Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101481**

ID профиля: **827028**

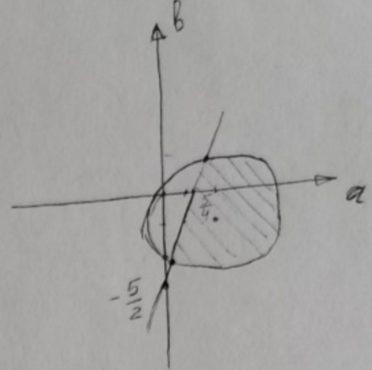
Вариант 18

Чистовик лист 3

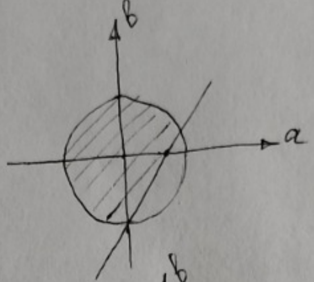
$\boxed{N3}$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ 4a-2b \le 5 \end{cases}$$

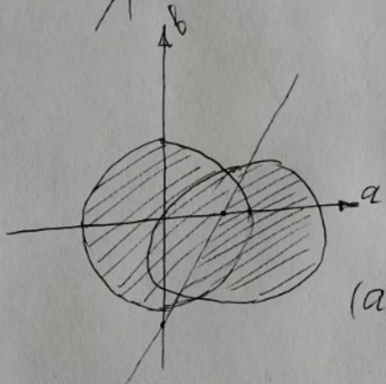
$$\begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ 4a-2b \le 5 \end{cases}$$



2) $\begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ 4a-2b \ge 5 \end{cases}$

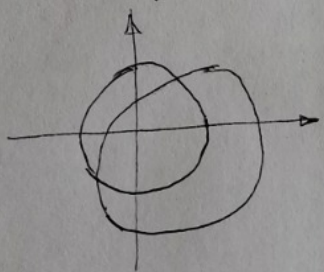


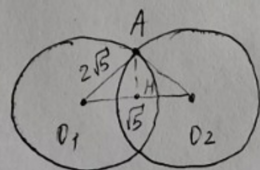
$(x-a)^2$



$(a,b) \in (a^2+b^2 \le 5) \cup ((a-2)^2+(b-1)^2 \le 5)$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \Rightarrow (x,y) \in (x^2+y^2 \le 10) \cup ((x-2)^2+(y+1)^2 \le 10)$





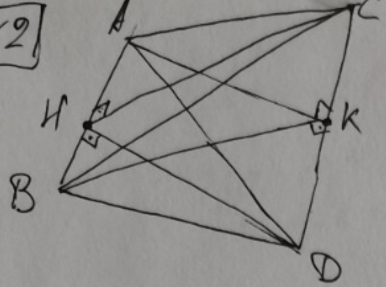
$\cos(\angle AOH) = \frac{\sqrt{5}}{2} / 2\sqrt{5} = \frac{1}{4}$

$\angle AOH = \arccos\frac{1}{4}$; $AH = \sqrt{5}\cdot\sqrt{4-\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

$S = \pi(2\sqrt{5})^2 + \pi(2\sqrt{5})^2 - \frac{\pi(2\sqrt{5})^2}{2\pi}\cdot 2(\angle AOH) - \frac{\pi(2\sqrt{5})^2}{2\pi}\cdot$
$\cdot 2(\angle AOH) + 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 2\pi\cdot 20 - 40\arccos\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{2} = 2\pi\cdot 20 - 40\arccos\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{2} = 40(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + \frac{5\sqrt{15}}{2}$

Чистовик лист 2

$\boxed{№2}$



т.к. Δ-ки р/б, то $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$, где H серед $AB \Rightarrow CD \perp AB$. Пусть $K \in (CD)$ и $(ABK) \perp CD$. Тогда очевид. радиус цилиндра равен радиусу опис. окружн. $\triangle ABK$ $r \geq \frac{AB}{2} \Rightarrow AK = \sqrt{2}$

2 случая:

1) K попала на отрезок CD, тогда $CD = CK + KD = \sqrt{25-2}$ + $\sqrt{49-2} = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

