Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101630**

ID профиля: **856101**

Вариант 18

<u>чистовик</u> В-18

<u>Задача 1</u>

$S_7 = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$; $d>0$

$a_7 a_{12} > S+20$ ① $(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20$

$a_9 a_{10} < S+44$ ② $(a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44$

① $(a_1^2+17a_1d+66d^2) > 7a_1+21d+20$

$a_1^2+17a_1d+66d^2-7a_1-21d-20>0$

т.к. ① >0, ② <0, то ② - ① <0

② $(a_1+17a_1d+72d^2) < 7a_1+21d+44$

$a_1^2+17a_1d+72d^2-7a_1-21d-44<0$

$6d^2<24$

$d^2<4$

$d\in(-2;2)$, но $d>0 \Rightarrow d=1$, подставим в ① и ②

① $a_1^2+17a_1+66-7a_1-21-20>0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$

$a_1\neq -5$

② $a_1^2+17a_1+72-7a_1-21-44<0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

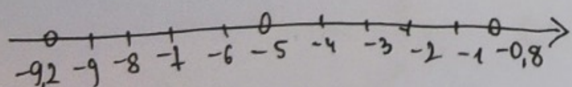
$a_1^2+10a_1+25<18$

$(a_1+5)^2<18$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D=100-28=72$; $\sqrt{D}=6\sqrt{2}$

$a_1=-5\pm 3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\approx 1{,}41 \Rightarrow 3\sqrt{2}\approx 4{,}2$



$a_1\in(-9{,}2;-0{,}8)$

~~Ответ: $a_1 \in \{-9;$~~

пример:

пусть $a_1=-1$

$a_7 a_{12} > S+20$

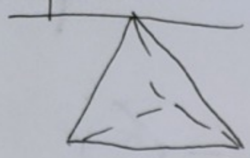
$(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20$

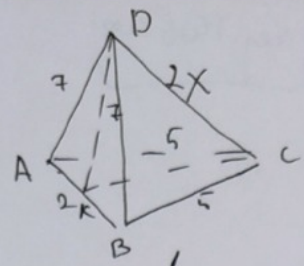
$(-1+6)(-1+11) > -7+21+20$

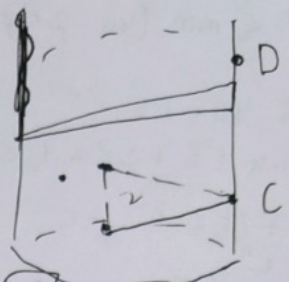
$50>34$ (верно)

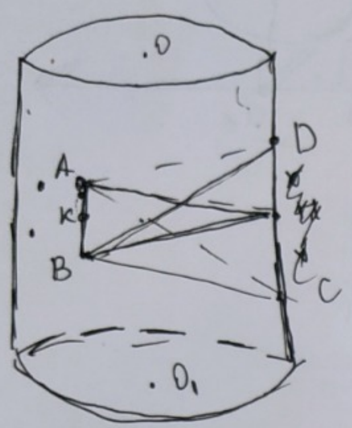
Ответ: $a = \{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

черновик







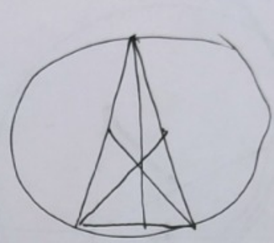


$OO_1 \parallel CD$

$DK = \sqrt{7-1}\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

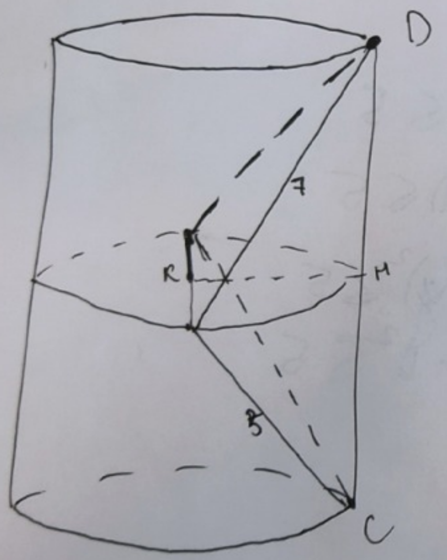
$\cancel{R}CK = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$

