Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101458**

ID профиля: **134766**

Вариант 18

Чистовик.

№1.

~~$(\ldots)^2 +$~~

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 7a_1 + 21n$

$a_2 = a_1 + n$ (пусть n - разность арифм прогрессии, т.к. все числа прогрессии целые, то n - целое число, прогрессия возраст $\Rightarrow n > 0$).

$a_7 \cdot a_{12} = (a_1 + 6n)(a_1 + 11n) = a_1^2 + 17a_1 \cdot n + 66n^2 > 7a_1 + 21n + 20$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1 + 7n)(a_1 + 8n) = a_1^2 + 17a_1 \cdot n + 72n^2 < 7a_1 + 21n + 44.$

$\Downarrow$

$6n^2 < 24$ (если $6n^2 \geq 24$, то

$a_1^2 + 17a_1 \cdot n + 66n^2 + 6n^2 > a_1^2 + 17a_1 \cdot n + 66n^2 + 24$

$a_1^2 + 17a_1 \cdot n + 66n^2 + 6n^2 > 7a_1 + 21n + 20 + 6n^2 \geq 7a_1 + 21n + 44$

$\Downarrow$

$a_1^2 + 17a_1 \cdot n + 72n^2 > 7a_1 + 21n + 44$ - противоречие).

$\Downarrow$

$n^2 < 4$, т.к $n \in \mathbb{Z}, n > 0 \Rightarrow n = 1.$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41. \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5)^2 - 18 < 0. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5. \\ |a_1 + 5| < 18 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 > -5 \\ a_1 < \sqrt{18} - 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 < -5 \\ a_1 > -5 - \sqrt{18} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[a_1 = \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\} \right.$

Ответ: $a_1 = \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$.

21101458 (U134766 M1301624)

1.

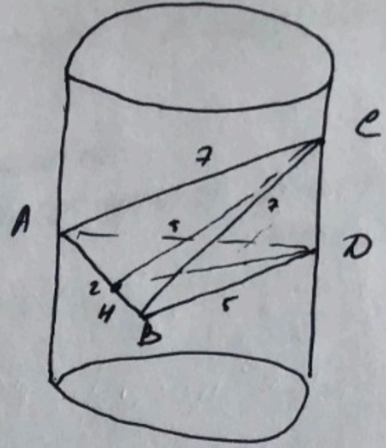
Чистовик.

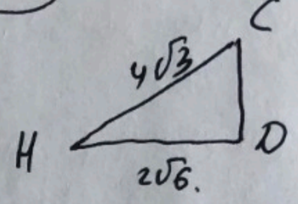
№ 2.

Заметим, что тетраэдр симметричен отн-но CHD, где CH ⊥ AB
HD ⊥ AB.
(H - серед AB)

⇓

AB ⊥ (CHD)





$CH = 4\sqrt{3}$. (по th Пифаг.)

$DH = 2\sqrt{6}$.

радиус цилиндра будет наименьший, когда (ABD) будет параллельна основанию цилиндра, т.к. $R_{опис\ ABC} < R_ц < R_{опис\ ABD}$

$R_{опис\ ABD} = \frac{abc}{4S} = \frac{5D}{4 \cdot 2\sqrt{6}}$ ⇒ $CD \perp (ABD)$

⇓

$S_{ABD} = 2\sqrt{6}$.

$CD = \sqrt{48 - 24} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Ответ: $CD = 2\sqrt{6}$.

~~Пусть угол м/у плоскостями (ABC) и (ABD) = α.~~

$R_{(опис)} \cdot \cos \alpha$

Чистовик

№3.

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$ — ~~окр~~ круг ω с центром (a,b), радиусом $\sqrt{5}$.

(a, b) — координаты точки, где может лежать центр окружности ω.

1). если $4a-2b<5$.

$\Downarrow$

$a^2+b^2-4a+2b \le 0$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5.$

(окр. круг с центром $(2;-1)$, $r=\sqrt{5}$)

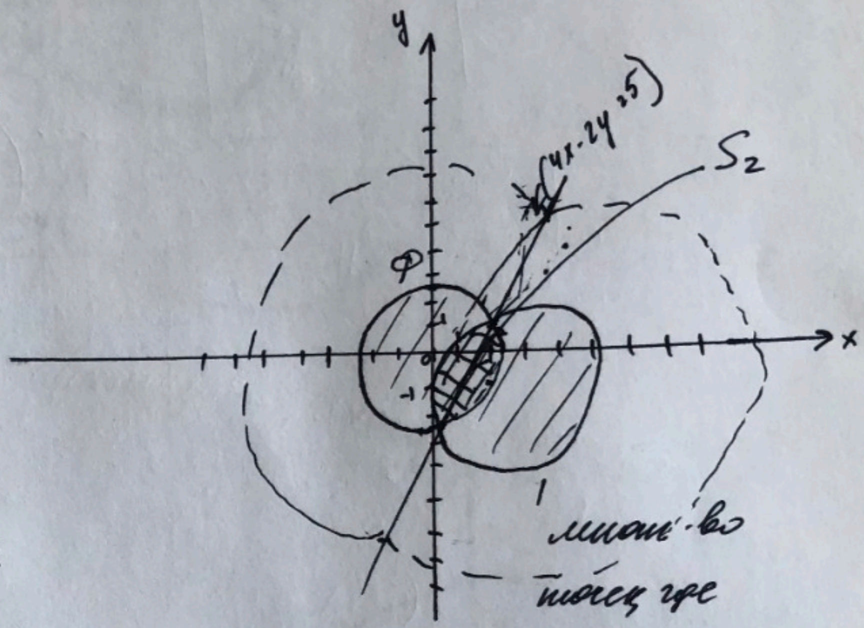
2). если $4a-2b>5$

$\Downarrow$

$a^2+b^2 \le 5.$

(окр-ть с центром $(0,0)$, $r=\sqrt{5}$. (круг))

$\begin{cases}4a-2b=5 \\ a^2+b^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-4a+b^2+2b=0. \\ (a-2)^2+(b+1)^2=5.\end{cases}$



множ-во точек где могут лежать центры окр-ти ω.

