Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101240**

ID профиля: **312555**

Вариант 18

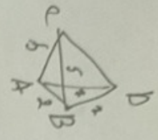
Черновик №1

$S = \frac{a_1+6d+a_1}{2}\cdot 7 = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7 = 7a_1+21d = S$

$a_7 = a_1+6d \quad a_{12} = a_1+11d$

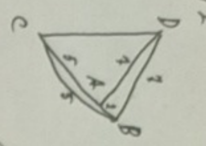
$a_7\cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_1^2+17a_1d+66d^2 = a_7\cdot a_{12}$

$a_9\cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2+17a_1d+72d^2 = a_9\cdot a_{10}$



$a_7a_{12} > S+20$; $a_9a_{10} < S+44$

$+\begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2 > 7a_1+21d+20 \\ a_1^2+17a_1d+72d^2 < 7a_1+21d+44 \end{cases}$

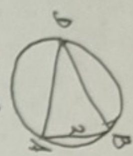


№2

$\cancel{a_1^2}+\cancel{17a_1d}+66d^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+44 > \cancel{7a_1}+\cancel{21d}+20+\cancel{a_1^2}+\cancel{17a_1d}+72d^2$

$66d^2+24 > 72d^2 \quad 24 > 6d^2 \quad 4 > d^2$

$7\cos\alpha = 5\sin\beta$



Так как $d\in Z$; $d>0$, то $d=1$.

$S = 7a_1+21$

$a_7 = a_1+6$

$a_{12} = a_1+11$

$a_9 = a_1+8$

$a_{10} = a_1+9$

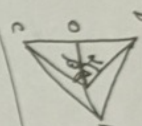
$(a_1+6)(a_1+11) = a_1^2+17a_1+66$

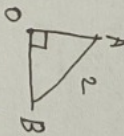
$(a_1+8)(a_1+9) = a_1^2+17a_1+72.$

$a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+\overset{41}{21+20}$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1 \neq -5$





$OB = OA = \sqrt2.$

$OB = OA = 7\cos\alpha.$

$\sqrt2 = 7\cos\alpha \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt2}{7} \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{49-2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}. \quad OD = \sqrt{47}$

$OB = OA = 5\cos\beta. \quad \sqrt2 = 5\cos\beta. \quad \cos\beta = \frac{\sqrt2}{5}. \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{23}}{5}. \quad OC = \sqrt{23}.$

$CD = \sqrt{23}+\sqrt{47}.$

$(x-a)(x-b)^2 \leq 5 \rightarrow$ окр $R = \sqrt5$, $O(a;b)$.

$a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+\underset{65}{21+44}.$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D: 100-28 = 72 = (6\sqrt2)^2$

$a_1 = \frac{-10\pm6\sqrt2}{2} = \pm3\sqrt2-5.$

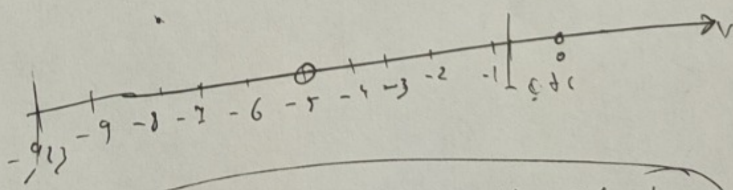
$\sqrt2 \approx 1{,}41$

$a_{11} = \overset{4{,}23}{3\cdot1{,}41}-5 = -0{,}77$

$a_{12} = -3\cdot1{,}41-5 = -9{,}23$

$a_1\in(-9{,}23;\ -0{,}77)$, $a_1\neq -5.$

$2R = \frac{AB}{\sin\angle AOB} \Rightarrow \sin\angle AOB \rightarrow 1.$



$-9;\ -8;\ -7;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1.$

Черновик.

$b=2a-2,5$

$a^2+b^2=5$

№3.

