Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101559**

ID профиля: **155135**

Вариант 18

(1) Математика, 11

Чистовик.

№1

Дана арифмет. прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots$. Причём $a_i = (i-1)d + a_1$, где a_i – целое число, значит $d = a_{i+1} - a_i$ – тоже целое и $d > 0$, т.е. $d \in N$.

1) По условию сумма первых 7 членов прогрессии равна S, тогда.

$$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d.$$

2) Также ~~из~~ по условию:

$$a_7 \cdot a_{12} > S + 20$$
$$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > S + 20$$
$$a_1^2 + 17a_1 \cdot d + 66d^2 > S + 20$$
$$-a_1^2 - 17a_1d - 66d^2 < -S - 20$$

$$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$$
$$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < S + 44$$
$$a_1^2 + 17a_1 \cdot d + 72d^2 < S + 44$$

Сложим два данных неравенства

$$\underline{-a_1^2} - \underline{17a_1d} - 66d^2 + \underline{a_1^2} + \underline{17a_1d} + 72d^2 < \underline{-S} - 20 + \underline{S} + 44$$

$$6d^2 < 24$$
$$d^2 < 4$$

$d \in (-2; 2)$, но т.к. $d \in N$, то $d = 1$

3) $\begin{cases} S = 7a_1 + 21d \\ d = 1 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = \frac{S - 21}{7} = \frac{S}{7} - 3$

Ответ: $a_1 = \frac{S}{7} - 3$

(2)

Математика, 11

Чистовик.

№3.

Дано по условию:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

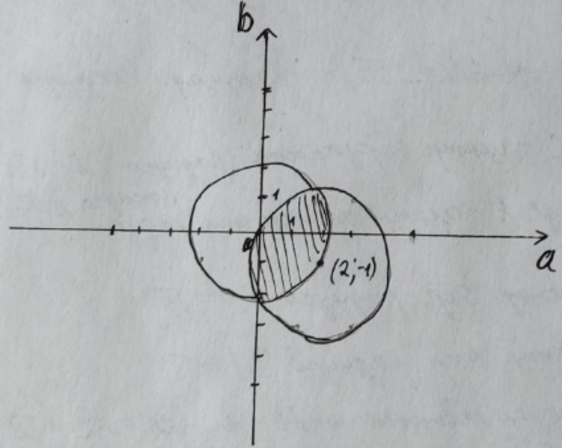
1) Рассм. второе нер-во

$$a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 4a-2b\\ a^2+b^2\le 5.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2\le 5. & \text{— область, ограниченная окружностью радиуса } \sqrt{5}\\ a^2+b^2\le 5 & \text{— область, ограниченная окружностью ~~раду~~ радиуса } \sqrt{5}\end{cases}$$



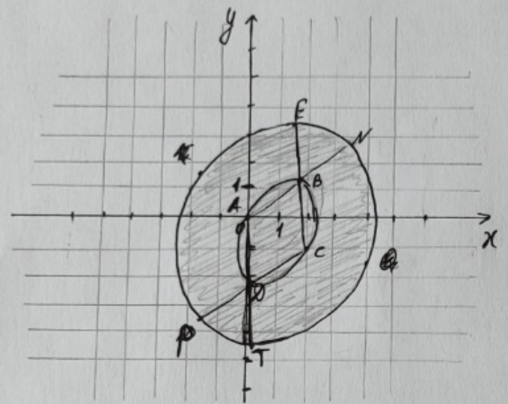
Получим, что все возможные пары значений ~~a,b~~ $(a;b)$ — пересечение двух областей. (заштрихованная область)

2) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ — ~~область, ограниченная~~ семейство ~~окружностей~~ областей, ограниченных окружностями с центром в $(a;b)$ и радиуса $\sqrt{5}$, ~~когда~~ где ~~(a;b)~~ a и b принимают все возможные значения, описанные ~~в~~ в 1-ом пункте. ~~То~~

③ Математика, 11

~~Чер~~ Чистовик
№3 (продолжение)

Тогда фигура M будет иметь такой вид (заштрихованная область):



Пусть (·) A – точка $(0;0)$, (·) C – точка $(2;-1)$
$Окр(A;\sqrt{5}) \cap Окр(C;\sqrt{5}) = \{B;D\}$.
$C - B - E$; $A - B - N$;
$A - D - T$; $C - D - P$;
$AB = EB = BN = BC = AC = AD = DC = PD = DT = \sqrt{5}$