~~м.к~~

от каждой точки этой фигуры Φ можно построить окружность ω, след-но множество точек (x,y) будут лежать внутри фигуры очерченной пунктиром. от каждой точки фигуры Φ от т. $(0,0)$ или т. $(2,-1)$ откладываем расстояние $2\sqrt{5}$.

(т.к фигура Φ сим-на от-но прямой $4x-2y=5$, то достаточно посчитать лишь площадь фигуры, образованной кругом $\left(\begin{cases}x^2+y^2 \le (2\sqrt{5})^2 \\ 4x-2y=5\end{cases}\right)$

1). $S=\pi r^2 = 20\pi.$

$40\pi - S_2 = S_{иск}.$

$a_1 = -100$. $S = -100 + 21 = -79$. $-100+6=$

$-100+11 = -89$.

$a_7 \cdot a_{12} = -94 \cdot (-89)$

$(a_1+5)^2 < 18$.

$|a_1+5| < \sqrt{18}$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 > -5 \\ a_1+5 < \sqrt{18} \end{cases} \\ \begin{cases} -a_1-5 < \sqrt{18} \\ a_1 < -5 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 > -5. \\ a_1 < \sqrt{18}-5. \\ a_1 > -5-\sqrt{18}. \\ a_1 < -5. \end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -4, -3, -2 \\ -6, -7, -8, \end{array}\right.$

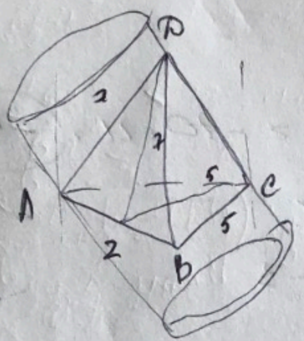
$-a_1 - 5$

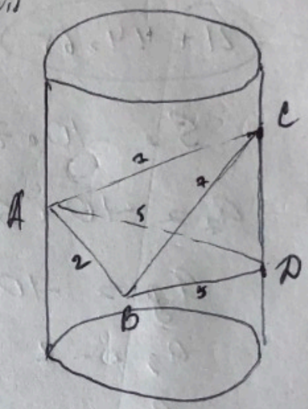
$\sqrt{25}$ -1. $-5-4 > -5-\sqrt{18}$.

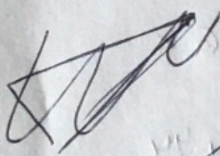
$-4 < -\sqrt{18}$.

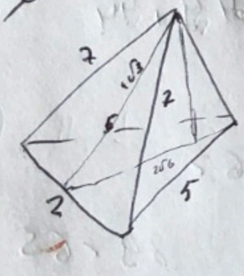
$4 > \sqrt{18}$

№2









$S = \sqrt{8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6} = 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h$.

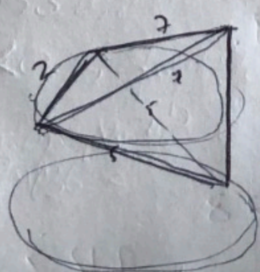
$p = 7+1 = 8$ $h = 4\sqrt{3}$ Rаше²

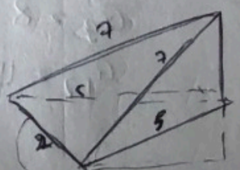
$p = 5+1 = 6$

$S = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4} = 2\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2$,

$2 \cdot 3$ $2 \cdot 2$

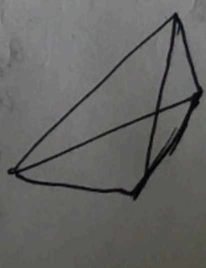
$h = 2\sqrt{6}$.





$R_{\text{опис}}(\cos\alpha) = R$.

$R_{\text{опис}}(\cos\alpha+\beta) = R$.



Еш $-1 \vee \sqrt{17} - 5$

$4 \vee \sqrt{17}$

-1 S_2

a_2 2

$-9 \vee -5 - \sqrt{18}$

$-4 \vee \sqrt{18}$ $4 < \sqrt{18}$

$-4 < -\sqrt{18}$ $-4 > -\sqrt{18}$

$+25 - 18$

7

$a_1 = 0$. $S = 21$.

$a_7 \cdot a_{12} = 6 \cdot 11 = 66 > 41$

$a_7 \cdot a_8 = 7 \cdot 8 = 63 < 65$.

$21 + 44 = 65$

$a_1 = -10$. $S = -10 \cdot 7 + 21 = -70 + 21 = -49$.

$a_7 = -10 + 6 = -4$. $-4 > -49 + 20$.

$a_8 = -10 + 7 = -3$ $-3 \cdot -2 = 6 <$

$a_9 = -2$

$a_{12} = -10 + 11 = 1$. $-49 + 44$

$a_1 = 0$. $S = 0+1+2+3+4+5+6 = 21$. $66 >$

$a_7 = 6$ $7 \cdot 8 = \cancel{63}$. $39 < 65$.

$a_8 = 7$ $56 <$

$a_9 = 8$ $a_{10} = 9$.

$a_{12} = 11$. 65.

$a_1 = 1$. $S = 21 + 7 = 28$.

$a_2 = 7$ $7 \cdot 12 > 28 + 20$.

$a_3 = 8$ $72 \neq 28 + 44$

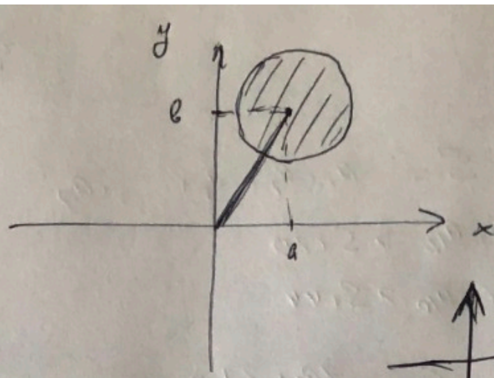
$a_8 = 9$ 72

$a_{12} = 12$.

