вариант 38

1

№1

Пусть разность этой прогрессии $d>0$, т.к. все члены прогрессии целые $\Rightarrow$ d-тоже целая $\Rightarrow$ $d\in\mathbb{N}$.
($d>0$, т.к. прогрессия возрастающая)

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_7(a_7+5d) > S+20 \quad (1) \\ (a_7+2d)(a_7+3d) < S+44 \quad (2) \end{cases}$$

$$S = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{a_7-6d+a_7}{2}\cdot 7 = 7(a_7-3d) = 7a_7-21d$$

$$\begin{cases} a_7^2+5da_7 > S+20 \\ a_7^2+5da_7+6d^2 < S+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7^2+5da_7 > S+20 \\ S+44-6d^2 > a_7^2+5da_7 \end{cases} \Rightarrow S+44-6d^2 > S+20$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} d<2 \\ d>-2 \end{cases} \cap \; d>0 \right\} \Rightarrow \underline{\underline{d=1}}$$

Подставляем в (1) и (2): $S=7a_7-21$

$$\begin{cases} a_7^2+5a_7 > 7a_7-21+20 \\ a_7^2+5a_7+6 < 7a_7-21+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7^2-2a_7+1>0 \\ a_7^2-2a_7-17<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a_7^2-2a_7-17<0$

$D = 4+4\cdot 17 = 4\cdot 18 = 36\cdot 2$

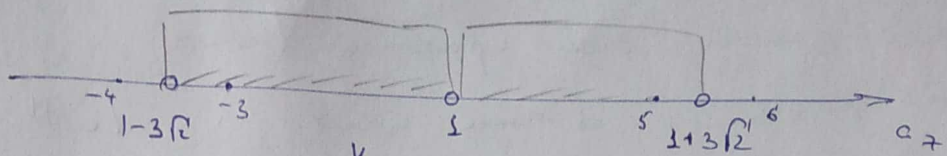
корни: $a_{7_{1,2}} = \frac{2\pm 6\sqrt{2}}{2} = 1\pm 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} (a_7-1)^2>0 \\ (a_7-(1+3\sqrt{2}))(a_7-(1-3\sqrt{2}))<0 \end{cases}$$

$a_7\in\mathbb{Z}$

Метод интервалов: Чистовик

2



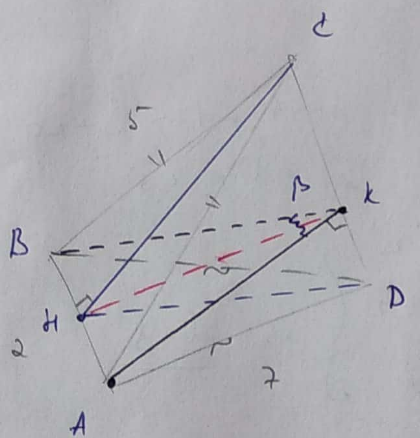
~~$a_7 \in$~~ ~~$a_7 \in$~~ $a_7 \in \{-3; -2; -1; 0; 2; 3, 4; 5\}$

$a_1 = a_7 - 6d = a_7 - 6$

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}}$

№2



т.к. $AC = CB = 5$ и $AD = BD = 7$, то $\triangle BCA$ – р/б и $\triangle ADB$ – р/б

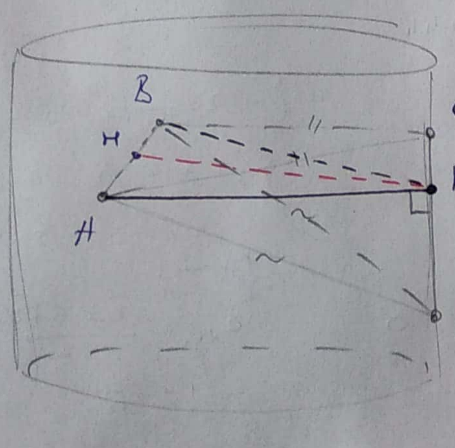
Опустим высоты к основаниям, т.к. они же медианы, то ~~поэтому~~ обе высоты попадают в 1 точку, обозначим её H.

$\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам

Опустим высоты AK и BK к стороне CD. $BK = AK$, как соотв. элементы в равных $\triangle$-ах.

По Th. Пиф-а: $CH = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$

$HD = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$



т.к. $CH \perp AB$ и $HD \perp AB$, то $(CHD) \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$ $(CD \in (CHD))$

$AB \perp$ оси цилиндра

|Чистовик|

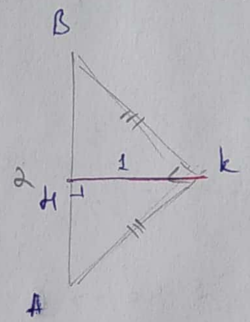
Т.к $BK \perp CD$ и $AK \perp CD$ => $(ABK) \perp CD$ => $(ABK) \perp$ оси цилиндра => $\triangle ABK$ ~~вписан~~ лежит в поперечном сечении цилиндра ~~=>~~ и вписан в окружность => радиус описанной окружности $\triangle ABK$ и есть радиус цилиндра

Пусть $\angle BKA = \beta$ => По Th. синусов:

$$2R = \frac{AB}{\sin\beta} \Rightarrow R = \frac{1}{\sin\beta}$$

, т.к. R — min, то $\sin\beta$ — max => $\beta = 90^\circ$ => В пл-сти (ABK):