$a^2+4a^2-10a+6,25=5.$

$5a^2-10a+1,25=0.$

$\cancel{25a^2-50a+1}$

$20a^2-40a+5=0$

$4a^2-8a+1=0.$

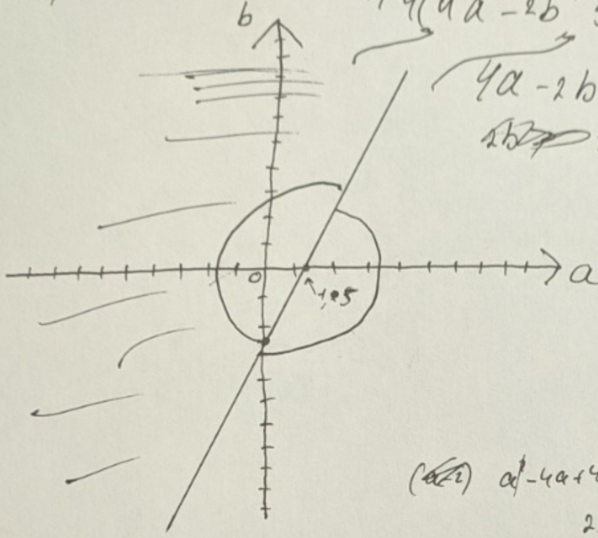
$D=64-4\cdot4=48.$

$a=\frac{8\pm4\sqrt3}{8}.$

$a=1\pm\frac{\sqrt3}{2}$ (0,86)

1,86; 0,14.

$\cancel{a^2+b^2\geq1}$ $a^2+b^2\leq\min(4a-2b;5)$



$4a-2b<5.$

$\cancel{2b>}$ $2b>4a-5$

$b>2a-2,5.$

Если $4a-2b<5$, то

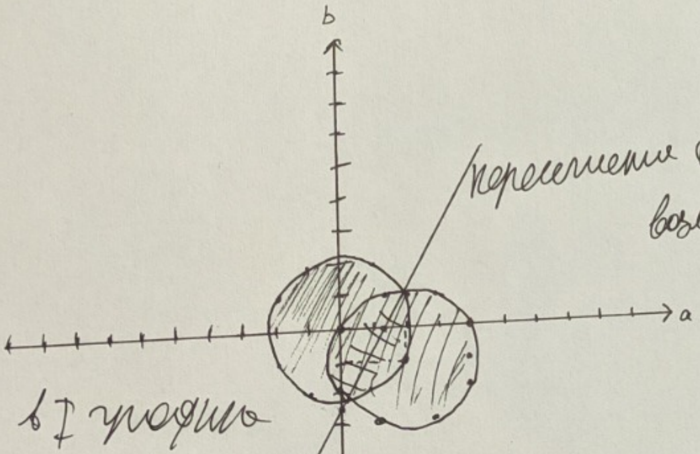
$a^2+b^2\leq4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1\leq5.$

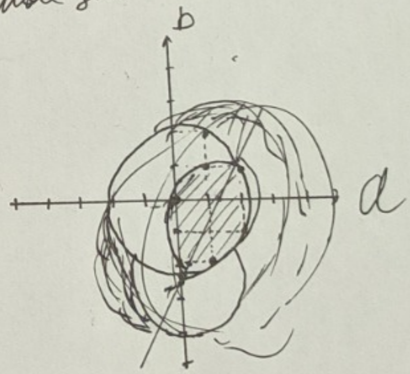
$(a-2)^2+(b+1)^2\leq5.$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1=a^2+b^2$

$2b+5-4a=0$ $4a-2b=5.$



пересечение окружностей и есть возможные значения



Раз в I квадранте $X=a$ $y=b$, то Тот не имеет центр окружности-

$y=2x-2,5.$

$y=0,5x$

$0,5x=2x-2,5$ $2,5=1,5x.$

$5=3x$ $x=1\frac{2}{3}$

$y=3\frac13-\frac52=\frac{10}{3}-\frac52=\frac{20-15}{6}=\frac56$

$R=\sqrt5+\sqrt{\left(\frac53\right)^2+\left(\frac56\right)^2}=\sqrt5+\sqrt{\frac{100+25}{36}}=\sqrt5+\frac{5\sqrt5}{6}=\frac{11\sqrt5}{6}$

$\frac{10}{6}$

$S=\pi R^2=\frac{\pi\cdot121\cdot5}{36}=\frac{\pi\cdot605}{36}$

Чистовик. (Вариант 18)

№1.

1) $S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$. $a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$. ~~$S+20 = a_1+6d+20$;~~ ~~$S+44 = a_1+6d+$~~

$S = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7(a_1 + 3d) = \underline{7a_1 + 21d}$. $\underline{S+20 = 7a_1+21d+20;\ S+44 = 7a_1+21d+44.}$

2) (a_n) ÷ состоит из целых чисел $\Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$.