Теперь ~~уже~~ найдём площадь данной фигуры:

~~S_M = (площадь сектора окружности с центром в (·) C и радиуса $CP = 2\sqrt{5}$) +~~
~~+ (площадь сектора Окр(A; AN), где $AN = 2\sqrt{5}$) + (площадь сектора~~

Пусть $S_1 = S_{сектора\ CEP}$, где C – центр окружности радиуса $CP = 2\sqrt{5}$

$S_2 = S_{сектора\ ANT}$, где A – центр окружности радиуса $AN = 2\sqrt{5}$

$S_3 = S_{сектора\ BEN}$, где B – центр окр. радиуса $BN = \sqrt{5}$

$S_4 = S_{сектора\ DPT}$, где D – центр окр. радиуса $DT = \sqrt{5}$

$S_5 = S_{ABCD}$, $ABCD$ – ромб, т.к. по построению $AB = BC = DC = AD = AC = \sqrt{5}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_5 = S_{ABC} \cdot 2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

И т.к. $AB = BC = AC = CD = AD$, то $\triangle ABC = \triangle ADC$ и $\triangle ABC$ – равносторонний,
значит $\angle BCD = 120° = \angle BAD$, тогда $S_1 = S_2 = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{5})^2 \cdot 120°}{360°} = \frac{20\pi}{3}$

Но $\begin{cases} \angle ABC = 60° = \angle EBN \\ \angle ADC = 60° = \angle PDT \end{cases}$ $\Rightarrow S_3 = S_4 = \frac{\pi \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{5\pi}{6}$,
накр. лежащие

Отсюда

$S_{фигуры\ M} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S_5 = \frac{20\pi}{3} \cdot 2 + \frac{5\pi}{6} \cdot 2 - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{45\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = 15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $S_{фигуры\ M} = 15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

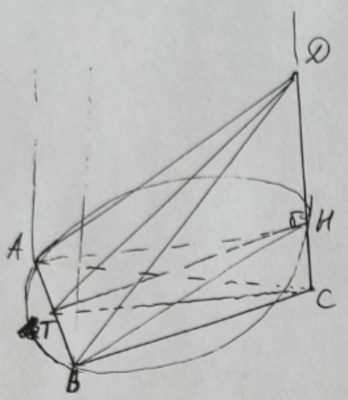
21101559 (U155135 M1301347)

4

Математика, 11

Чистовик.

№2



Дано:

$AC=CB=5;\ AD=DB=7;$

$AB=2;$

Найти: ~~длин~~ CD такое, что ~~V=V~~ $V_{цилиндра}$ минимален.

Решение:

1) Пусть T – середина $[AB]$, и TH – высота в ~~ΔADB~~ ΔTDC, $H\in[DC]$

2) заметим, ~~что~~ что т.к. $AD=DB=7$, то ΔADB – равноб., но DT – медиана в $\Delta ADB \Rightarrow DT$ – высота, тогда $DT=\sqrt{BD^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{7^2-1}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

аналогично в ΔABC: CT – медиана, высота, тогда ~~$CT=\sqrt{5^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$~~ $CT=\sqrt{CB^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

3) $DT\perp AB$ и $CT\perp AB \Rightarrow$ угол между (CD) и (AB) равен $90°$

~~3) TH – высота в ΔADC, тогда (значит TH также является диаметром цилиндра)~~

~~тогда $DH=\sqrt{TD^2-TH^2}=\sqrt{48-TH^2}$, $HC=\sqrt{CT^2-HT^2}=\sqrt{24-HT^2}$~~

~~Рассм. неск. случаев в зависимости от расположения (·H) и найдём минимальный диаметр цилиндра (а значит миним. радиус)~~

~~1-ый) D–H–C, тогда~~

~~$CD=DH+HC=\sqrt{48-TH^2}+\sqrt{24-HT^2}$~~

~~введём ф-цию $f(x)=\sqrt{48-x^2}+\sqrt{24-x^2}$~~

~~$f'(x)=-2$~~

значит т.к. $TH\perp DC$, то $(ABH)\perp(CD)$, тогда радиус окружности описанной около ΔABH равен радиусу цилиндра, но ~~ΔAB~~ TH – высота, медиана в ΔAHB ~~V=~~ $\Rightarrow \Delta AHB$ – равноб., $AH=HB$, тогда

Математика, 11

Черновик.