~~RA = AH~~



R_{min} $\qquad \dfrac{AB \cdot AH^2}{4R_{min}} = S_{AHB}$

$\nexists R$

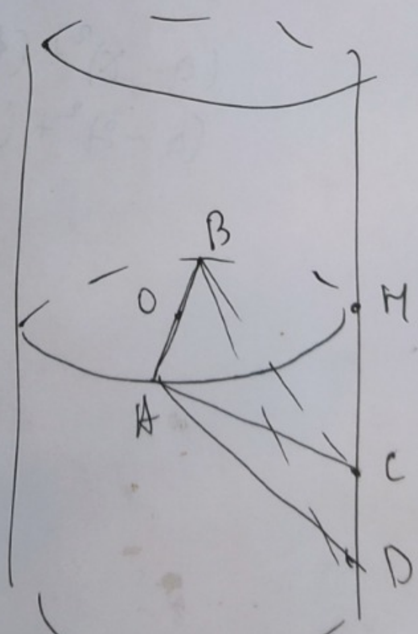


$R = 1$

$DH = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$HC = \sqrt{23}$

$DC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$



$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$ черновик

1

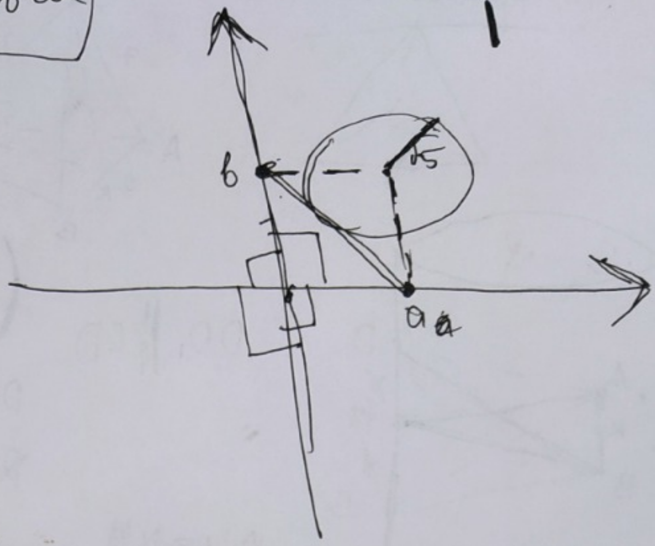
$a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 1)$

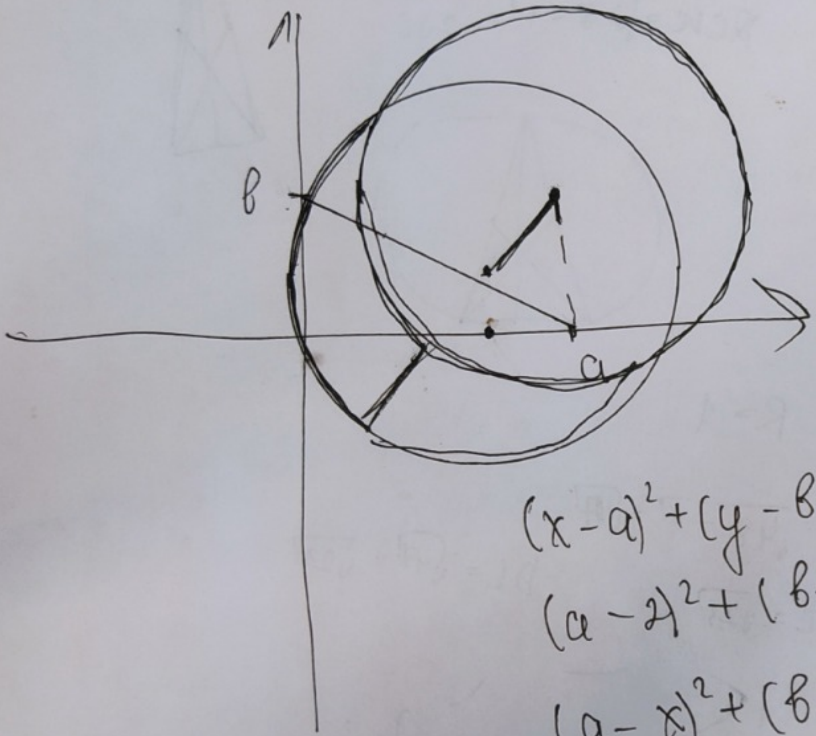
$a^2+b^2 \leq 4a+2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

$a^2+b^2 \leq 5$





$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1) \leq 5$

$(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

21101630 (U856101 M1299525)

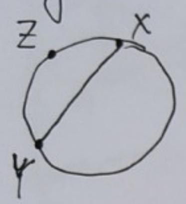
Задача 2 [чистовик]

Дано: ABCD – тетраэдры; AB = 2; AC = CB = 5; AD = DB = 7.