Она возрастает $\Rightarrow d > 0$. $\begin{cases} d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d \in \mathbb{N}$.

3) $a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$. $a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_1^2 + 6a_1d + 11a_1d + 66d^2 =$

$a_{12} = a_1 + (12-1)d = a_1 + 11d$. $= \underline{a_1^2 + 17a_1d + 66d^2}$.

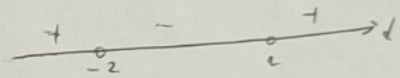
4) $a_9 = a_1 + (9-1)d = a_1 + 8d$. $a_9 a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2 + 8a_1d + 9a_1d + 72d^2 =$

$a_{10} = a_1 + (10-1)d = a_1 + 9d$. $= \underline{a_1^2 + 17a_1d + 72d^2}$.

5) $\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ S+44 > a_9 a_{10} \end{cases}$ Подставим: $\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ 7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 \end{cases}$ Сложим левые и правые части неравенств:

$\underline{a_1^2} + \underline{17a_1d} + 66d^2 + \underline{7a_1} + \underline{21d} + 44 > \underline{7a_1} + \underline{21d} + 20 + \underline{a_1^2} + \underline{17a_1d} + 72d^2$.

$66d^2 + 44 > 20 + 72d^2$. $6d^2 < 24$. $d^2 < 4$. $d^2 - 4 < 0$. $(d-2)(d+2) < 0$.



$d \in (-2; 2)$.

Учитывая, что $d \in \mathbb{N}$ (п.2), получим, что $\underline{d = 1}$.

6) $a_7 \cdot a_{12} = a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 = a_1^2 + 17a_1 + 66$. $a_7 a_{12} > S+20$; $a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41$.

$S+20 = 7a_1 + 21d + 20 = 7a_1 + 41$.

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$.

$(a_1+5)^2 > 0$. Квадрат $\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1+5)^2 \neq 0$. $a_1 + 5 \neq 0$. $\underline{a_1 \neq -5.}$

7) $a_9 a_{10} = a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 = a_1^2 + 17a + 72$. $a_9 a_{10} < S+44$; $a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65$.

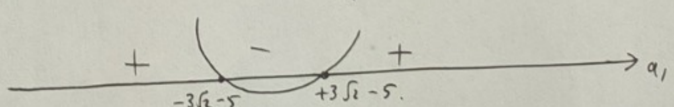
$S+44 = 7a_1 + 21d + 44 = 7a_1 + 65$.

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$. $y = 0$ $y = a_1^2 + 10a + 7$

$a_1^2 + 10a + 7 = 0$

$D = 100 - 28 = 72$

$a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = \pm 3\sqrt{2} - 5$.



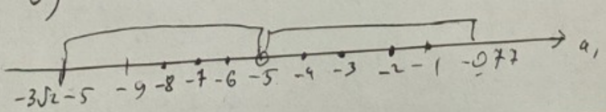
$a_1 \in (-3\sqrt{2} - 5; 3\sqrt{2} - 5)$.

Оценим границы: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

$-3\sqrt{2} - 5 \approx -4{,}23 - 5 \approx -9{,}32$

$3\sqrt{2} + 5 \approx 4{,}23 - 5 \approx -0{,}77$.

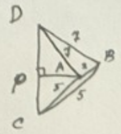
8) $a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_1 \in (-3\sqrt{2} - 5; -5) \cup (-5; 3\sqrt{2} - 5)$

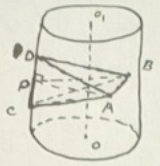


Ответ: $\underline{-9}; \underline{-8}; \underline{-7}; \underline{-6}; \underline{-4}; \underline{-3}; \underline{-2}; \underline{-1}$.

Чистовик. (Вариант 18)

№2





Дано: тетраэдр ABCD, $AB = 2$; $AC = CB = 5$; $AD = DB = 7$. ABCD вписан в цилиндр так, что все его вершины лежат на боковой поверхности, CD парал. оси цилиндра (OO_1), R цилиндра — наименьший.

Найти: CD.

Решение:

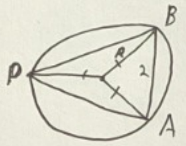
1) $C, D \in$ б.п.; $CD \parallel OO_1 \Rightarrow CD \in$ б.п. ~~(Вся прямая — образующая)~~ (в прямую CD входит образующая).