$HK = 1$ $\quad BK = AK = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2}$



~~В пл-сти~~

По Th. Пиф-а для $\triangle AKD$:

~~R $AK = \sqrt{1+1}$~~ $KD = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

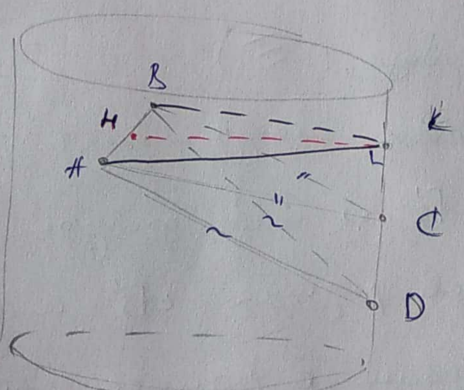
По Th. Пиф-а для $\triangle ACK$:

$CK = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$CD = KD + CK = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

~~Ответ: $\sqrt{47}+\sqrt{23}$~~

~~Проверим, что~~ Это мы рассмотрели случай, если т. $K \in CD$, если же нет, то:



β всё ещё 90° и

$AK = BK = \sqrt{2}$, но:

$KC = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$KD = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$CD = KD - KC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$; $CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Чистовик №3. 4

Пусть $(a; b)$ — подходит, т.е. выполняется 2 нер-ва ⇒ 1 задаёт круг с центром в т. $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$$

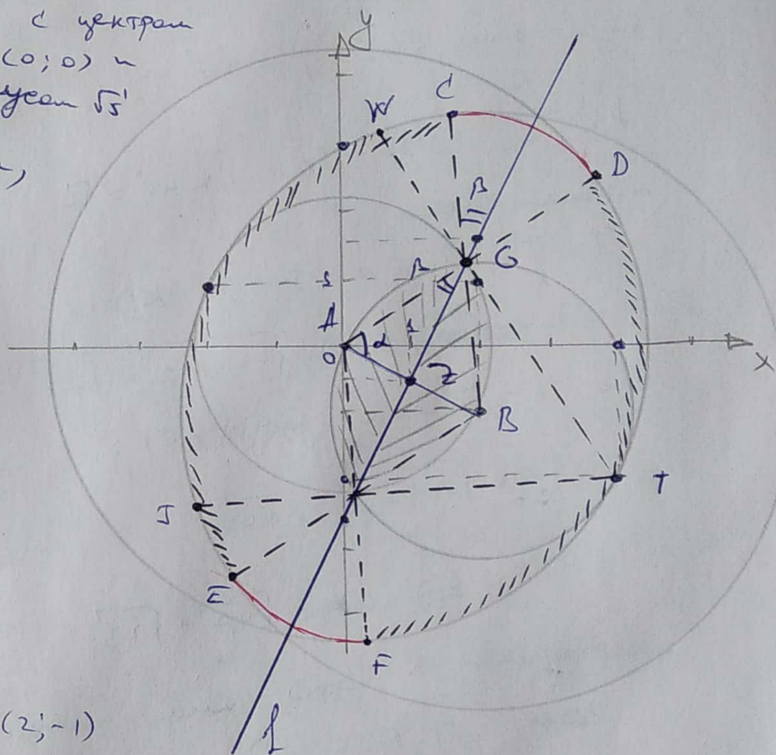
Если $4a-2b>5$, т.е. $b<2a-2{,}5$, то:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ b<2a-2{,}5 \end{cases}$$

$a^2+b^2\le5$ → круг с центром в т. $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{5}$

↓

сегмент круга (см. рисунок, обозн.: ///)



Если $4a-2b\le5$, т.е. $b\ge 2a-2{,}5$, то:

$$a^2+b^2\le 4a-2b$$

⇕

$$\begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2\le 5 \\ b\ge 2a-2{,}5 \end{cases}$$

круг с центром в т. $(2;-1)$ и радиусом $\sqrt{5}$

→ сегмент круга (см. рисунок, обозн.: ///)

Мы знаем области, в которых ~~могут~~ может располагаться центр ~~окр~~ круга с радиусом $\sqrt{5}$ ⇒ Сама фигура M состоит из 2-ух секторов ~~о~~ кругов радиуса $2\sqrt{5}$ и ещё областей ограниченных красными дугами, с радиусом кривизны $\sqrt{5}$. Сектора ограничены отрезками BC, BE и ~~OD~~ AD, AF

(отрезки TW и TJ — лишние, случайно нарисовали)

Чистовик

5

$OZ = \sqrt{1+0{,}5^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $OZ \perp l$ (т.к. их коэффициенты $\frac{1}{2}$ и 2 явл. обратными)

ZG: найдём т. G:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+y^2=4x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &2y=4x-5 \\ &4x^2+(2y)^2=5 \end{aligned}$$

$$4x^2+16x^2-40x+25=20$$

$$20x^2-40x+5=0$$

$$x=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{8}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_G=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_G=\sqrt{3}-0{,}5$$

$$ZG=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2=\frac{15}{4}$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{15/4}{\sqrt{5}/2}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$S_{\text{сектора}}=\frac{\pi R^2}{2\pi}2\alpha=20\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{15}{4}=\frac{15\sqrt{5}}{16}$$

$$\beta=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}/2}{15/4}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$$

$$S_{\text{сектора } CD}=\frac{\pi r^2}{2\pi}\cdot2\beta=5\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$$

$$S=2S_{\text{сектора}}-4S_\Delta+2S_{\text{сектора } CD}=$$

$$=40\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{15\sqrt{5}}{4}+10\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 40\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{15\sqrt{5}}{4}+10\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)}$$