Найти: CD

Решение

1) рассм. произвольную окружность ω и три точки, две из которых соединены

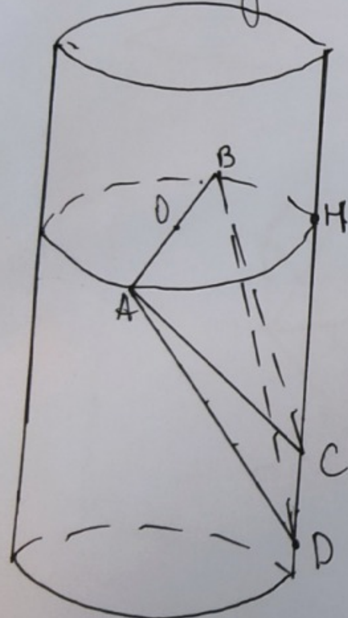


XY – хорда, при приближении XY к Z, $r_{окр}$ будет увел., т.к. $\angle YZX$ будет увел $\Rightarrow$ дуга XY увел.

$r_{окр}$ будет минимален только в случае, если XY – диаметрально противоположные точки.

2) исходя из 1-го пункта, следует ~~A a B~~ AB – диаметр окружн.

3) Рассм. 2 случая:



1 случай:

точка D „ниже" точки C.

O – центр окружн.

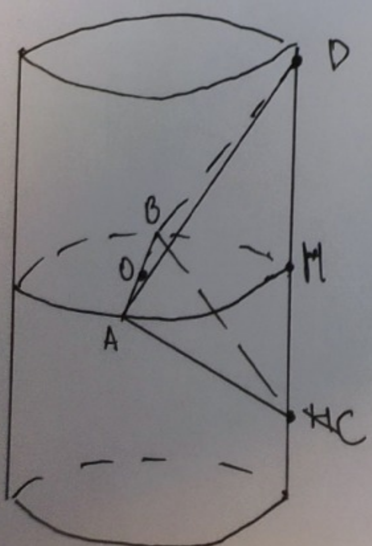
$AO = OB = r = 1$

$\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ – р/б $\Rightarrow$ CO и DO – высоты.

по Т. Пифагора. $CO = 2\sqrt{6}$; $DO = 4\sqrt{3}$

$OH = r$; $OH \perp AB \Rightarrow AH = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} CH &= \sqrt{-AH^2 + AC^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23} \\ DH &= \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47} \end{aligned}\right\} \Rightarrow CD = DH - CH = \sqrt{47} - \sqrt{23}$$



2 случай:

точка D „выше" точки C.

$CD = CH + HD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$.

расчеты аналогичны 1-ому случаю.

Ответ $\sqrt{47} - \sqrt{23}$ или $\sqrt{47} + \sqrt{23}$

21101630 (U856101 M1299525)

Часть 2

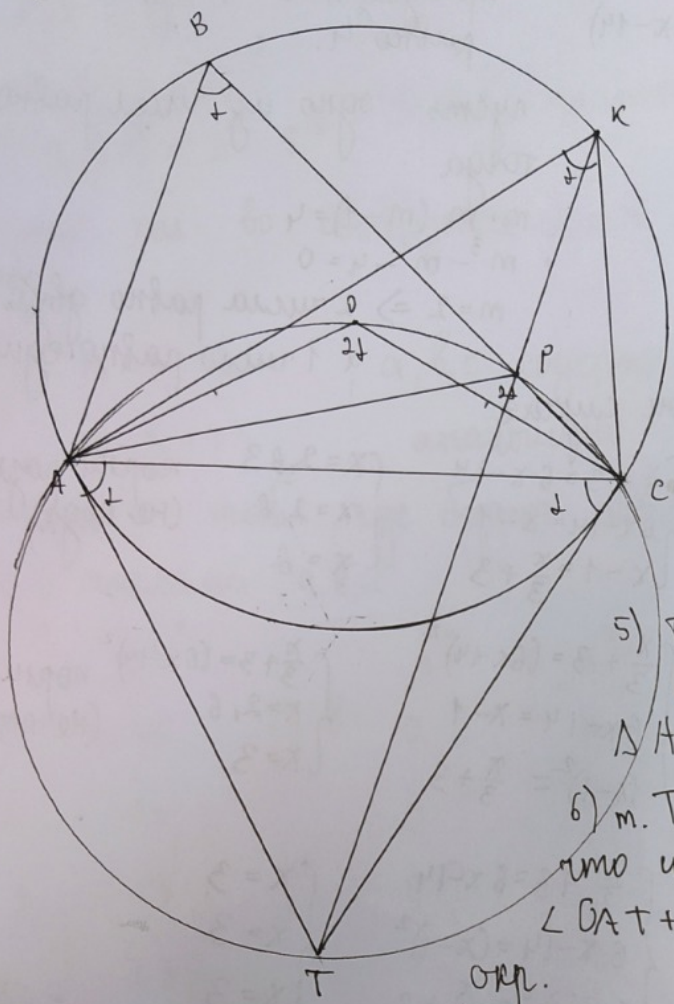
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101630**