Черновик

№3.

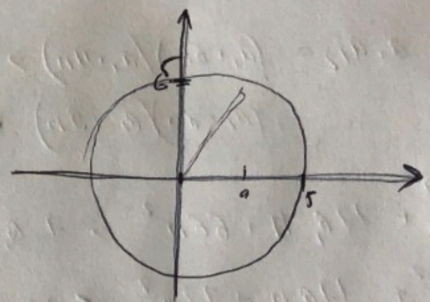
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$



1) $\begin{cases}4a-2b<5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b<5\end{cases}$

$a^2-4a+b^2+2b \le 0.$

$4a<2b+5.$



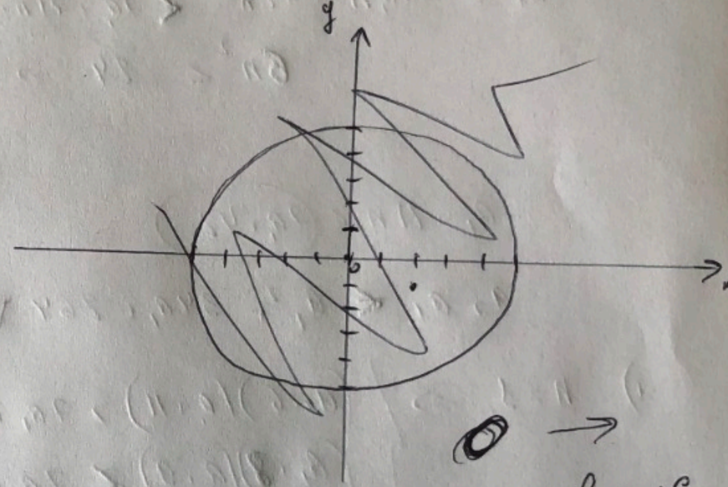
$x^2+y^2 \le 5.$

№1. $a^2+b^2 \le 5.$

$4a-2b<5.$

$b - y$ $\quad 4a<2b+5$

$a - x.$ $\quad \frac{4a-5}{2}<b$



a^2+2b^2-

$a^2-4a+4+b^2+2b+1-5<0.$

$(a-2)^2+(b+1)^2<5.$

$4\cdot 3-8=4$

$4\cdot 4-2\cdot 3=10.$

$\cancel{4a-2b}$

$\frac{4x-5}{2}<y.$

$2x-2{,}5<y.$

$x=$

$4a-2b<5.$

$a=2$

1) $4a-2b>5.$

$a^2+b^2 \le 5.$

$r=2{,}5$

$a^2+b^2=2{,}5.$

$2{,}1{,}5$

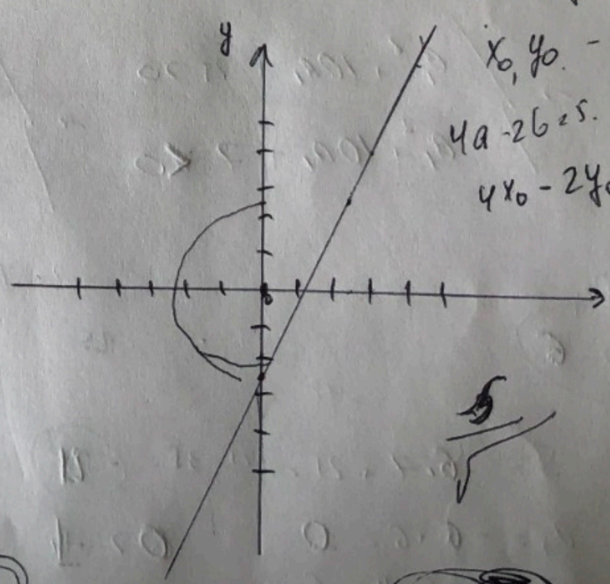
$4+2{,}25=6$

$ax+by_0+c$

$x_0, y_0 - 0{,}0$

$4a-2b=5.$

$4x_0-2y_0-5.$



Черновик

№1.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7.$

$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_9 a_{10} > S + 44$

$S = 7a_1 + 21n.$

$a_7 = a_1 + 6n$

$a_2 = a_1 + n.$

$n + 2n + 3n + \dots + 6n = 21n$

$a_1 = -1.$

$S = -7 + 21 = 14.$

$a_7 \cdot a_{12} = 5 \cdot 10 = 50.$

$50 > 14 + 20$

$n \in \mathbb{Z}$ $n > 0$

$a_7 = 6$ $a_{12} = 7.$

$6 \cdot 7 \vee 14 + 44.$

$a_7 a_{12} = (a_1 + 6n)(a_1 + 11n) > 7a_1 + 21n + 20$

$(a_1 + 8n)(a_1 + 9n) < 7a_1 + 21n + 44.$

$6 + 11 = 17$

$8 + 9 = 17.$

$66 \cdot 4 = 240 + 24$

$a_1^2 + 17a_1 n + 66n^2 > 7a_1 + 21n + 20$

$a_1^2 + 17a_1 n + 72n^2 < 7a_1 + 21n + 44.$

$n > 0$, т.к возраст.

$6n^2 < 24 \Rightarrow n^2 < 4.$

$n < 2.$

$n = 1$

$7a_1 + 21n < 7a_1 + 42$

$a_7 \cdot a_{12} < a_1^2 + 34a_1 + 264$

$66 - 41 = 25$

$72 - 65 = 7.$

1) $n = 1. \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 6)(a_1 + 11) > 7a_1 + 41. \\ (a_1 + 8)(a_1 + 9) < 7a_1 + 65. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \text{ при } \forall a \\ (a_1 + 5)^2 - 18 < 0. \end{cases}$