Черновик

$r = 2\sqrt{5} \Rightarrow r^2 = 20$

2α

$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot 2\alpha = \alpha r^2 = 20 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

$2 S_{\text{сектора}} - 2 S_{\Delta} = 40 \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{15\sqrt{5}}{8}$

~~$2(50 - \alpha) = 2(50 - 2(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\alpha)) =$~~

$2\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}/2}{15/4} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot 2\beta = \beta r^2 = 5 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

$2 S_{\text{сектора}} = 10 \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

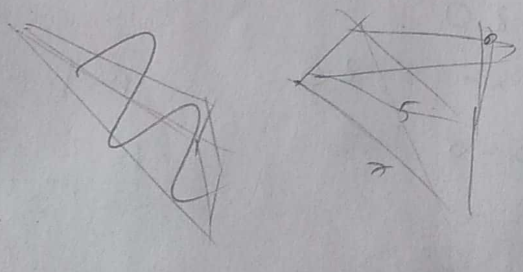
$S = \boxed{40 \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{15\sqrt{5}}{8} + 10 \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)}$

$3 \cdot 1{,}4 = 4{,}2$

~~$1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2}$~~

$1 - 4{,}2 = -3{,}2$

$1 + 4{,}2 = 5{,}2$



Черновик

$a^2 + b^2 \le 4a - 2b$

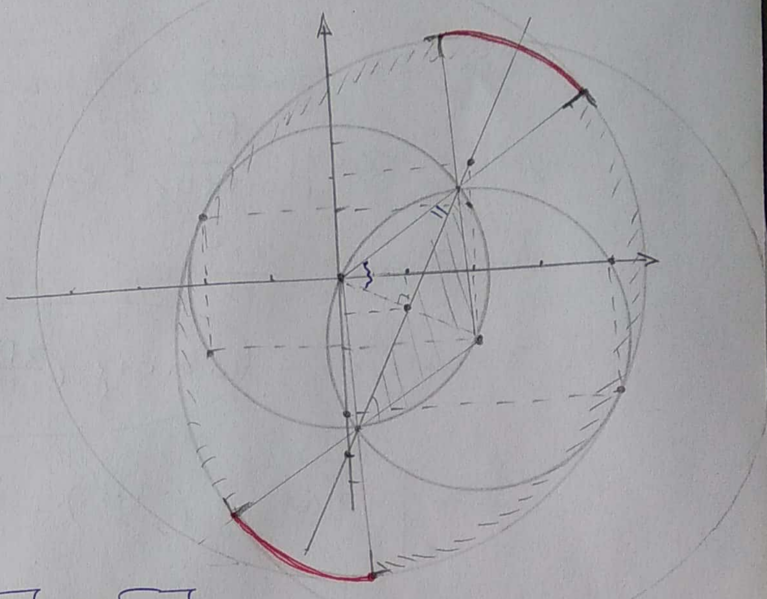
$a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 - 5 \le 0$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5$

$(2; -1)$

$(2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$

$16 + 4$



$x^2 + y^2 = 5$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5 - x^2} \\ x^2 + y^2 = 4x - 2y \end{cases}$

$5 = 4x - 2y$

$2 ; -0,5$

$\sqrt{1^2 + 0,25} = \sqrt{1,25} = 0,1\sqrt{125} = 0,5\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$2y = 4x - 5 \qquad y = 2x - 2,5$

$4x^2 + 4y^2 = 5$

$4x^2 + (4x - 5)^2 = 20$

$4x^2 + 16x^2 - 40x + 25 = 20$

$20x^2 - 40x + 5 = 0 \quad | : 5$

~~$x^2 - 2x + 1 = 0$~~

~~$(x-1)^2 = 0 \quad x = 1$~~

$4x^2 - 8x + 1 = 0$

$D = 64 - 16 = 16 \cdot 3 \Rightarrow$

$x = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = arctg\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{15\sqrt{5}}{16}$

$\beta \quad \alpha \quad \frac{15}{4} \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{15/4}{\sqrt{5}/4} = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{\sqrt{5}}{4}$

~~$y = 2x - \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2} = 1,5 + \sqrt{3}$~~

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = 2 + \sqrt{3} - 2,5 = \sqrt{3} - 0,5$

$(1; -0,5) \quad \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$

$\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \qquad 1,7 - 0,5 = 1,2$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 = \frac{3}{4} + 3 = 3,75 = \frac{15}{4}$

$64 - 16 = 16(4-1) = 16 \cdot 3$

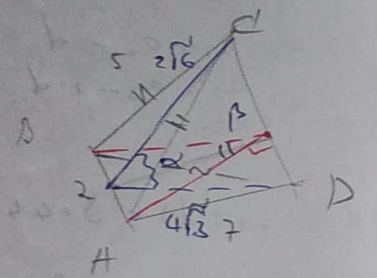
$11 + 3 = 15$

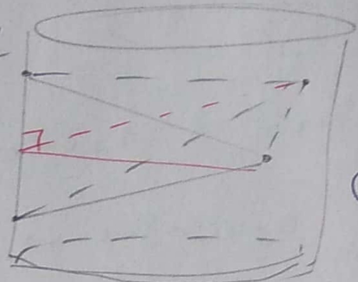
$\sqrt{3} = 1,7$

$0,85$

$0,15$

Черковик





$(49-2)(25+2)=$

$=49\cdot 25 - \dots$

$60+40=$
80

$25-1=24 \quad \sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$49-1=48 \quad \sqrt{48}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