боковая поверхность

2) В $\triangle ADC$ AP — высота (доп. постр.) Т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$ (по 3-м сторонам), то BP — высота $\triangle BDC$.

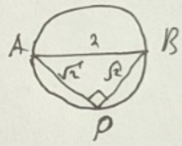
3) $AP, BP \perp CD \Rightarrow (APB) \perp CD$ (по призн. $\perp$ пр. и плоск.); $CD \parallel OO_1 \Rightarrow (APB) \perp OO_1$.

4) $(APB) \perp OO_1 \Rightarrow (APB) \parallel$ основаниям цилиндра. Значит, $\triangle APB$ вписан в ω, у которого $R = R$ цилиндра.



~~5)~~

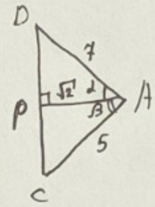
5) $2R = \dfrac{AB}{\sin\angle APB}$ (следствие теоремы sin). Если R — наименьший, а AB — постоянно, значит $\sin\angle APB$ — наибольший. $\sin\angle APB \in (0;1] \Rightarrow \sin\angle APB = 1 \Rightarrow \angle APB = 90°$.
($\angle APB \in (0°; 180°)$)



6) PA, PB — проекции DB, DA на плоскость (PAB); $DA = DB \Rightarrow PA = PB$.

7) $AB^2 = AP^2 + BP^2$ (по т. Пифагора). $AB^2 = 4$.

$4 = AP^2 + AP^2$. $AP^2 = 2$. $AP = \sqrt{2}$; $BP = \sqrt{2}$
или
$AP = -\sqrt{2}$ (невозможно)



8) Рассмотрим $\triangle ADC$.

Пусть $\angle DAP = \alpha$; $\angle CAP = \beta$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{PA}{AD} = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Основное тригон. тожд.)

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{47}{49}} = \dfrac{\sqrt{47}}{7}$.

$\sin\alpha = \dfrac{DP}{AD}$. $DP = AD\sin\alpha = 7\cdot\dfrac{\sqrt{47}}{7} = \sqrt{47}$.

$\cos\beta = \dfrac{PA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$. $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$. $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{\dfrac{23}{25}} = \dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

$\sin\beta = \dfrac{PC}{AC}$. $PC = AC\sin\beta = 5\cdot\dfrac{\sqrt{23}}{5} = \sqrt{23}$.

9) $CD = PC + PD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

Ответ: при наименьшем R цилиндра, $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

2

Чистовик (Вариант 18)

№3.

$$\begin{cases} ① (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ ② a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5) \end{cases}$$

$\leftarrow \omega$ с ц. в т. $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{5}$ (круг – мн-во решений).

1) Когда $4a-2b<5$? $4a-2b<5$. $4a-5<2b$. $\underline{b>2a-2{,}5}$.

2) Если $4a-2b<5$, то

$a^2+b^2 \le 4a-2b$. $a^2-4a+4-4+b^2+2b+1-1 \le 0$. $(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$.

~~ω с ц. в т. $(2;-1)$~~

3) Если $4a-2b>5$, то

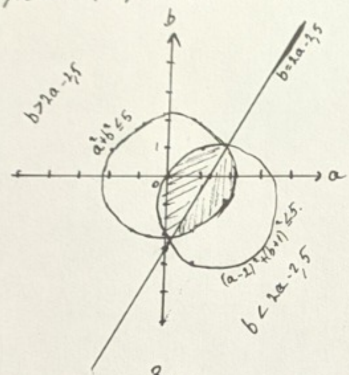
$a^2+b^2 \le 5$.

4) Построим график ②-го неравенства в системе координат $b(a)$.

$a^2+b^2=(a^2-4a+4+b^2+2b+1$.

$-4a+2b+5=0$

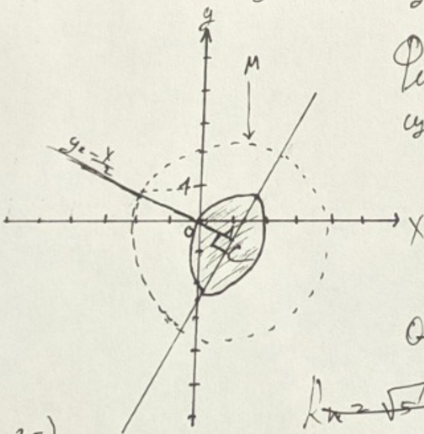
$4a-2b=5 \Rightarrow$ графики окружностей пересекаются на прямой $b=2a-2{,}5$.