ID профиля: **856101**

Вариант 18

Задание 6 [чистовик]



Решение

1) $\angle ABC = \angle AKC$ (опир. на одну дугу).

2) $\angle CAT = \angle ABC$
$\angle ACT = \angle AKC$ } как углы между хордой и касат.

3) $\angle AOC = \angle APC$, т.к. опир. на одну дугу

4) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$ (центр. угол)

5) Т.к. $\angle AKC = \alpha$, $\angle APC = 2\alpha \Rightarrow$ т. P – центр опис. окр. вокруг $\triangle AKC$

6) т. T лежит на той же окр., что и A, O, C, т.к. $\triangle AOT = \triangle OCT$ – п/у, $\angle OAT + \angle OCT = 180°$, то OATC – вписан. в окр.

7) OATC – дельтоид

8) $\angle ATC = 180° - 2\alpha$

$\sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha \Rightarrow$ R окружностей равны

21101630 (U856101 M1299526)

Задание 5 $\boxed{\text{чистовик}}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

произведение этих чисел равно 4.

пусть одно из чисел равно m, тогда

$m \cdot m(m-1) = 4$

$m^3 - m^2 - 4 = 0$

$m = 2 \Rightarrow$ 2 числа равно ~~двум~~ двойке, а 1 число равно единице

Замена:

$x-1=a$; $6x-14=b$; $\frac{x}{3}+3=c$. Три случая

1) $\begin{cases} 2\log_c b = 2 \\ 2\log_b a = 2 \\ \log_a c = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_c b = 1 \\ \log_b a = 1 \\ \log_a c = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}+3 = 6x-14 \\ 6x-14 = x-1 \\ x-1 = \frac{x}{3}+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2{,}83 \\ x = 2{,}6 \\ x = 6 \end{cases}$ корни различны (не подх)

2) $\begin{cases} 2\log_c b = 1 \\ 2\log_b a = 2 \\ \log_a c = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_c b = \frac{1}{2} \\ \log_b a = 1 \\ \log_a c = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}+3 = (6x-14)^2 \\ 6x-14 = x-1 \\ (x-1)^2 = \frac{x}{3}+3 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}+3 = (6x-14)^2 \\ x = 2{,}6 \\ x = 3 \end{cases}$ корни разл. (не подх)

3) $\begin{cases} 2\log_c b = 2 \\ 2\log_b a = 1 \\ \log_a c = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_c b = 1 \\ \log_b a = \frac{1}{2} \\ \log_a c = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}+3 = 6x-14 \\ 6x-14 = (x-1)^2 \\ (x-1)^2 = \frac{x}{3}+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \\ x = 3 \end{cases}$

Ответ: при $x = 3$

$2\frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)} + \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) =$ $\quad 2\log_c b\ ;\ 2\log_b a\ ;\ \log_a c$