AD

$(\sqrt{47}+\sqrt{23})^2+2=$

$=47+2\sqrt{47\cdot 23}+23+2=$

$=82+2\sqrt{47\cdot 23}$

$R=\dfrac{2}{2\sin\beta}=\dfrac{1}{\sin\beta}=1$ R - мин при $\sin\beta$ - макс

$\Downarrow$

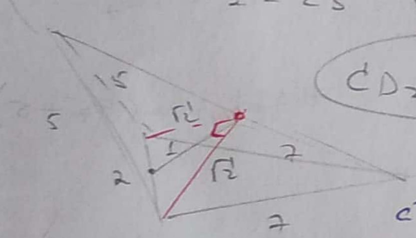
$\beta=90^\circ$ $\sin\beta=1 \Rightarrow$

$\beta=90^\circ$

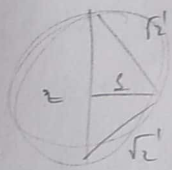
$48-1=47 \quad \sqrt{47}$

$24-1=23 \quad \sqrt{23}$

$\sqrt{2^2}=2$.

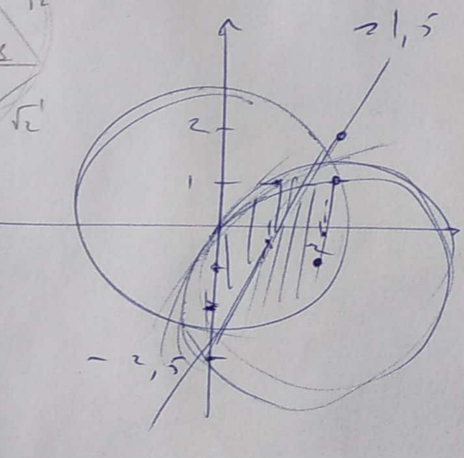


$CD=\sqrt{47}+\sqrt{23}$



c^2+b^2

$4,=2,5=$
$=1,5$



Ответ: $\sqrt{47}+\sqrt{23}$

$b\geq 2a-2,5$

$4a-2b\leq 5$

$2b\geq 4a-5$

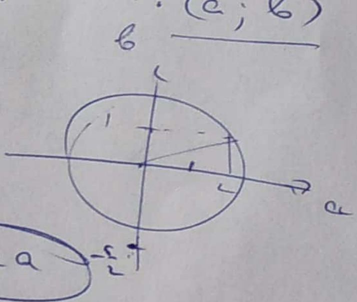
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 5 \\ a^2+b^2\leq \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

круг с радиусом $\sqrt{5}$ и центром в т. $(a;b)$

Заметим, что $a^2+b^2\geq 0 \Rightarrow$

$4a-2b\geq 0$

$4a\geq 2b$ $\Rightarrow b\leq 2a$



Если ~~4a~~ ~~4a-2b~~
$4a-2b>5$, то:

$a^2+b^2\leq 5 \Rightarrow$ ~~0~~ круг с радиусом $\sqrt{5}$

~~4a-2b~~ $2b<4a-5$ $\quad b<2a-\frac{5}{2}$

Сканировано с CamScanner

Черновик

№1.