Возможные значения a и b лежат в заштрихованных областях.

4) Центр ~~графика~~ окружности 1-го графика – точка $(a;b)$.

Значит, этот центр лежит в такой же области, как заштрихованная, перенесённая на координаты $y(x)$. Построим их:



Фигура M – это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{5}$, центры которых лежат в заштрихованной области.

5) $S_M=\pi R_M^2$. $R_M=\sqrt{5}+OC$. ~~$OC=\sqrt{(0{,}6)^2+(1\frac{2}{3})^2}$~~

M – круг радиуса $(\sqrt{5}+OC)$.

$C(1;-0{,}5)$

~~$OC=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{100+25}{36}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$.~~

~~$R_M=\sqrt{5}+\frac{5}{6}\sqrt{5}=\frac{11\sqrt{5}}{6}$. $S_M=\pi R_M^2=\frac{\pi\cdot 11\cdot 11\cdot 5}{36}=\frac{605\pi}{36}$!~~

~~Ответ: $S_M=\frac{605}{36}\pi$.~~

$OC \perp (y=2x-2{,}5)$

$OC: y=-0{,}5x$

$-0{,}5x=2x-2{,}5$

$2{,}5=2{,}5x$

$$\left.\begin{aligned} x&=1 \\ y&=-0{,}5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(1;-0{,}5)$$

$OC=\sqrt{1+0{,}25}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$R=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}5\sqrt{5}$. $S_M=\pi R_M^2=\pi 2{,}25\cdot 5=\pi\frac{9}{4}\cdot 5=\frac{45}{4}\pi$

Ответ: $S_M=\frac{45\pi}{4}=11{,}25\pi$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101240**

ID профиля: **312555**

Вариант 18

Черновик

$a = 2\log_d e$
$b = 2\log_e f$
$c = \log_f d$

1) $a = b = c+1$ $\log_d e = \log_e f$ $\frac{\log_f e}{\log_f d} = \log_e f$ $\frac{1}{\log_e f} = \log_e f \cdot \log_f d$.

$1 = \log_f d \cdot \log_e^2 f$. $c = 0{,}25 b^2$. $b = (c+1)$.

$3x^2 - 2x = 0$
$x = 0$; $3x \ne 2$
$x \ne \frac{2}{3}$

$c = 0{,}25c^2 + 0{,}5c + 0{,}25$.
$0{,}25c^2 - 0{,}5c + 0{,}25 = 0$ $0{,}25(c-1)^2 = 0$

$\log_d e = 1$ $\log_e f = 1$ $\log_f d = 1$.

$c = 1$. $a = b = 2$.

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$ $5\frac{2}{3}x = 17$ $\frac{17}{3}x = 17$ $x = 3$. $d = \frac{3}{3} + 3 = 4$
$e = 18 - 14 = 4$ Невозможно.
$f = x - 1 = 2$.

2) $a = c = b+1$.
$2\log_d e = \log_f d$. $\log_d e^2 = \log_f d$ $\frac{\log_f e^2}{\log_f d} = \log_f d$. $\log_f^2 d = \log_f e^2$. $c^2 = \frac{2}{b}$.

$b = c - 1$ $b^2 + 2b + 1 = \frac{2}{b}$
$c^2 = \frac{1}{c-1}$ $b^3 + 2b^2 + b - 2 = 0$.
$\boxed{c^3 - c^2 - 1 = 0}$

	1	-1	0	-1
1	1	0	0	-1
-1	1	-2	2	-3
2	1			

$12 \cdot 14 = 140 + 28 = 168$

$168 \cdot 3 = 504$

3) $a + 1 = b = c$
$2\log_e f = \log_f d$. $\frac{\log_e d}{\log_e f} = 2 \cdot \log_e f$ $2\log_e^2 f = \log_e d$.

$\frac{a}{2} = \log_d e$
$\frac{c}{a} = \log_e d$

$36 \cdot 3 = 108$

$\frac{b^2}{2} = \frac{2}{a}$ $b^2 a = 4$
$(a+1)^2 a - 4 = 0$
$a^3 + 2a^2 + a - 4 = 0$.
$a = 1$ подходит.