$21 + 44 = 65.$

$72 - 65 = 7.$

$(a_1 + 5)^2 < 18.$

$a_1 + 5 < \sqrt{18}.$

$\sqrt{18}$

$25 - 7 = 18$

25

$a_1 + 5 < 4$

$a < -1.$

$a \neq 5$

Пусть

$a_1 = -6.$

$S = -6 \cdot 7 + 21 = 21 - 35 = -21$

-42

$a_7 = -6 + 6 = 0$

$0 > -1$

$a_{12} = -5 + 11 = 6.$

$a_1 = -9.$

$a_9 = -6 + 8 = 2.$

$a_{10} = -6 + 9 = 3.$

$a_1 = -6 \Rightarrow S = -6 \cdot 7 + 21 = -21$

-42

$44 - 21 = 23$

$-21 + 44$

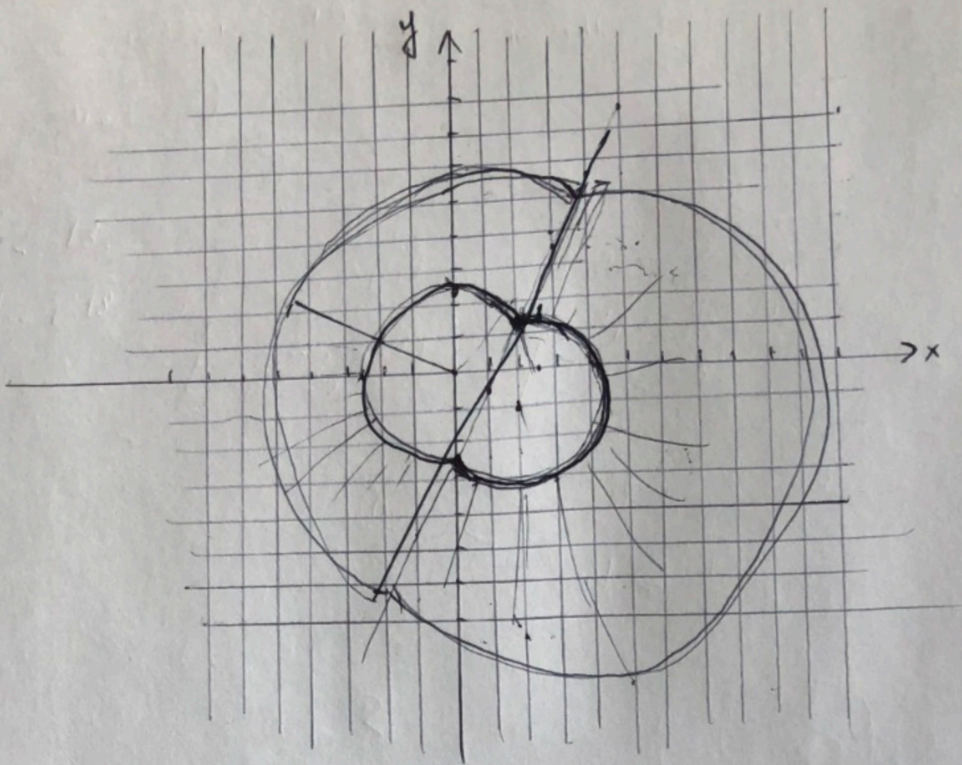
$a_7 = -6 + 6 = 0.$

$-21 + 20 = -1$

$a_7 \cdot a_{12} = 0 > -1.$

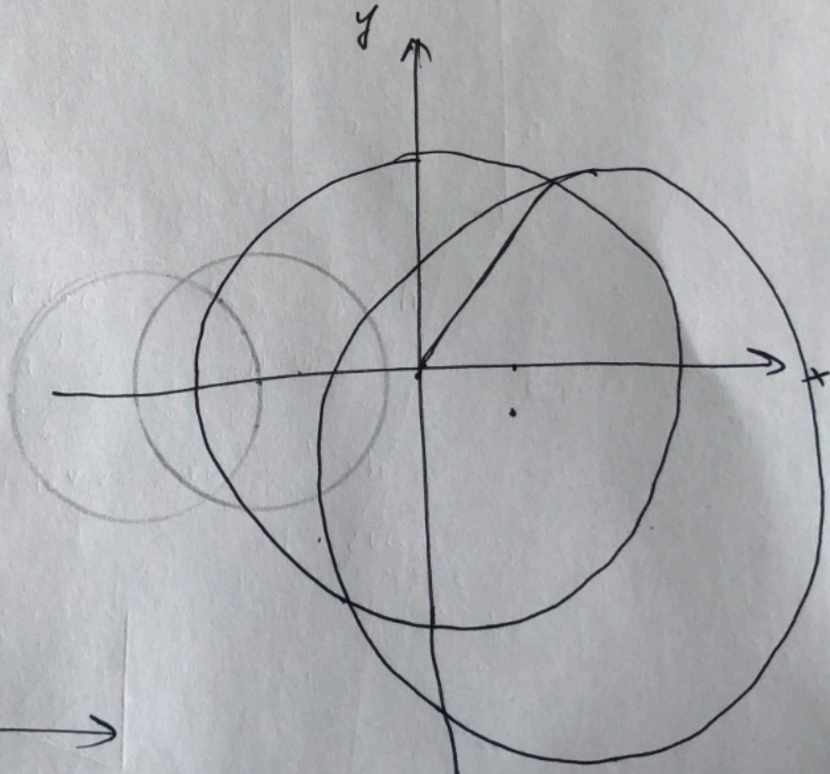
$6 < 23.$

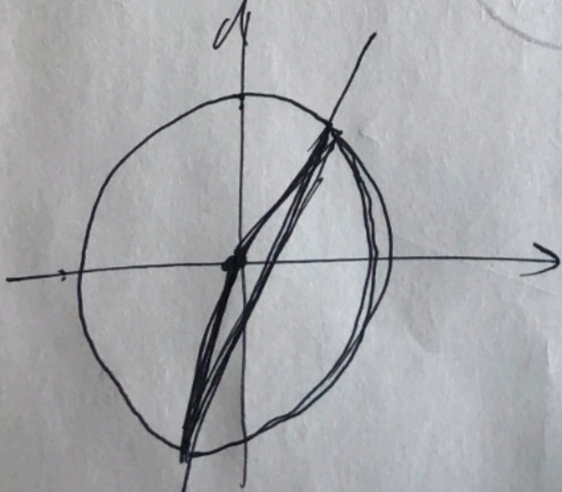
№5.