$S = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7$

d

$12-7=5$

$a_1 = a_2 - d$

$a_1 = a_3 - 2d$

$a_7 a_{12} > S+20$ $\quad a_7(a_7+5d) > S+20$

$a_9 a_{10} < S+44 \Rightarrow (a_7+2d)(a_7+3d) < S+44$

$a_7^2 + 5a_7 d > S+20$ $\quad a_7^2+5a_7d+6d^2 < S+44$

$S+20 < a_7^2+5a_7d < S+44-6d^2$

$\cancel{S}+20 < \cancel{S}+44-6d^2$

$6d^2 < 24$ $\quad d^2 < 4$

$d < 2$ $\quad d > -2$

$d = 1$

~~$S+44 < -(a_7^2+5a_7)$~~

-38

$6 - S - 44 \leq -(a_7^2+5a_7)$

$a_7^2+5a_7 > S+20$ $\quad S+20 < a_7^2+5a_7$

$2S+20+4+38 < 2a_7(a_7+5)$

$2S+58 < 2a_7(a_7+5)$

$S = \frac{a_7-6d+a_7}{2} \cdot 7 = (a_7-3d)\cdot 7 = (a_7-3)\cdot 7 = 7a_7-21$

$S+29 < a_7(a_7+5)$

$7a_7-21+29 < a_7^2+5a_7$

$a_7^2-2a_7-8>0$

$(a_7-4)(a_7+2)>0$

$3:1,4=$
$=4,\dots$

$1-4,\dots = -(4,\dots-1) = -3,\dots$

$S+4,\dots = 5$

$-3;-2;-1;0;1;2;$

$3;4;5$

-6

$-9;-8;\dots;-1.$

$+\quad -\quad +$

$-2 \quad 4 \quad a_7$

$44-27=17$

$6-23=-17$

-1

$a_7^2+5a_7 > 7a_7-21+20$

$-3,\dots \quad 5 \quad 5,\dots \quad a_7$

23

$a_7^2-2a_7+1>0$

$(a_7-1)^2>0$

$+ \quad +$

1

$a_7^2+5a_7+6 < 7a_7-21+44$

$a_7^2-2a_7-17<0$

$D = 4+4\cdot 17 = 4\cdot 18 = 4\cdot 2\cdot 9 = 36\cdot 2$

$a_7 = \frac{2\pm 6\sqrt{2}}{2} = 1\pm 3\sqrt{2}$

Сканировано с CamScanner

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101694**

ID профиля: **804597**

Вариант 18

Чистовик

Вариант 18

~~Д~~ №4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=15 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Пусть $p=\frac{a}{15}$; $q=\frac{b}{15}$; $r=\frac{c}{15}$

$\Leftarrow$ по св-ву НОД-а и НОК-а

$$\begin{cases} \text{НОД}(p,q,r)=1 \\ \text{НОК}(p,q,r)=3^{14}\cdot 5^{17} \end{cases}$$

Т.к. по определению $\text{НОК}(p;q,r) \vdots p,q,r$, то ~~в чи~~ в числах не может быть других делителей, кроме как 3 и 5 и в степени не больше 14 и 17 соотв.

Пусть:

$p=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$

$q=3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$ $\quad \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \gamma_{1,2}\in N\cup\{0\}$

$r=3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$

~~*~~ * α,β,γ без индексов означает, что это верно для ~~любых~~ ~~α,β,γ~~ любых ~~тр~~ троек α,β,γ с одинаковыми индексами: (x — степень входящего делителя: для $3\to 14$, для $5\to 17$)

$$\begin{cases} \min(\alpha,\beta,\gamma)=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=x \end{cases}$$

$\to$ (т.к. иначе $\text{НОД}(p,q,r)\neq 1$)

$\Rightarrow$ ~~$x\cdot x\cdot 1$~~

~~$(x+1)(x+1)-1$~~

Считаем кол-во троек: Если $\alpha=0$, то: $(x+1)(x+1)$

Если $\beta=0$, то $\alpha\neq 0$ $\Rightarrow$ (уже учли), то: $x(x+1)$

Если $\gamma=0$, то $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$ (уже учли), то: $x\cdot x$

~~Всего: $(x+1)(x+1)+x(x+1)+x^2=(x+1)(x+2)+x^2=$~~

~~$=(x+1)(2x+1)+(x+1)x-x=(x+1)(3x+1)-x=(x+1)(3x+1)-$~~

~~$-(x+1)+1=(x+1)(3x$~~ $3x(x+1)+1$

Всего: $(x+1)^2+x(x+1)+x^2=x^2+2x+1+x^2+x+x^2=$

$=3x^2+3x+1=3x(x+1)+1$

Для $x=14$: ~~$3\cdot 14$~~ $3\cdot 14\cdot 15+1=$

Для $x=17$: $3\cdot 17\cdot 18+1$

Сканировано с CamScanner

Чистовик!

Нам подходит любая комбинация шестерок для

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

2

$$\Downarrow$$

$$(3\cdot 14\cdot 15+1)(3\cdot 17\cdot 18+1) = 3\cdot 14\cdot 15\cdot 17\cdot 18 + 3\cdot 14\cdot 15 + 3\cdot 17\cdot 18 +$$

$$+1 = 3(16-2)(16+2)(16-1)(16+1) + 3(210+306)+1 =$$

$$= 3(256-4)(256-1) + 3\cdot 516 + 1 =$$

$$= 3(2^{16} - 5\cdot 256 + 4 + 516) + 1 =$$

$$= 3(65536 - 1280 + 520) + 1 =$$

$$= 3(65536 - 760) + 1 = 3\cdot 64776 + 1 =$$

$$= 194329$$

Ответ: $(3\cdot 14\cdot 15+1)(3\cdot 17\cdot 18+1) = 194329$

Черновик

№4.

$x = \text{НОД}(a;b;c) = 15$

$y = \text{НОК}(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$\frac{y}{x}$ 500: $a \geq b \geq c$

$\frac{y}{a}$

~~$a = 15 \cdot 3^{i_a} \cdot 5^{k_a}$~~

$a = 15 \cdot 3^{j_a} \cdot 5^{k_a}$

$b = 15 \cdot 3^{j_b} \cdot 5^{k_b}$

$c = 15 \cdot 3^{j_c} \cdot 5^{k_c}$

j_a

$$\frac{1}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

№5.

$\log = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) =$

$= 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ ↗?

$\log_{6x-14}(x-1)^2 \neq 0$

~~но~~ Заметим, что

. . . . , при.

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \neq 0$

$\frac{x}{3}+3>0 \Rightarrow$ ~~$x>9$~~ $x>-9$

$6x-14 \geq 0$

$6x>14$

$\frac{x}{3}+3 \neq 1 \Rightarrow \frac{x}{3} \neq -2 \Rightarrow$ ~~$x \neq -6$~~

$x > \frac{7}{3}$ $= 2\frac{1}{3}$

$x-1>0 \Rightarrow$ ~~$x>1$~~

$6x-14 \neq 1$

$x-1 \neq 1 \Rightarrow$ ~~$x \neq 2$~~

$6x \neq 15$

$x \neq \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

$x > 2\frac{1}{3}$ $x \neq 2{,}5$

$\frac{\log_b b}{\log_b a} = \log_b c$

$\log_a b = \log_b c$

$\frac{1}{1/2}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_a b$

$\frac{x}{3}+3 > \frac{7}{9}+3 =$

$= 3\frac{7}{9} > 1$

$2\log_b c$ $\log_c a$

log

$x-1 > 1\frac{1}{3} > 1$.