$a_i = (i-1)d + a_1.$

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} = a_1 + 3d.$

$a_7 \cdot a_{12} = (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 17d a_1 + 66d^2 > a_1 + 3d + 20.$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) = a_1^2 + 17d a_1 + 72d^2 \leq a_1 + 3d + 44$

$-a_1^2 - 17d a_1 - 72d^2 \geq -a_1 - 3d - 44$

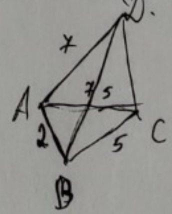
$-6d^2 > -24$

$d^2 < 4$

$d = 1$

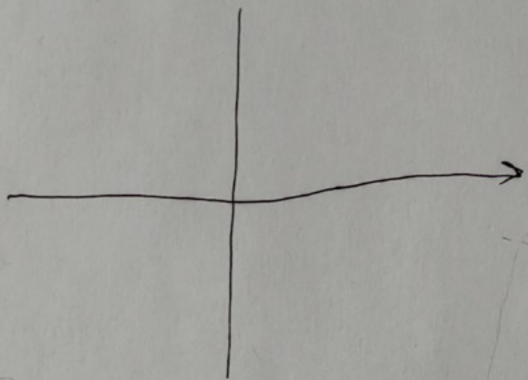
$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 5. \\ a^2 + b^2 \leq 4a - 2b. \\ a^2 + b^2 \leq 5. \end{cases}$ — ~~Окр. с центром~~ область огранич. Окр $((a;b); \sqrt{5})$

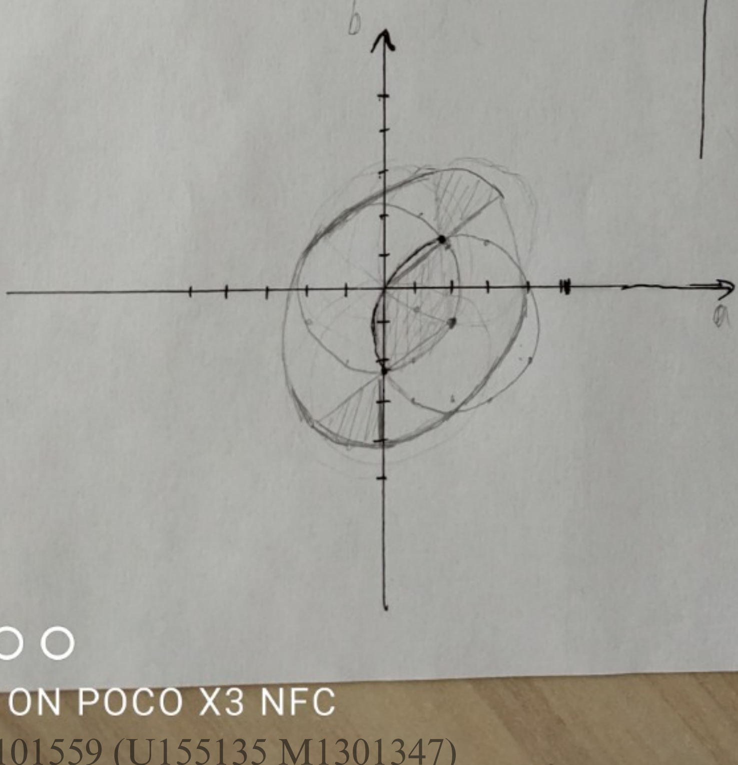
$\Rightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5. \\ a^2 + b^2 \leq 5. \end{cases}$



1) $a^2 - 4a + b^2 + 2b \leq 0.$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5.$





21101559 (U155135 M1301347)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101559**

ID профиля: **155135**

Вариант 18

(1) Математика, 11

Чистовик

~~Зад.~~ №2

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-9 \\ x\neq -6 \\ x>\frac{7}{3} \\ x\neq \frac{5}{2} \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

~~значит $\log \frac{x}{3}+3\neq 1$, $x-1\neq 1$~~

1) ~~из ОДЗ~~ т.к. по ОДЗ $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases}$, то $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\neq 0$;

$\log_{6x-14}(x-1)^2=2\log_{6x-14}(x-1)\neq 0$ и $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)\neq 0$.