2) $K \notin CD$, тогда $CD = KD - KC = \sqrt{49-2} - \sqrt{25-2} = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$; $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Чистовик лист 1

$\boxed{№1}$

$a_7 a_{12} > S_7 + 20$

$a_9 a_{10} < S_7 + 44$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$d \in \mathbb{Z}$

$(a_1+6d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 + 20$

$\Downarrow$

$a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$(a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

(2)−(1)

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$\Downarrow$

$d = 1.$

$a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 + 72 - 21 - 44 < 0$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 66 - 21 - 20 = a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \end{cases}$$

$a_1 + 10a_1 + 7 < 0$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{25-7} = -5 \pm 3\sqrt{2}$
$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$

$-9,3 = -5-4,3 < -5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2} < -5+4,3 = -0,7$

$-9 \le a_1 \le -1$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0$

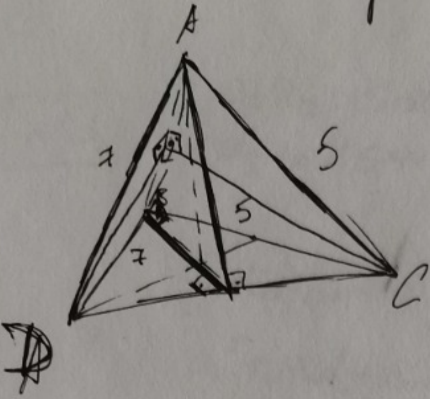
$a_1 \neq -5$

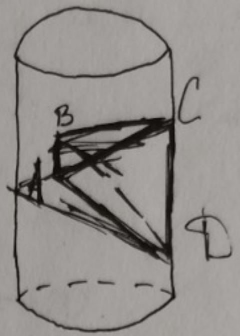
$-9 \le a_1 \le -6, \quad -4 \le a_1 \le -1$

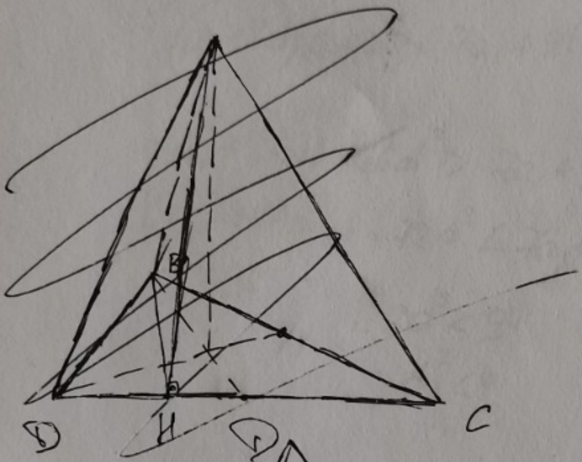
Ответ: $(-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1)$.

Черновик лист 2

$\sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

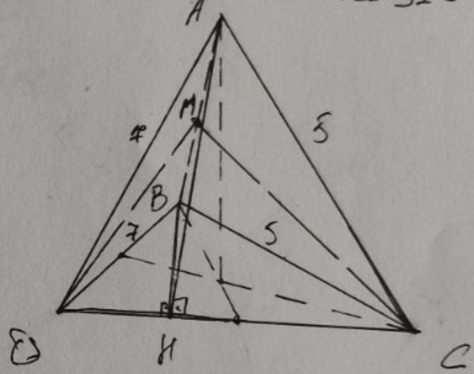


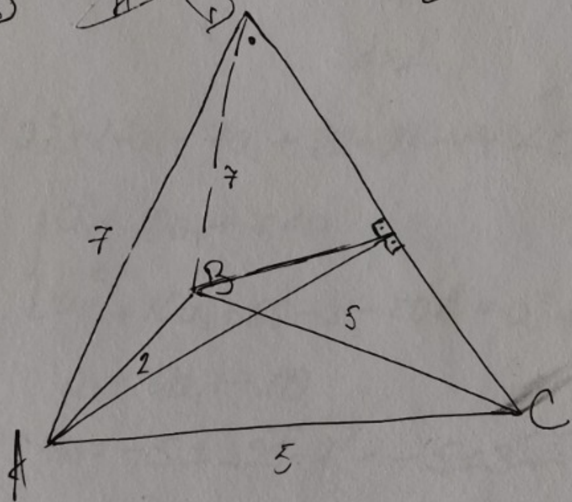




$DM = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

$MC = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$





Черновик лист 1

№1

~~$\frac{a_1+a_n}{2}$ $a_n = a_1 + d(n-1)$ $\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$~~