$6x-14$

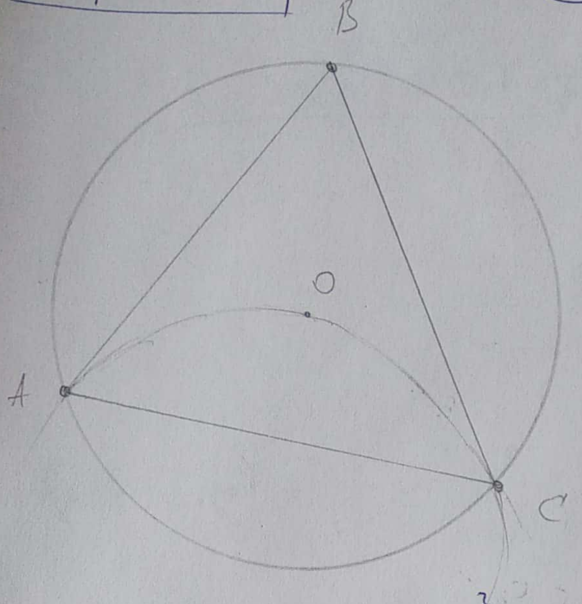
$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$

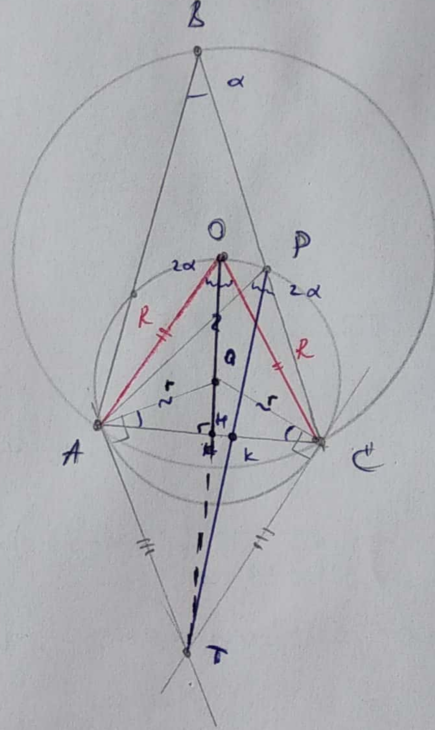
~~$2\log_a b = 2\log$~~ $2\log_a b = \log_b c$

$\frac{1}{\log_b a} = \log_b c \Rightarrow \log_b c \cdot \log_b a = 1$

Черновик

№6





$AK=\sqrt{R^2-\left(\frac{3}{2}r\right)^2}=\sqrt{R^2-\frac{5r^2}{4}}$

$\cancel{AC}=2r=\frac{AC}{\sin 2\alpha}$

$\Downarrow$

$AC=2r\sin 2\alpha$

$\frac{AC}{\sin\alpha}=2R \Rightarrow AC=2R\sin\alpha$

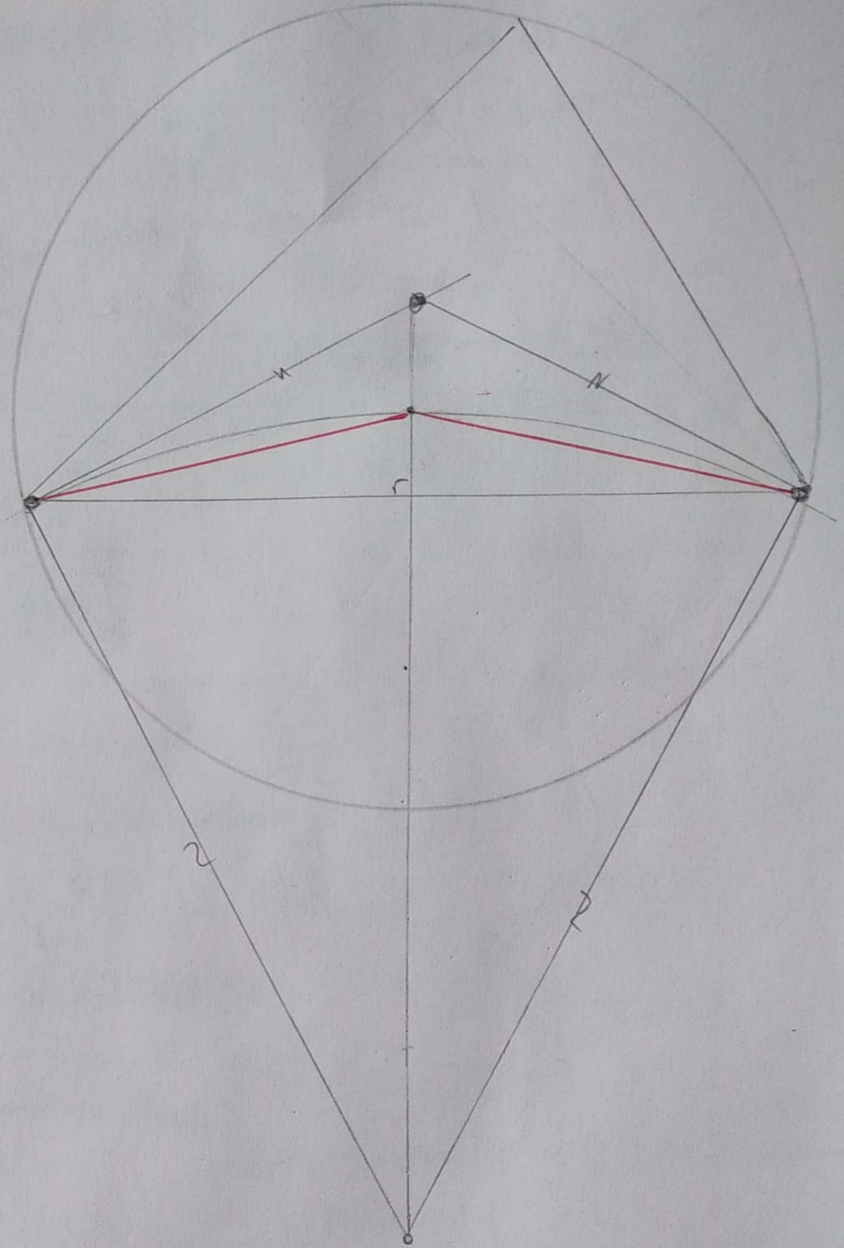
$\cancel{2}r\sin 2\alpha=\cancel{2}R\sin\alpha$