$(a-1)(a^2 + 3a + 4) = 0$

	1	2	1	-4
1	1	3	4	0

$a = 1$ или $a^2 + 3a + 4 = 0$
$D = 9 - 16$ $\varnothing$

$a = 1$ $b = c = 2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \cancel{(6x-14)} = 1$.

$\cancel{6x - 14 = \sqrt{\frac{x}{3} + 3}}$

$\cancel{36x^2 - 168x + 196 = \frac{x}{3} + 3}$ $\cancel{36x^2 - \frac{503}{3}x + 193 = 0}$.

$e = f$ $6x - 14 = x - 1$ $5x = 13$ $\underline{x = 2{,}6}$

$2 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3} + 3\right)$.

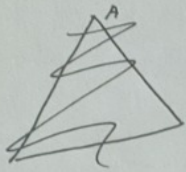
$x - 1 = \frac{x^2}{9} + 2x + 9$. $\frac{x^2}{9} + x + 10 = 0$

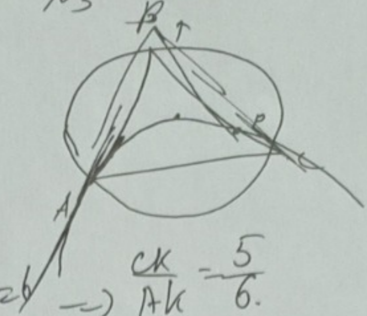
$x^2 + 9x + 90 = 0$
$D = 81 - 360$ $\varnothing$.

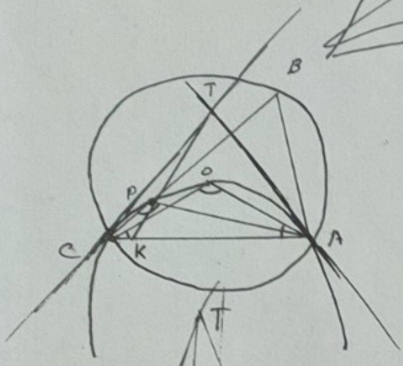
Невозможно.

Черновик

№3

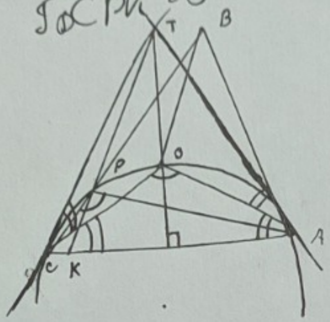


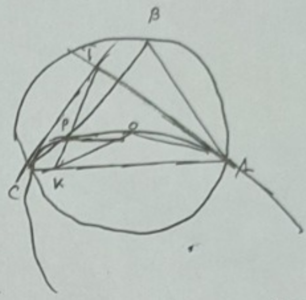




$S_{\triangle APK} = 6 \to \frac{CK}{AK} = \frac{5}{6}.$

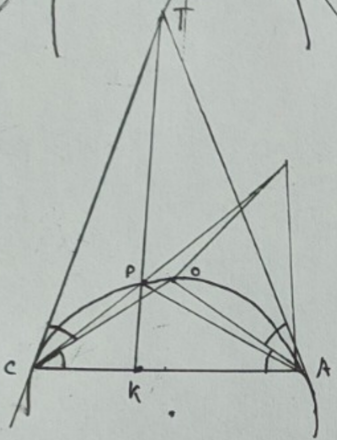
$S_{\triangle CPK} = 5$





O – центр впис. о $\triangle(TCA)$

$S_{CPA} = 11.$



Черновик №2.

$d = \frac{x}{3}+3$

$e = 6x-14$

$f = x-1$

$$\underset{a}{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)} \quad \underset{b}{\log_{6x-14}(x-1)^2} \quad \underset{c}{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{3}+3} > 0 & \frac{x}{3} > -3 & x > -9 \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3} \neq 1 & \frac{x}{3} \neq -2 & x \neq -6 \\ 6x-14 > 0 & 6x > 14 & x > 2\frac{1}{3} \\ 6x-14 \neq 1 & 6x \neq 15 & x \neq 2,5 \\ x-1 > 0 & x > 1 & \\ x-1 \neq 1 & x \neq 2 & \end{cases} \quad x \in \left(2\tfrac{1}{3}; 2,5\right) \cup (2,5; \infty)$$

1) ~~$a = b = c+1$~~.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$. На ОДЗ: $\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)$.

$$\frac{\log_{(x-1)}(6x-14)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = \frac{\log_{(x-1)}(x-1)}{\log_{(x-1)}(6x-14)}.$$

$$\log^2_{(x-1)}(6x-14) = \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right).$$