~~$S_7 = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$~~

~~$a_7 = a_1+6d$ $a_{12} = a_1+11d$~~

~~$a_9 = a_1+8d$ $a_{10} = a_1+9d$~~

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20\\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+17ad+66d^2 > 7a+21d+20 \quad (1)\\ a^2+17ad+72d^2 < 7a_1+21d+44 \quad (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+17ad+66d^2-7a-21d-20>0\\ a^2+17ad+72d^2-7a-21d-44<0\end{cases}$$

$$\cancel{a^2}+\cancel{17ad}+66d^2-\cancel{7a}-\cancel{21d}-20>\cancel{a^2}+\cancel{17ad}+72d^2-\cancel{7a}-\cancel{21d}-44$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

~~$d\in(-\sqrt{3};\sqrt{3})$~~

Часть 2

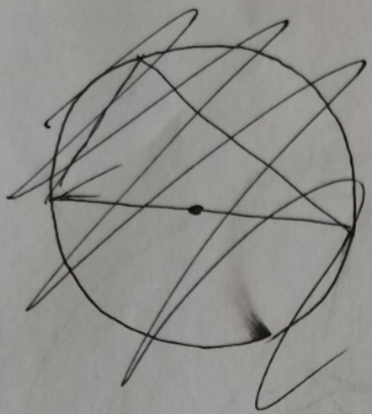
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

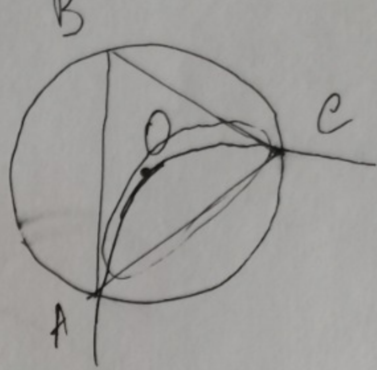
Шифр: **21101481**

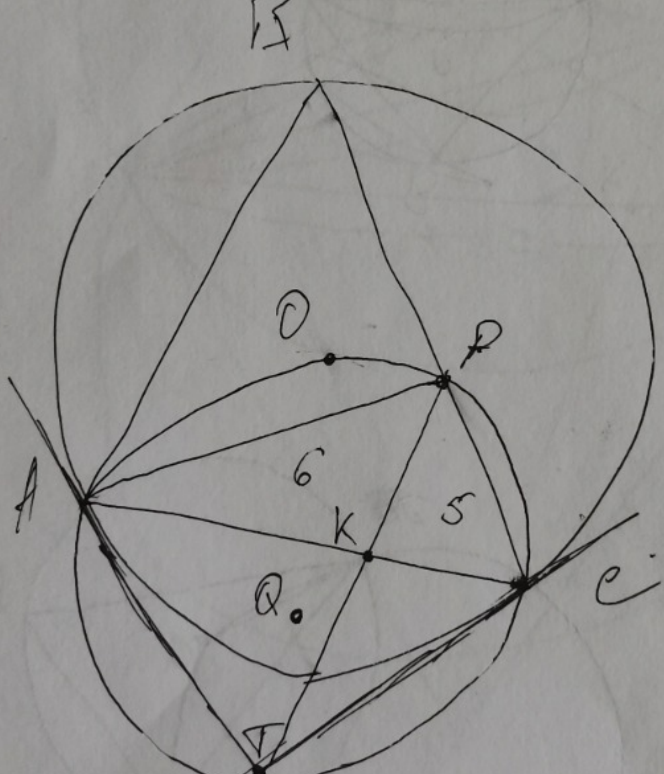
ID профиля: **827028**

Вариант 18

Черновик лист 2.