$2r\,\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha=R\,\cancel{\sin\alpha}$

$R=2r\cos\alpha$

$S_{APK}=\frac{1}{2}AP\cdot AK\cdot\sin\theta=6 \quad S_{PKC}=\frac{1}{2}PC\cdot CK.$

Черкевич



$x = \text{НОД}(a;b;c) = 15$

$y = \text{НОК}(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

Черновик

$\vdots 15$

$p \quad q \quad r \Rightarrow \text{НОД}(p;q;r) = 1$

$\text{НОК}(p;q;r) = 3^{14} \cdot 5^{17}$

$9 \cdot 5 = 45$

$25 \cdot 3 = 75$

$75 \cdot 3 = 225$

$45 \quad 75$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3 \quad 5$

$\text{НОК} = 5^2 \cdot 3^2 = 225$

$\text{НОК}\ 3;5 = 15$

$p = 5^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$

$q = 1 \quad r = 1$

$p = 5^{\alpha} \quad q = 3^{\beta} \quad r = 1$

$\alpha = 17 \quad \beta = 14$

3

$P_3 = 6$

$6 \cdot 3 = 9$

$a = 15 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

$b = 15 \cdot \ldots$

$c = 15 \cdot \ldots$

$15 \cdot 3^{14} \cdot 5^{\beta}$

$15 \cdot 3^{\gamma} \cdot 5^{17}$

$15 \cdot 1 \cdot 5^{\gamma}$

$15 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}_{\delta = 1 \ldots 17}$ 12

$15 \cdot 3^{\gamma} \cdot 5^{0}$ $= 0$

$15 \cdot 1 \cdot 5$

$0, \ldots 17$

$15 \cdot 18 + 15 \cdot 17$

$1, \ldots 17$

$15 \cdot 1$ $\quad 15 \cdot 1 \cdot 5^{\delta = 0}$

$15. \quad 15 \cdot 3^{\gamma} \cdot 5^{\gamma = 0}$ ~~1…17~~

$\beta = 0$

$14 \cdot 18 + 14 \cdot 17$

~~Шестовик~~

Черновик

~~Вариант 18~~

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 15 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Т.к. по определению $НОК(a;b;c)$ делится на a, b и c, то числа ~~ав~~ a, b и c ~~никак~~ не могут содержать других делителей, ~~что~~ кроме как делителей числа $3^{15}\cdot 5^{18}$ и в степенях не больших чем у этого числа.

Также есть хотя бы одно число $\neq 15$ ~~т.к.~~ (т.к. $НОД(a;b;c)=15$, то $a \geq 15$ $b \geq 15$ и $c \geq 15$), ~~иначе НОК = бы 15. Будем БОО будем считать, что такое число a~~ иначе НОК = бы 15, а это не так.

~~Пусть числа имеют вид: $a = 15\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$, $b = 15\psi$ $c = 15\varphi$, где $\alpha, \beta, \psi, \varphi \in N\cup\{0\}$~~

~~Пусть $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, тогда ψ и $\varphi = 0$, т.к.~~ ~~иначе~~

Представим число в виде:

~~Пусть числа имеют вид~~: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in N \cup \{0\}$

$a = 15\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$

$b = 15\cdot 3^{\gamma}\cdot 5^{\delta}$

$c = 15\cdot 3^{\varepsilon}\cdot 5^{\zeta}$

~~Пусть $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, тогда~~

Предположим, что $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$, но тогда числа a, b и c делятся на $15\cdot 3 = 45$ $\Rightarrow$ их $НОД \geq 45$, противоречие $\Rightarrow$ среди них есть хотя бы одно нулевое.