$4a-2b=5.$

$a^2+b^2 \le 4a-2b=5.$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101458**

ID профиля: **134766**

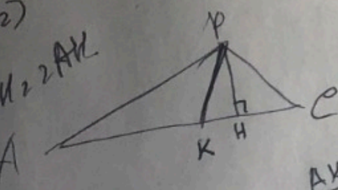
Вариант 18

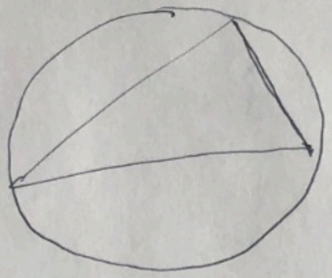
№6.

~~10+4 ... 27~~ (34).

x? ≈ 5,25.

$tg\angle AKP = \frac{PH}{KH} = \frac{1}{2} \Rightarrow KH = 2PH$



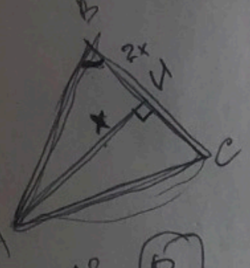


$\frac{1}{2} PH \cdot AK$

$\frac{1}{2} PH \cdot KC$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$.

$tg\angle AKP = \frac{1}{2}$.



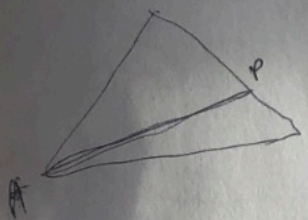
$tg\angle\alpha = \frac{1}{2}$

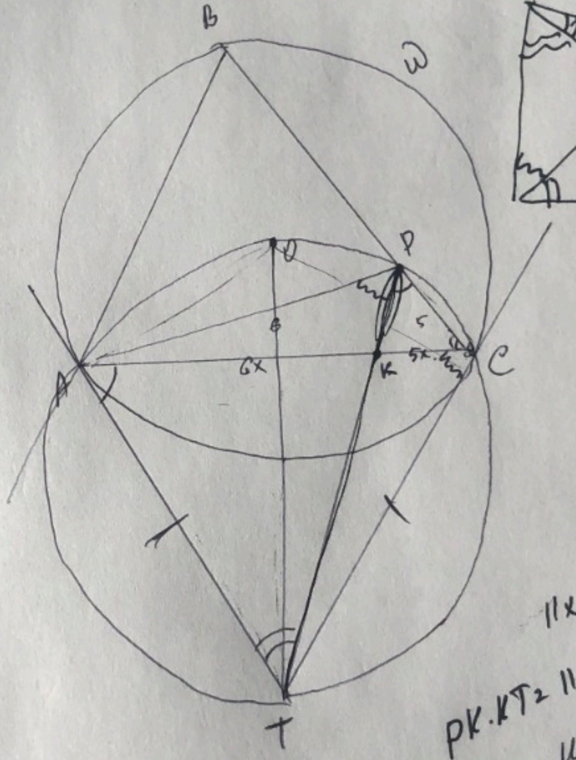
arctg $\frac{1}{2}$.

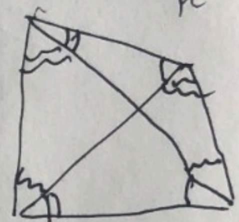
$\frac{AC}{\sin\alpha} = R$.

$S_{AOC} =$

$\frac{BP}{PC}$ - ?







$\Delta ATK \sim \Delta PCK$.

$\Delta AKP \sim \Delta TCK$.

$$\frac{S_{KPC}}{S_{AKT}} = \left(\frac{PK}{AK}\right)^2 = \left(\frac{AT}{PC}\right)^2$$

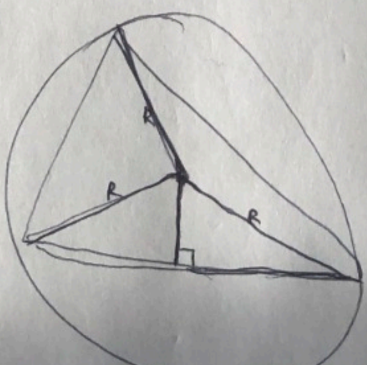
$$\frac{S_{APK}}{S_{KTC}} = \left(\frac{AK}{KT}\right)^2 = \left(\frac{AP}{CT}\right)^2.$$

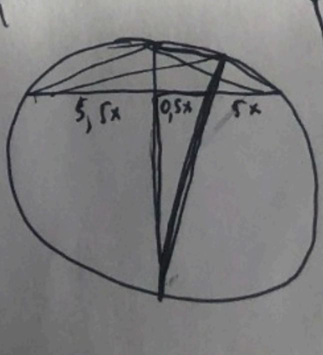
11x

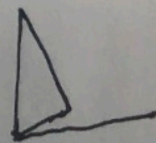
$PK \cdot KT = 11x^2$.

A, O, C, T - лежат на одной окр

A, O, P, C, T - на одной окружн.







№5. Черновик.

a $\quad b \quad c$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \quad \log_{6x-14}(x-1)^2 \quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{(6x-14)}(x-1)^2$ $\quad a = b$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^{ab} = (x-1)^4$

$\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^a = 6x-14$

$(6x-14)^b = (x-1)^2 \Rightarrow \left(\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^{ab} = (x-1)^2\right.$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{ab}{2}} = (x-1)^2$

$\cancel{\sqrt{\frac{x}{3}+3}^{\frac{ab}{2}} = (x-1)}$

$\cancel{\frac{x}{3}+3 = (x-1)^2}$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{ab}{4}} = x-1$

$\cancel{(x-1)^{\frac{4}{ab}}}$

$(x-1)^4 = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{ab}$

$(x-1)^{\frac{4}{ab}} = \frac{x}{3}+3 \Rightarrow c = \frac{4}{ab}$

$ab \cdot \frac{4}{ab} = 4$ $\quad a \cdot b \cdot \frac{4}{ab} = 4$

$a = \frac{4}{ab} \Rightarrow a^2b = 4$

$x \cdot x \cdot (x-1) = 4$ $\quad x^3 - x^2 = 4 \Rightarrow x^3 - x^2 - 4 = 0$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

$(x-2)(x^2+x+2) = 0$

$x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{2x} - 2x^2 - 2x - 4 = x^3 - x^2 - 4 = 0$

$D = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow$ нет реш.