$2 \quad 2 \quad 1.$

$2m^2\cdot(m-1)=4$

$m^3 - m^2 - 4 = 0$

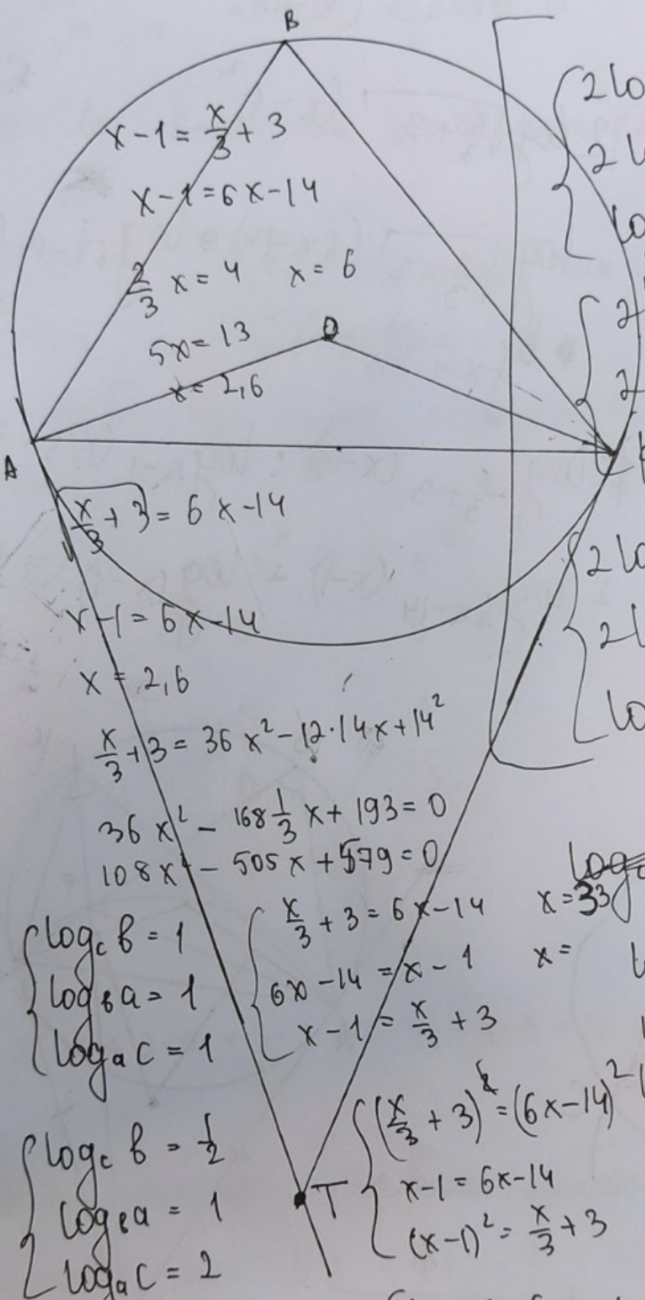
$m = 2$

$x-1=a$

$6x-14=b$

$\frac{x}{3}+3=c$

1) $\log_c b = 1$
$\log_b a = 1$
$\log_a c = 1$



$x-1=\frac{x}{3}+3$

$x-1=6x-14$

$\frac{2}{3}x=4 \quad x=6$

$5x=13$

$x=2{,}6$

$\begin{cases}2\log_c b = 2\\ 2\log_b a = 2\\ \log_a c = 1\end{cases}$

$\begin{cases}2\log_c b = 1\\ 2\log_b a = 2\\ \log_a c = 2\end{cases}$

2) $\log_c b = \frac{1}{2}$
$\log_b a = 1$
$\log_a c = 2$

$\frac{x}{3}+3 = 6x-14$

$\begin{cases}2\log_c b = 2\\ 2\log_b a = 1\\ \log_a c = 2\end{cases}$

$x-1=6x-14$

$x=2{,}6$

$\frac{x}{3}+3 = 36x^2 - 12\cdot 14x + 14^2$

$36x^2 - 168\frac{1}{3}x + 193 = 0$

$108x^2 - 505x + 579 = 0$

~~$\log_c b =$~~

$x=3$

$x=$

$\begin{cases}2\log_c b = 2\\ 2\log_b a = 2\\ \log_a c = 1\end{cases}$ $\begin{cases}\log_c b = 1\\ \log_b a = 1\\ \log_a c = 1\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{3}+3 = 6x-14\\ 6x-14 = x-1\\ x-1 = \frac{x}{3}+3\end{cases}$

$\log_c b = 1$
$\log_b a = 1$
$\log_a c = 2$

$\begin{cases}2\log_c b = 1\\ 2\log_b a = 2\\ \log_a c = 2\end{cases}$ $\begin{cases}\log_c b = \frac{1}{2}\\ \log_b a = 1\\ \log_a c = 2\end{cases}$ $\begin{cases}\left(\frac{x}{3}+3\right)^2 = (6x-14)^2\\ x-1 = 6x-14\\ (x-1)^2 = \frac{x}{3}+3\end{cases}$