Аналогично среди чисел β, δ, ζ есть хотя бы 1 нулевое $\Leftarrow$

~~БОО: α Заметим, что $НОК(a;b;c) = 15\cdot 3^{\max(\alpha,\gamma,\varepsilon)}\cdot 5^{\max(\beta,\delta,\zeta)}$~~.

$\Rightarrow$ ~~БОО~~ будем считать, что:

~~$\alpha \geq \gamma \geq \varepsilon = 0$ $\beta \geq \delta \geq \zeta = 0$~~

~~$НОК(a;b;c) = 15\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$~~

~~$\alpha \geq \gamma \geq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0$~~

~~$НОК(a;b;c) = 15\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\max(\beta,\delta,\zeta)}$~~

~~$\Rightarrow \alpha = 14$, т.к. одна 3 в 15~~

~~Для Б. Э~~ Рассмотрим ~~делитель p (от 3 или 5)~~
и пусть ~~его степень в НОК~~ = x (15 или 18)
~~Тогда предыд получаем, что с учётом предыдущих пунктов.~~
~~НОД~~

Черновик

Сканировано с CamScanner

$\max(\beta, \delta, \zeta) = 17$ Черновик

1) Если $\beta > \delta$ и $\beta > \zeta$, то $\beta = 17$ =>

=> ~~$\zeta = 0$~~ ~~1.1.) $\delta = \zeta = 0$ Если $\delta = 0$ => $\zeta = 0$, т.к. иначе возник бы доп общий делитель кроме 15~~

~~Получаем, что $\gamma = 0$ ... $\gamma = 0$ $\gamma \le 14$~~

~~среди чисел $\gamma \le$~~

=> γ – любое число от 0 до 14, а среди чисел δ и ζ одно 0, а другое $\in [0; 17]$

троек: ~~$14 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 2$~~ $15 \cdot 18 + 15 \cdot 17$ и ~~ещё~~ если $b \leftrightarrow c$ (т.к. $\delta = \zeta = 0$ мы уже учли) ~~(если $\delta = \zeta = 0$ учесть дважды)~~

то ещё: ~~$15 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 2$~~ ~~(т.к. $b = c$ мы уже учли)~~

$14 \cdot 18 + 14 \cdot 17$ ($\gamma = 0$ уже мы учли)

Итого: $29 \cdot 18 + 29 \cdot 17 = 29 \cdot 35$

2) ~~Если~~ Если δ или ζ — ~~наи~~ наибольшее =>

=> БОО: δ – наибольшее => $\delta = 17$ =>

γ – любое число от 0 до 14, а среди β и ζ одно 0, а другое $\in [0; 17]$ => троек:

$a = 15 \cdot 3^{14} \cdot 5^{\beta}$

$b = 15 \cdot 3^{\gamma} \cdot 5^{17}$

$c = 15 \cdot 1 \cdot 5^{\zeta}$

~~$15 \cdot 18 \cdot 2$~~ $15 \cdot 18 + 15 \cdot 17$ (т.к. $\beta = \zeta$ уже учли)

и если $b \leftrightarrow c$, то: $14 \cdot 18 + 14 \cdot 17$ (т.к $\gamma = 0$ уже учли)

Итого: $29 \cdot 18 + 29 \cdot 17 = 29 \cdot 35$ (+) 1 пункт =>

=> $29 \cdot 35 \cdot 2$

Сканировано с CamScanner

Черновик

НОД$(p, q, r) = 1$

НОК$(p, q, r) = 3^{14} \cdot 5^{17}$

НОД$(3^{\alpha}; 3^{\beta}; 3^{\gamma}) = 1$

$\Downarrow$

= любые одно 0 =>

НОД$(5^{\alpha}; 5^{\beta}; 5^{\gamma}) = 1$

= любые одно 0 =>

Всего: $15^2 \cdot 3 \cdot 17^2 \cdot 3$

$17 \cdot 51 + 1$

15	14
0 ·	x
14 x	0	x 14
0	0	0
1	0	0
⋮	...	

~~14~~ ~~15+15·3 = 225 15·3·3~~

$15 \cdot 15 + 15 \cdot 14 + 14 \cdot 14 =$

$= 15 \cdot 29 + 14 \cdot 14$

~~15·15~~ $17 \cdot 17 \cdot 3 = 17^2 \cdot 3$

$15 \cdot 29 + 15 \cdot 14 - 14 =$

$= 15 \cdot 43 - 14 =$

$= 15 \cdot 43 - 15 + 1 =$

$= 15 \cdot 42 + 1$

~~18·3 = 51 =~~

$18 \cdot 3 = 54 - 3 =$
$= 51$

$15 \cdot 3 = 45 - 3$

$14 \cdot 3 = 30 + 12 = 42$

$2x^2 + 2x + x + 1 + 1 = 3x^2 + 3x + 2 =$

$= 3x(x+1) + 2$

$14 \cdot 15 = 225 - 15 = 210$

~~324 − 17~~ $289 + 17 = 290 + 16 = 306$

324 $1280 - 520 = 760$ $13 - 6 = 7$

$2^6 = 64$ $+1000$ 250 2^8 1280

64×24

$64 \cdot 1024$ $+ 1280$ 256 1536

$1536 - 760 = 776$

64

$64 \cdot 24$ 1280

$240 + 16 = 256$ 1536

Сканировано с CamScanner

Черновик

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\,2\,1\;\;} \\ \times\, 64776 \\ 3 \\ \hline 194328 \end{array}$$