2) Пусть $a=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$; $b=2\log_{6x-14}(x-1)$; $c=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Заметим, что $\begin{cases} a\cdot b=\frac{4}{c} \\ a\cdot c=\frac{4}{b} \\ b\cdot c=\frac{4}{a} \end{cases}$ т.е. $a\cdot b\cdot c=4$

Рассм. все ~~несколько~~ варианты: ~~случаев~~

~~(1) $\begin{cases} a=b \\ c=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{4}{c}} \\ c=a-1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{c}}=c+1$~~

~~$\begin{cases} c>-1 \\ c>0 \\ \frac{4}{c}=c^2+2c+1 \end{cases}$; $c^3+2c+c-4=0$; $(c-1)(c^2+3c+4)=0$; $\underbrace{(c^2+3c+4)}_{>0}$ $\Rightarrow c=1$~~

~~значит $\begin{cases} c=1 \\ a=b=2 \end{cases}$ т.е. $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$; $x-1=\frac{x}{3}+3$; $\frac{2x}{3}=4$; $x=6$~~

SHOT ON POCO X3 NFC

② Математика, 11

Чистовик

№2 (продолжение)

1) Если $\begin{cases} a=b \\ c=a-1 \end{cases}$, тогда т.к. $a\cdot b\cdot c=4$, то

$$(a-1)\cdot a^2=4$$

$$a^3-a^2-4=0.$$

$$(a-2)\underbrace{(a^2+a+2)}_{>0}=0.$$

$$\Downarrow$$

$$a=2$$

тогда $\begin{cases} a=2 \\ c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2 \\ \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}+3=6x-14 \\ \frac{x}{3}+3=x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{17x}{3}=17. \\ \frac{2x}{3}=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

2) $\begin{cases} a=c \\ b=a-1 \end{cases}$, тогда $(a-1)a^2=4$

... решали ранее

$a=2$

тогда $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \text{ (решали ранее)} \\ \log_{6x-14}(x-1)=\frac{1}{2} \\ \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)=2 \end{cases}$

подставим $x=3$ в 2ое и 3-е равенство:

$\begin{cases} \log_4 2=\frac{1}{2} \\ \log_2 4=2 \end{cases}$ – истина, значит $x=3$ – одно из решений исходной системы.

3) $\begin{cases} b=c \\ a=b-1 \end{cases}$, тогда $(b-1)b^2=4$

... решали аналогичное ранее

$b=2$

$\begin{cases} b=2 \\ c=2 \\ a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_{6x-14}(x-1)=2 \\ \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=2 \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 6x-14=x-1; \; x=\frac{13}{5} \\ \frac{x}{3}+3=x^2-2x+1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2-7x-6=(3x+2)(x-3)=0$ значит $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3} \\ x=3 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x=\frac{13}{5} \\ x\in\{-\frac{2}{3};3\} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ нет решений.

...

21101559 (U155135 M1301348)

Чистовик.

№2 (продолжение)

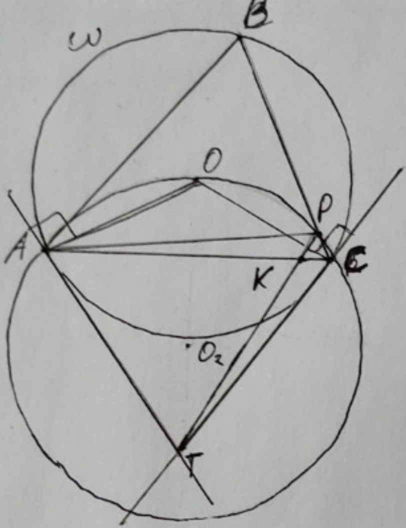
Рассмотрев все варианты, получили, что $x=3$

Ответ: $x=3$

4 Математика, 11.

Чистовик.

№3.



Дано:
$S_{APK}=6$; $S_{CPK}=5$; (AT) и (TC) – касат. к ~~окр~~ ω.

Найти:
а) S_{ABC}
б) ~~кр~~ AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

Решение:

1) $\begin{cases} S_{APK}=6 \\ S_{CPK}=5. \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{6}{5}.$

2) $\begin{cases} AO=OC \ (\text{т.к. } \{A;C\} \subset \omega) \\ AO_2=O_2C \ (\text{т.к. } \{A;C\} \subset \text{Окр}(O_2;O_2C)) \\ AT=TC \ (\text{т.к. } TA \text{ и } TC - \text{касат. к } \omega) \end{cases} \Rightarrow$ точки O, O_2 и T лежат на одной прямой.