$\cancel{x^2 + x + 0{,}25 = (x+0{,}5)^2}$ $\quad 2 \cdot 0{,}5 \cdot x$

$\Downarrow$

$x = 2$

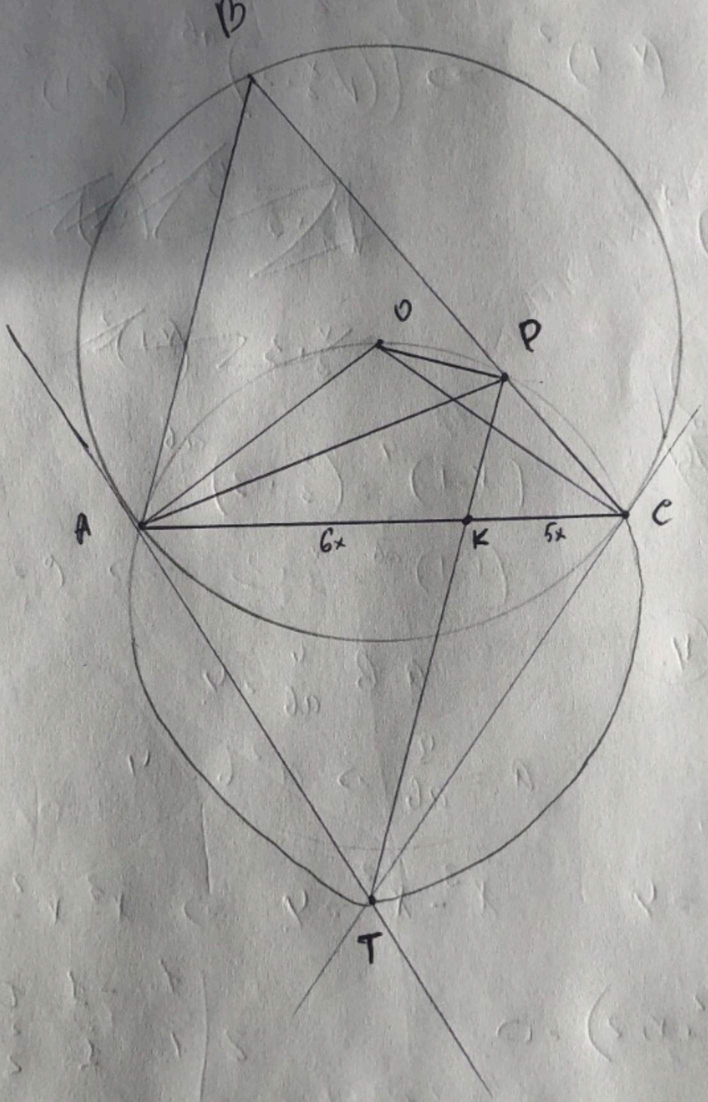
$x_m \quad 2^{-2} \quad x^0$

1) $a = 2 \quad b = 2 \quad c = 1 \Rightarrow$

2) $a = 1. \quad b = 2 \quad c = 2$

3) $a = 2 \quad b = 1 \quad c = 2.$

21101458 (U134766 M1301625)


B
O
P
A
6x
K
5x
C
T

Черновик

1) $x-1 = \frac{x}{3}+3.$ $6\cdot1=5$

$\log_{\sqrt{5}}(22)=2.$

$\frac{2}{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{4\cdot3}{2} = 6$

нет реш.

$\frac{x}{3}+3=5.$ $36-14=22$

– нет реш.

$6x-14 = 36-14 = 22$ $\log_{22}(5)^2 \neq 2.$ $-16x+2x=$

2) $b=2 \Rightarrow \cancel{\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 6x-14}.$

$36x^2-168x+196 = x^2-2x+1.$

$\cancel{\frac{x}{3}+3 = 36x}$ $\cancel{\frac{x}{3}+3}$

$140+15$

$\cancel{35x^2-170x+195=0}.$

$2\cdot14\cdot6=84$

28 | 168 42

$35x^2-166x+195=0.$

$49+72=$
$=121.$

$(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3. \Rightarrow x^2-2x+1 = \frac{x}{3}+3 \,|\cdot3$

12 72

$3x^2-6x+3 = x+9.$

$D = 49+4\cdot3\cdot6 = 121$

$3x^2-7x-6=0.$

$x=3$

$x_1 = \frac{7+11}{6} = 3$

$\cancel{\sqrt{1+3} = 2 = 6\cdot3-14}$ верно.

$x_2 = \frac{7-11}{6} = -\frac{2}{3}.$

$(3-1)^2 = 4 = \frac{3}{3}+3 = 4.$

не подх. т.к. $6x-14>0.$

$\frac{3}{3}+3 = 4.$ $6\cdot3-14=4.$ $2^1=4$ – неверно.

18

$(4)^2=4.$

3). $c=2 \Rightarrow x=3$ $a=2.$ $4=4.$

$(4)=4.$ $\Rightarrow$ верно.

Ответ $x=3$

№4.

Черновик.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 15 = 3\cdot 5 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18}. \end{cases}$$

$a = 3^{x_1}\cdot 5^{y_1}$

$b = 3^{x_2}\cdot 5^{y_2}$ $\Rightarrow$ $3^{\min(x_1,x_2,x_3)}\cdot 5^{(\min y_1,y_2,y_3)} = 15.$

$c = 3^{x_3}\cdot 5^{y_3}.$

$3^{\max(x_1,x_2,x_3)}\cdot 5^{(\max x_1,x_2,x_3)} = 3^{15}\cdot 5^{18}.$

$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$. $\frac{1}{1+ctg^2 x}$.