$\log_f(e) = \log_f d$

$2\log_e f = \log_f d + 1.$

$2\log_e f = \log_f fd.$

~~$\log$~~ $\frac{1}{\log_f}$

$a = \log_{\sqrt{d}} e \qquad b = \log_e f^2 \qquad c = \log_f d$

$2\log_d e \qquad 2\log_e f \qquad \log_f fd.$

1) $a = b = c+1$

$\log_d e = \log_e f = \log_f fd. \qquad \log^2_f e = \log_f d. \qquad \frac{1}{\log^2_e f} = \frac{1}{\log_f fd}$

$\frac{1}{(\log_f d+1)^2} = \frac{1}{\log_f fd} \qquad (\log_f d+1)^2 = \log_f fd \qquad \log^2_f d + 2\log_f d + 1 = \log_f d.$

$\log^2_f d + \log_f d + 1 = 0. \quad D < 0 \Rightarrow$ нет

2) $a = c = b+1.$ $2\log_d e^2 = \log_f fd.$

$\frac{\log_f e^2}{\log_f d} = \log_f fd \qquad \log^2_f d = 2\log_f e^2 = \frac{1}{\log}$

$\log^2_f d = \frac{1}{2\log_e f} \qquad c^2 = \frac{1}{2b}$

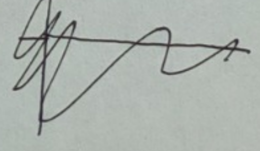
$(b+1)^2 = \frac{1}{2b} \quad 2c-2$

$(c-1)^2 = \frac{1}{2(c-1)}$

$2c^3 - 2c^2 = 1.$

$c^2 = (b+1)^2$ ~~$b^2 = 2b+1$~~

$b^2 + 2b + 1 = \frac{1}{2b}. \qquad 2b^3 + 4b^2 + 2b = 1. \qquad 2b^3 + 4b^2 + 2b - 1 = 0$



Черновик.

$7488+(144+117+9)\times 2=$

~~НОД~~ $НОД(abc)=3\cdot 5$

$НОК(abc)=3^{15}\cdot 5^{18}$

$126+144=170.$

$a,b,c=3^{n}\cdot 5^{m}$, где $n\in[1;15]$ (~~15~~ одно из них вида 15), а $m\in[1;18]$ (одно из них вида 18).

n(a)	m(a)	n(b)	m(b)	n(c)	m(c)
15	18	[1;15]	[1;15]	[1;15]	[1;18]
15	[1;18]	[1;15]	18	[1;15]	[1;18]
15	[1;18]	[1;15]	[1;18]	[1;15]	18
[1;15]	18	15	[1;18]	[1;18]	[1;18]
[1;15]	[1;18]	15	18	[1;15]	[1;18]
[1;15]	[1;18]	[1;18]	[1;18]	15	18

9 расстановок

a	b	c
15/18	-/-	-/-
15/-	-/18	-/-
15/-	-/-	-/18
-/18	15/-	-/-
-/-	15/18	-/-
-/-	15/-	-/18
-/18	-/-	15/-
-/-	-/18	15/-
-/-	-/-	15/-1

Хотя бы в одном числе $n=1$ и в одном $n=15$.

Хотя бы в одном числе $m=1$ и в одном $m=18$.

	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
n	1	2-14	15	1	2-14	15	1	15	2-14	1	15	2-14	.	1	.	.	.	1	1			1		
m	1	2-17	18	1	18	2-17	1	2-17	18	1	18	2-17	.	1	.	.	.	1		1				1

×4 ×4 ×4 ×4

010 010 001 100 001
100 001 010 010 100

×4 ×4 ×4

100 010 001 010 100 001 100 001
100 100 100 010 010 010 001 001

9 вариантов расстановки единицы и на каждую из них – по 4 варианта расстановки 15/18. $9\cdot 4=36.$

На каждую из них ещё по $13\cdot 16=208.$ $208\cdot 36=7488.$

$$\begin{array}{r} 13\\ \times 16\\ \hline 78\\ +13\\ \hline 208 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 208\\ \times 36\\ \hline 1248\\ +624\\ \hline 7488 \end{array}$$

Плюс: варианты, где две 1 или две 15/18.