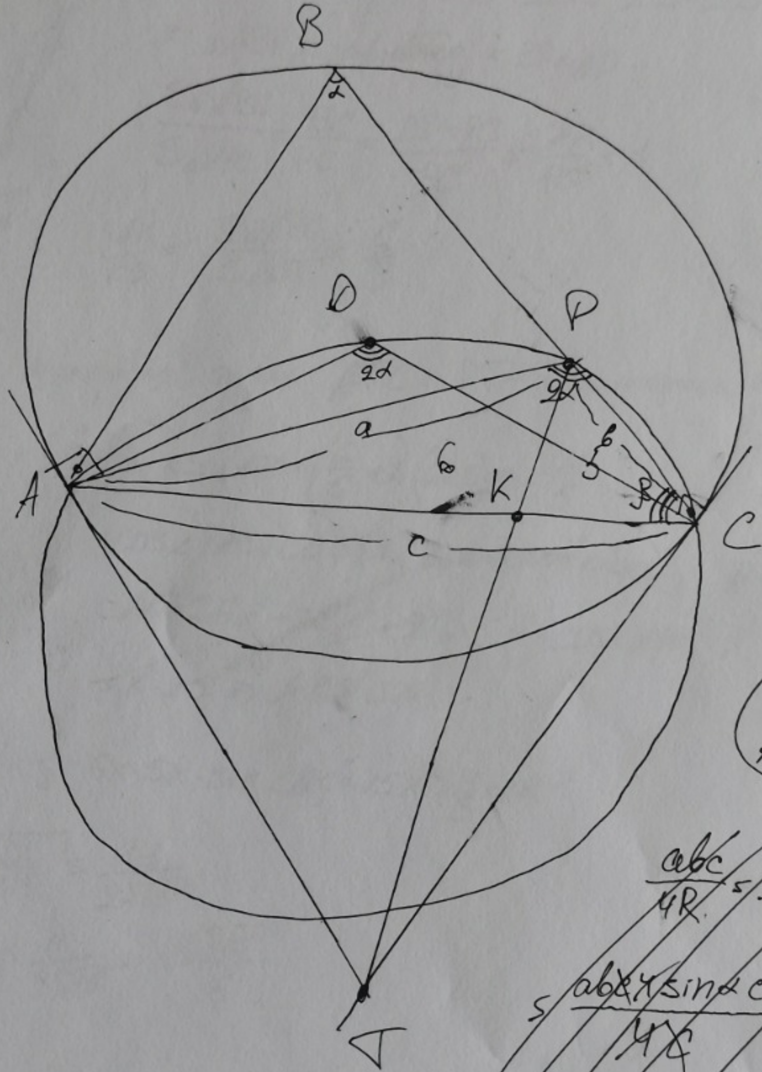




Черновик лист 1.

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2r$

$\frac{AC}{2\sin 2\alpha} = R = \frac{AC}{4\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$



$PC\cdot KC\cdot\sin\beta = 5$

$PC\cdot AC\cdot\sin\beta = 11$

$\frac{KC}{AC} = \frac{5}{11}$

$\cancel{\frac{abc}{4R} = 11 = abc}$

$\cancel{= \frac{abc\cdot 4\sin\alpha\cos\alpha}{4AC} = 11}$

$\cancel{2ab\sin 2\alpha = 11}$

$\cancel{4\cdot\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha = 11}$

$\cancel{4\cdot S_{ADC} = 11}$

Чистовик лист 2

$\boxed{№5}$ $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

ОДЗ: $x>\frac{7}{3}$, $x\neq\frac{5}{2}$

$\underbrace{2\log_a b}_{y}$, $\underbrace{2\log_b c}_{z}$, $\underbrace{\log_c a}_{t} = 4.$

$y\cdot z\cdot t = 4\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = 4.$

Обозначим u - равные из чисел

$u-1$ - третье число

$u^2(u-1)=4$

$u^3-u^2-4=0$

$(u-2)(u^2+u+2)=0$

$\downarrow$

$D<0 \Rightarrow u=2$ - единственное решение

Соответственно имеем 3 варианта:

$$(y,z,t) = \left[\begin{array}{l}(2,2,1)\\(2,1,2)\\(1,2,2)\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-4)=2 \\ 2\log_{6x-14}(x-1)=2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1 \end{cases} \Rightarrow x-1=\frac{x}{3}+3=6x-4$

$\begin{cases} x=\frac{13}{5} \\ x=6 \end{cases} \varnothing$

Чистовик лист 1.