$\min(x_1,x_2,x_3) = 1$ $\min(y_1,y_2,y_3) = 1$ $1 \le x_1, x_2, x_3 \le 15$

$\max(x_1,x_2,x_3) = 15.$ $\max(y_1,y_2,y_3) = 18.$ от 1 до 18

$\Downarrow$

1). $x_1 = 1$, $x_2 = 15$. — x_3 – 15 вар. 13

2) $x_1 = 1$, $x_3 = 15$ — 15 13

3). $x_1 = 15$, $x_3 = 1$ 15 13

4) $x_1 = 15$, $x_2 = 1$ 15 13

5) $x_2 = 15$, $x_3 = 1$ 15 13

6). $x_2 = 1$; $x_3 = 15$. 15. 13 все разл

7). $x_1 = 1$ $x_2 = 15$ $x_3 = 1$.

8) $x_1 = 1$ $x_2 = 15$ $x_3 = 15$. — два одинак

9). $x_1 = 1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 15$.

10). $x_1 = 15$ $x_2 = 15$ $x_3 = 1$

11) $x_1 = 15$ $x_2 = 1$ $x_3 = 15$

12). $x = 15$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$.

1) 17 16

2) 17 16

3) 17 16

4) 17 16

5) 17 16

6) 17 16.

$16\cdot 6 + 6 = 102.$

96

+6.

$6\cdot 17 = 102.$

$13\cdot 6 + 6 = 6\cdot 14 = 84.$

$13\cdot(102) + 13\cdot(102)$

$84\cdot 102 = 100\cdot 84 + 168 = 8568$

8400

21101458 (U134766 M1301625)

Чистовик

№4.

①

$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 3\cdot 5 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$

Пусть $a = 3^{x_1}\cdot 5^{y_1}$

$b = 3^{x_2}\cdot 5^{y_2}$

$c = 3^{x_3}\cdot 5^{y_3}$

(эти числа имеют такой расклад на множители, т.к. в НОК других простых чисел кроме 3 и 5 нет, $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0$, $\in \mathbb{Z}$)

если $НОД(a,b,c) = 3\cdot 5 \Rightarrow \min(x_1, x_2, x_3) = 1$

$\min(y_1, y_2, y_3) = 1$.

$НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \Rightarrow \max(x_1, x_2, x_3) = 15$

$\max(y_1, y_2, y_3) = 18$.

$\Rightarrow$ какие-то два ~~одно~~ из x_1, x_2, x_3 - равно 1 и 15, какие-то два ~~одна~~ из y_1, y_2, y_3 равно 1 и 18.

Тогда всего возможны след. вар-ты:

1). все x_i - различны,

1). $x_1 = 1$, $x_2 = 15$, x_3 - любое от 2 до 14
13 вар-ов.

2). $x_1 = 1$, $x_3 = 15$, x_2 - любое от 2 до 14
13 вар-ов

3). $x_1 = 15$, $x_3 = 1$ - 13 в.

4). $x_1 = 15$, $x_2 = 1$ - 13

5). $x_2 = 1$, $x_3 = 15$ - 13

6). $x_2 = 15$, $x_3 = 1$ - 13

2). если есть 2 одинаковых

1). $x_1 = 1$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$

2). $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 15$

3). $x_1 = 15$, $x_2 = 15$, $x_3 = 1$

4). $x_1 = 15$, $x_2 = 1$, $x_3 = 15$

5). $x_1 = 15$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

6). $x_1 = 1$, $x_2 = 15$, $x_3 = 1$.

(при одинаковых быть не может)

Итого: всего $13\cdot 6 + 6 = 84$ в-а различных троек (x_1, x_2, x_3)

1). все y_i - различны

1). $y_1 = 1$, $y_2 = 18$, y_3 - любое от 2 до 17
16 в-ов

(далее ан-но как x, только везде 16 в-ов, а не 13).

2). если 2 одинаковых
(такое кол-во вар-ов, как x - 6).

Итого: $16\cdot 6 + 6 = 17\cdot 6 = 102$ различных пар троек (y_1, y_2, y_3)

Тогда всего вар-ов: $84\cdot 102 =$

$= \underset{8400}{84\cdot 100} + 168 = 8568$.

Ответ: 8568.

Чистовик

№5.

(2)

Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=a \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^{a}=6x-14$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=b \Rightarrow (6x-14)^b=(x-1)^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{ab}{4}}=x-1$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=c.$

$\Downarrow$

$c=\frac{4}{ab}.$

~~Заметим, что~~ $a\cdot b\cdot c=a\cdot b\cdot\frac{4}{ab}=4.$

(если $a=0 \Rightarrow 6x-14=1 \Rightarrow 6x=15 \Rightarrow x=\frac{5}{2}. \Rightarrow$ 1). либо $\begin{cases}6x-14=(x-1)^2\\ \frac{x}{3}+3=x-1.\end{cases}$

1). $\frac{2}{3}x=4 \Rightarrow x=6$, но $x=\frac{5}{2} \Rightarrow$ противор.

2). либо $\begin{cases}(x-1)^2=1\\ x-1=\frac{x}{3}+3\end{cases}$

2). $(x-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$, но $x=\frac{5}{2} \Rightarrow$ противор.

3). $\frac{x}{3}+3=1$ — невозм. т.к. $x=-6$, тогда $6x-14<0$ $\Downarrow$ противор.

$\Downarrow$

$a\neq0.$

если $b=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right. \Rightarrow$ 1). $6x-14=1 \Rightarrow x=2,5 \Rightarrow$ противор.

2). $\frac{x}{3}+3=1 \Rightarrow \frac{x}{3}=-2 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow$ против.

3). $\begin{cases}6x-14=(x-1)^2\\ x-1=\frac{x}{3}+3\end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}x=4 \Rightarrow x=6 \Rightarrow$ против.

$\Downarrow$

$b\neq0$).