$(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3$

$x-1 = 6x-14 \quad x = 2{,}6$

$\begin{cases}2\log_c b = 2\\ 2\log_b a = 1\\ \log_a c = 2\end{cases}$ $\begin{cases}\log_c b = 1\\ \log_b a = \frac{1}{2}\\ \log_a c = 2\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{3}+3 = 6x-14\\ 6x-14 = (x-1)^2\\ (x-1)^2 = \frac{x}{3}+3\end{cases}$

$\frac{x}{3}+3 = 6x-14 \quad x=$

$\frac{17x}{3} = 17$

$x = 3$

① $x=3$
$x=2{,}6$
$x=6$

② $\frac{x}{3}+3 = 36x^2 - 12x\cdot 14 + 14^2$

$x = 2{,}6$

$x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{3}+3$

$x^2 - \frac{7x}{3} - 2 = 0$

$3x^2 - 7x - 6 = 0 \quad D = 49 + 72 = 11^2 \quad x_1 = \frac{7\pm 11}{6} = \frac{2}{3}\ ;\ x = 3$

черновик

$S = 2.$ $\sqrt{\frac{x}{3}+3} = a$

~~$\log_{\sqrt{x/3+3}}(6x-14)$~~ $6x-14 = b$

1) $(x-1)^2$

$2\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)^2$

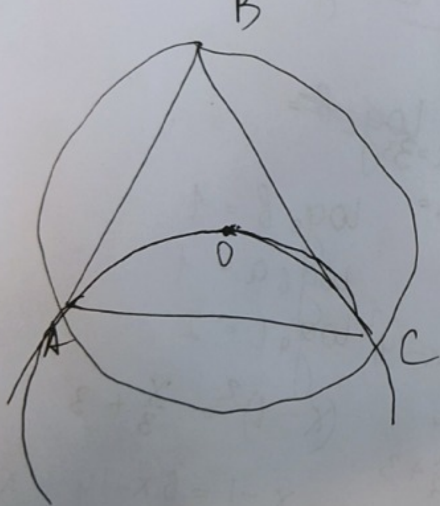
$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \cdot \log_{6x-14}(x-1)^2 \cdot$

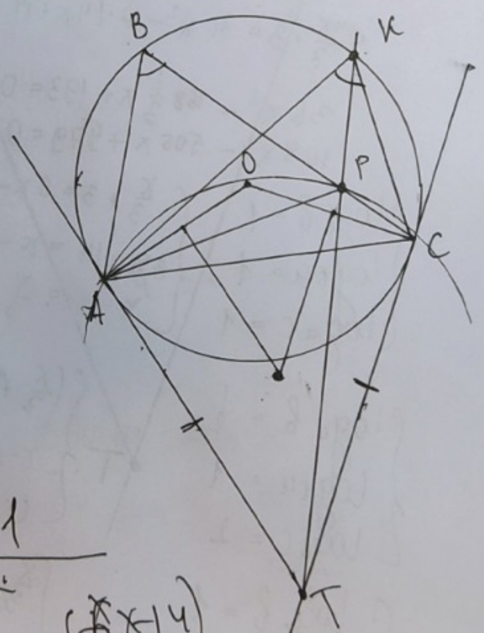
$\cdot \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$4\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) \cdot \log_{x-1}(x/3+3) = 4$

$2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) + 2\log_{6x-14}(x-1) + \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) =$

$=$





$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) + \frac{1}{2\log_{(x-1)^2}(6x-14)}$

Задание 4 [чистовик]

$a, b, c \in N$

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 15 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ кратны } 15$$

Найдем кол-во свободных 3 и 5, которые можно распределять.

„3": $15 - 3 = 12$, a, b, c содержат как минимум одну тройку

„5" $18 - 3 = 15$ аналогично

построим табл., где будет показано как распред. „3" и „5" между числами a, b, c.

		„3"	„5"		„3"	„5"		„3"	„5"
1)	a:	12	15	b:	0	0	c:	0	0
2)		12	14		0	1	c:	0	0
3)		12	13		0	2		0	0
4)		11	13		1	2		1	2

⋮

получаем: $1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \ldots + 13 \cdot 16 = 1120$

=

Т.к. мы смогли выбрать первым любое из 3 a, b, c, то должны умножить на 3: $1120 \cdot 3 = 3360$

Ответ: 3360.