$\boxed{№4}$ $НОД(a;b;c)=15$

$НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$

Заметим, т.к. НОК имеет простые делители только 3 и 5, то $a=3^{\alpha}\cdot5^{\beta}$, $b=3^{\alpha_2}\cdot5^{\beta_2}$, $c=3^{\alpha_3}\cdot5^{\alpha_3}$

Т.к. НОД=15, то $a;b;c \vdots 15$. Разделим $a;b;c$ на 15, получим $a'=3^{\alpha_1'}\cdot5^{\beta_1'}$; $b'=3^{\alpha_2'}\cdot5^{\beta_2'}$; $c'=3^{\alpha_3'}\cdot5^{\beta_3'}$, где $\alpha_i'=\alpha_i-1$; $\beta_i'=\beta_i-1$. Тогда $\min\alpha_i'=0=$ $=\min\beta_i'$, $\max\alpha_i'=14$, $\max\beta_i'=17$. Тогда две α' равны 0 и 14 соотвественно, а третья может быть от 0 до 14. Пусть 3-я $\neq 0$ и 14 $\Rightarrow$ вариантов $A_3^2\cdot13=78$. Если две альфы 0, то вариантов 3, также если две альфы 14. Тогда всего вариантов „распределить" альфы $78+3+3=84$.

Аналогично вариантов „распределить" беты $6\cdot16+6=102$.

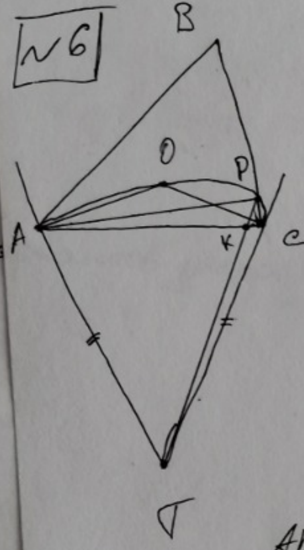
$\Downarrow$

также троек $102\cdot84=8568$

21101481 (U827028 M1303599)

Чистовик лист 3

№6



$\angle ADC = 2\angle B$ (центр, впис.)

$\angle APC = \angle ADC = 2\angle B$ опир на дугу AC

$\angle BAB = \angle APC - \angle B = 2\angle B - \angle B = \angle B \Rightarrow$

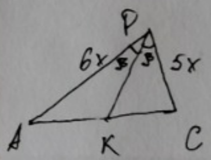
$\Rightarrow \triangle ABP$ – равнобед. $\Rightarrow BP = AP$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{BP+PC}{PC} = \frac{AP}{PC} + 1$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{6}{5}$$

Т – середина дуги $\angle AТC \Rightarrow PТ$ – биссектриса $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$

$$S_{\triangle ABC} = \left(\frac{6}{5}+1\right) S_{\triangle APC} = \left(\frac{6}{5}+1\right)(6+5) = \frac{121}{5}$$



$$\cos\angle PAC = \cos(2\angle B) = 2\cos^2\angle B - 1 = \frac{2}{1+tg^2\angle B} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$AC^2 = 36x^2 + 25x^2 - 2\cdot 6\cdot 5x^2\cdot\cos\angle APC = x^2\left(36+25-2\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{3}{5}\right) =$$

$$= x^2\cdot 25 \Rightarrow AC = 5x$$

$$\frac{121}{5} = S = \frac{1}{2}\cdot 6x\cdot 5x\cdot\sin\angle APC = 15x^2\cdot\frac{4}{5} = 12x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{121}{12\cdot 5}} = \frac{11}{2\sqrt{15}}$$

$$AC = 5\cdot\frac{11}{2\sqrt{15}} = \frac{11\sqrt{15}}{6}$$