3) $\angle ATC = 360° - \angle AOC - \angle OAT - \angle OCT = 180° - \angle AOC = 180° - 2\angle ABC$

4) Рассм. Окр$(O_2; O_2C)$:

① $TP=TC=R \Rightarrow \triangle TPC$ – равноб., $\angle TPC = \angle TCP$

② $AT=TC=R \Rightarrow \triangle ATC$ – равноб., $\underbrace{\angle ACT}_{=\angle TAC} = \dfrac{180° - \angle ATC}{2} = \dfrac{2\angle ABC}{2} = \angle ABC.$

5) из п.4. $\begin{cases} \angle ACT = \angle ABC \\ \angle PCT = \angle ACB + \angle ACT. \\ \angle TCP = \angle TPC \end{cases} \Rightarrow \angle TPC = \angle ACB + \angle ABC.$

Математика, 11

Черновик №1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 3\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{11} \end{cases}$$

$a = 3^{t_a}\cdot 5^{k_a}$

$b = 3^{t_b}\cdot 5^{k_b}$

$c = 3^{t_c}\cdot 5^{k_c}$

$\frac{8\cdot 4\cdot 6}{НОД(32;24)} = \frac{8\cdot 4\cdot 6}{8} = 24$

~~НОК(a;b;c)~~

8 4 6 НОК = 24

$\frac{8\cdot 4\cdot 6}{4\cdot 2\cdot 2}$

$$НОК(a;b;c) = \frac{НОК(a;b)\cdot c}{НОД(НОК(a;b);c)} = \frac{abc}{НОД(a;b)\,НОД\left(\frac{a\cdot b}{НОД(a;b)};c\right)} = \frac{abc}{НОД(a\cdot b; c\cdot НОД(a;b))} =$$

при этом $\begin{cases} \min(t_a, t_b, t_c) = 1 \\ \min(k_a, k_b, k_c) = 1 \end{cases}$

$$НОД(a;b;c) = НОД\left(\frac{a\cdot b}{НОД(a;b)}; c\right) = 15 \Rightarrow c\cdot НОД(a;b)$$

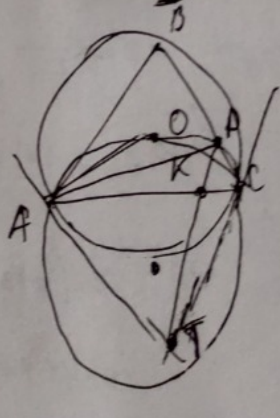
$$НОК(a;b;c) = НОК(НОК(a;b);c) = НОК\left(\frac{a\cdot b}{НОД(a;b)};c\right) =$$

$$= \frac{a\cdot b\cdot c}{НОД(a;b)\cdot НОД\left(\frac{a\cdot b}{НОД(a;b)};c\right)} =$$

18

3

$\omega = Окр(O;r)$



$S_{APK} = 6;$

$S_{CPK} = 5;$

$\Downarrow$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}.$

Математика, 11

Черновик №2б

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)$

ОДЗ:

$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-9 \\ x\neq -6 \\ x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{15}{6}=\frac{5}{2} \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $\frac{x}{3}+3>1$, $x-1>1$, $6x-14\neq 1$ $\Downarrow$ $\log$ $b\neq 0$ $c\neq 0$ $a\neq 0$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)^2$

$36-14=22.$

2

$\log_a b+\log_b c=\cancel{\log_a b+\frac{\log_a}{\log_c}}$

$=\log\frac{1}{\log_b a}+\log_b c=$

$\sqrt{4\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}=\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)+1$

$\cancel{a\cdot b=2\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)^2}=\frac{2}{\sqrt{c}}\ \frac{4}{c}=c^2+2c+1.$

$c^3+2c^2+c-4=0.$

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$; $2\log_{6x-14}(x-1)^2$; $2\log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)$ $(c+1)(c^2$

$\cancel{1)\ 2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)}=2\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_2 4\cdot\log_2 8=\cancel{2\cdot 3}.$

$\log$

$\cancel{\text{при } x=\frac{15}{6}}=\frac{5}{2}$

$\cancel{\log 2\log_{\sqrt{...}}}\ 2\log_{\sqrt{...}}$ $1=0$; $\log_{\log_{6x-14}}(\frac{x}{3}+3)$

1) $\cancel{\log(\frac{x}{3}+}$ $\cancel{\frac{x}{2}}$ $\begin{cases} \log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1 \\ \log_{6x-14}(\frac{x}{3}+3) \end{cases}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$

$\frac{x}{3}+3=x^2-2x+1.$

$49+18\cdot 4=49+72.$

$x+9=3x^2-6x+3.$

$3x^2-7x-6=0.$ $(3x-)$