Пусть какие-то 2 числа a,b,c равны x, другое — $x-1$, откуда

$x\cdot x\cdot(x-1)=4 \Rightarrow x^3-x^2-4=0$

$(x-2)(\underbrace{x^2+x+2}_{\text{нет реш } D=-7<0})=0 \Rightarrow x=2.$

$\Downarrow$

1). $a=2,\ b=2,\ c=1$

2). $a=1,\ b=2,\ c=2$

3). $a=2,\ b=1,\ c=2.$

1). $c=1 \Rightarrow x-1=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=6 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^2=5=6x-14=36-14=22 \Rightarrow$ противоречие

2). $c=2 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow 3x^2-7x-6=0$ $x_1=3$, $x_2=-\frac{2}{3}$ — не подх, тк $6x-14>0$

$\sqrt{\frac{x}{3}}+2\neq6x-14=4 \Rightarrow$ противоречие

Чистовик

3

3). $c = 2 \Rightarrow x = 3$

$a = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{3}} \cdot 3\right)^2 = 4 = 6x-14 = 4$ - верно

$6x-14 = 4 = (3-1)^2 = 4$. верно $\Rightarrow$ единств. корень, $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

№6.

Заметим, что

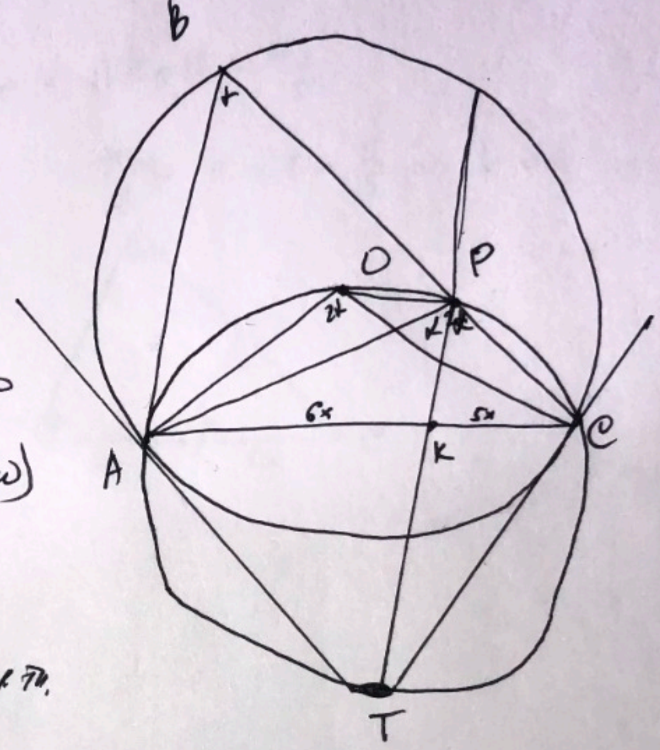
A, O, C, T - лежат на 1-ой окр-ти.

(т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180°$

($\angle OAT = 90°$, т.к. AT - кас-ая к ω)

$\Downarrow$

O, P, C, T, A - принадлежат 1-ой окр-ти.



$S_{APK} = 6$, $S_{PKC} = 5 \Rightarrow AK : KC = 6:5.$, $AK = 6x$, $KC = 5x$

$\triangle ATK \sim \triangle PCK$ (т.к. $\angle ATP = \angle PCA$, $\angle AKT = \angle PKC$ - вертик.)

$TK \cdot KP = AK \cdot KC = 11x^2$.

$S_{\triangle APC} = 11 = 6+5.$, если $\frac{BP}{PC} = k \Rightarrow \frac{S_{BPA}}{S_{APC}} = k \Rightarrow S_{BPA} = 11k$

$S_{ABC} = 11k + 11$.

$\frac{BP}{PC}$ - ?

т.к. $AT = TC$ (т.к. длины кас-ых из одной точки равны) $\Rightarrow$

$\angle APT = \angle TPC = \alpha \Rightarrow \angle APC = 2\alpha \Rightarrow \angle APC = \angle AOC = 2\alpha$

$\angle AOC$ - центральный

$\Downarrow$

$\angle ABC = \alpha$.

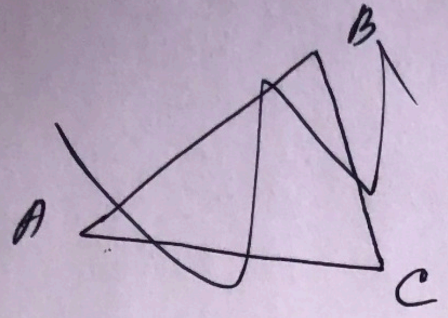
$\triangle PKC \sim \triangle ABC$, т.к. $\angle KPC = \alpha$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle C$ - общий.

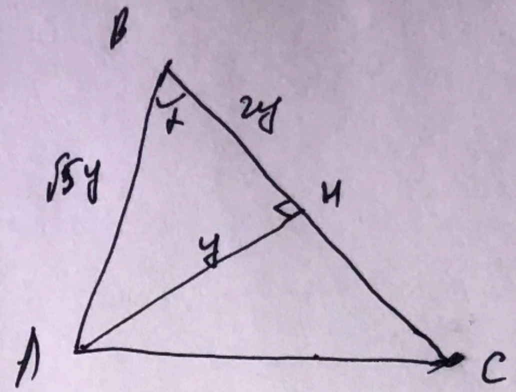
$\frac{KC}{AC} = \left(\frac{5x}{11x}\right)^2 = \frac{S(PKC)}{S(ABC)} \Rightarrow \frac{25}{121} = \frac{5}{S_{ABC}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{121 \cdot 5}{25} = \frac{121}{5}$.

Чистовик

4

б).





$tg \angle B = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 2AH.$

$\frac{11x}{\sin 2\alpha} = R_2.$

$S_{ABC} = 11k + 11 = \frac{121}{5}$

$\frac{11x}{\sin\alpha} = R_\omega.$

$\cancel{11k}\ k + 1 = \frac{11}{5} \Rightarrow k = \frac{11}{5} - \frac{5}{5} = \frac{6}{5}.$

$\cancel{\frac{BP}{PC}}$