~~2 1 max?~~

110 101 011
100 100 100 $\}\times 3$

$3\cdot 3\cdot 16=48\cdot 3=144$

100 100 100
110 011 101 $\}\times 3$

$3\cdot 3\cdot 13=39\cdot 3=117$

110 101 011
110 110 110 $\}\times 3$

$3\cdot 3=9$

аналогично для 15/18, то есть $\times 2$.

$7488+2(144+117+9)=7488+340=7828$

Чистовик. (Вариант 18)

№4.

1) $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 3^1\cdot5^1 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$ Значит, каждое из чисел тройки можно представить, как $3^n\cdot5^m$, где $n\in[1;15]$; $m\in[1;18]$; $n,m\in Z$.

При этом хотя бы у одного из чисел $n=1$; $m=1$; $n=15$ и $m=18$.

2) Рассмотрим случай, когда одна $n=1$; одна $n=15$; одна $m=1$; и одна $m=18$. ~~Во каждой~~ В каждой строке должно быть одно число 1.

	a	b	c
n	1	[1;15]	15
m	1	[1;18]	18

пример

Таких вариаций 9. На каждую из них: в каждой строке должно быть максимальное число (15/18); таких вариаций 4.

$9\cdot4 = 36.$

И на каждую из таких вариаций есть $(13\cdot16=208)$ случаев расстановки третьего элемента строки. Таким образом таких комбинаций: $208\cdot36 = \underline{7488}$.

$$\begin{array}{r} 208 \\ \times\ 36 \\ \hline 1248 \\ 624\ \ \\ \hline 7488 \end{array}$$

3) Рассмотрим случаи, когда несколько значений в столбце равны 1 или макс. числу (15/18).

а) две единицы в I строке: $\underbrace{3\cdot3}_{\text{расстановки 1 и max}}\cdot16 = \underline{144}$.

б) две единицы во II строке: $3\cdot3\cdot13 = \underline{117}$.

в) две единицы в обеих строках: $3\cdot3 = \underline{9}$.

$144+117+9=\underline{170}$ — случаев с 2-мя единицами.

г) И столько же (170) случаев для двух max. значений.

д) Три единицы или три max. значения в одной строке быть не могут, т.к. тогда поменяется НОД или НОК.

4) Итого, различных троек $(a;b;c)$: $7488 + 170\cdot2 = 7488+340 = \underline{7828}$.

Ответ: ~~7828~~ $\underline{7828}$ троек.

Чистовик. (Вариант 18).

№5.

Пусть $a = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $b = \log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = c$.

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 & x>-9 \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3} \neq 1 & x \neq -6 \\ 6x-14>0 & x>2\frac{1}{3} \\ 6x-14 \neq 1 & x \neq 2{,}5. \\ x-1>0 & x>1 \\ x-1 \neq 1 & x \neq 2 \end{cases}$

$x \in (2\frac{1}{3}; 2{,}5) \cup (2{,}5; \infty)$.

На ОДЗ $a = 2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$; $b = 2\log_{(6x-14)}(x-1)$.

Пусть $d = \frac{x}{3}+3$; $e = 6x-14$; $f = x-1$, тогда $a = 2\log_d e$; $b = 2\log_e f$; $c = \log_f d$

1) $a = b = c+1$.

$2\log_d e = 2\log_e f$. $\log_d e = \log_e f$. $\frac{\log_f e}{\log_f d} = \frac{1}{\log_f e}$. $\log_f^2 e = \log_f d$. $\frac{1}{\log_e^2 f} = \log_f d$.

Подставим: $\frac{1}{(0{,}5b)^2} = c$ $\frac{4}{b^2} = c$ $b^2 c = 4$ $(c+1)(c+1)c = 4$. $c^3 + 2c^2 + c - 4 = 0$

• если $c = 1$ то $1+2+1-4=0$

$(c-1)(c^2+3c+4) = 0$

$c = 1$ или $c^2+3c+4=0$

$D = 9-16 = -7$.

$\varnothing$

$a = 2$ $b = 2$ $c = 1$

$\log_f d = 1$ $f = d$

$x - 1 = \frac{x}{3}+3$ $\frac{2x}{3} = 4$ $x = 6$ $\in$ ОДЗ

$\cancel{f = 2; d = 2}$

$f = 5$; $d = 5$.

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1$. $6x-14 = \frac{x}{3}+3$.

$36-14 = 5$

$22 = 5$. Противоречие. Такой случай невозможен.