Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

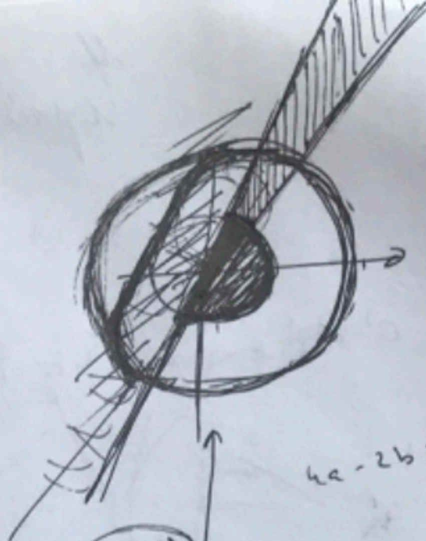
Шифр: **21101225**

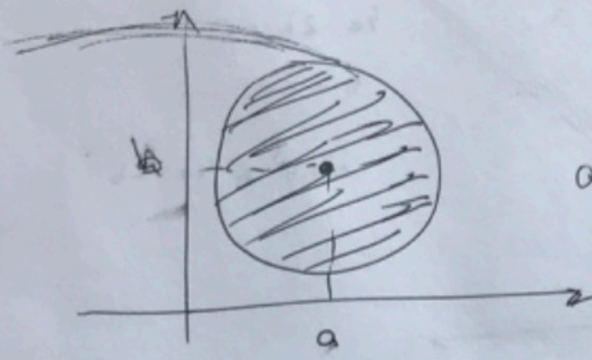
ID профиля: **80337**

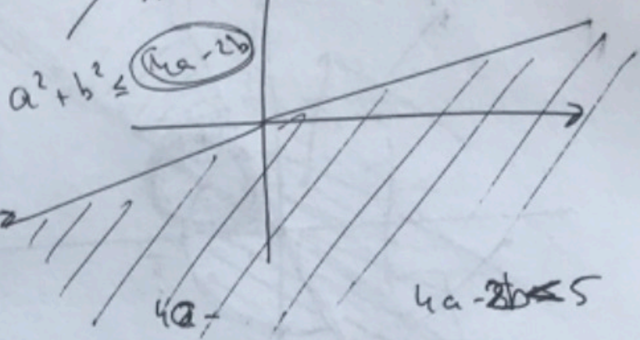
Вариант 18

Черновик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$







$4a-2b>5$

$a=0 \quad b=5$

$0<4a-2b\le 5$

$2b>4a-5$

5

$a>\frac{2b+5}{4}$

$4a-2b>5$

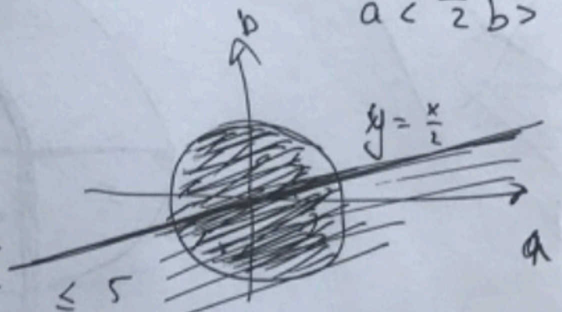
$a<\frac{b}{2} \quad b>\frac{4a-5}{2}$

$a=0 \quad 2b>4a$

$4a-2b<0$

$b>2a$ $<\frac{4a-5}{2}$

$b=-5$



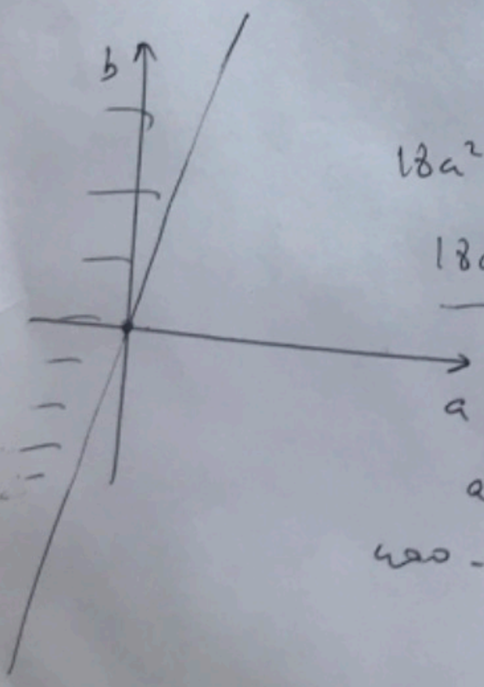
$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2\le 5$

$a^2+\frac{16a^2-40a+25}{2}\le 5$

$b=2a$

$18\cdot 15$

$\min(4a-2b, 5)$



$18a^2-40a+25\le 10$

$\times\begin{array}{r}18\\15\\\hline 90\\18\\\hline 270\end{array}$

$18a^2-40a+15\le 0$

$4a-2b<0$

$a=$

$4a-2b>5$

$4a-2b<0$

$a\in(\ldots$

$400-\quad 190$

$a<\frac{b}{2}$

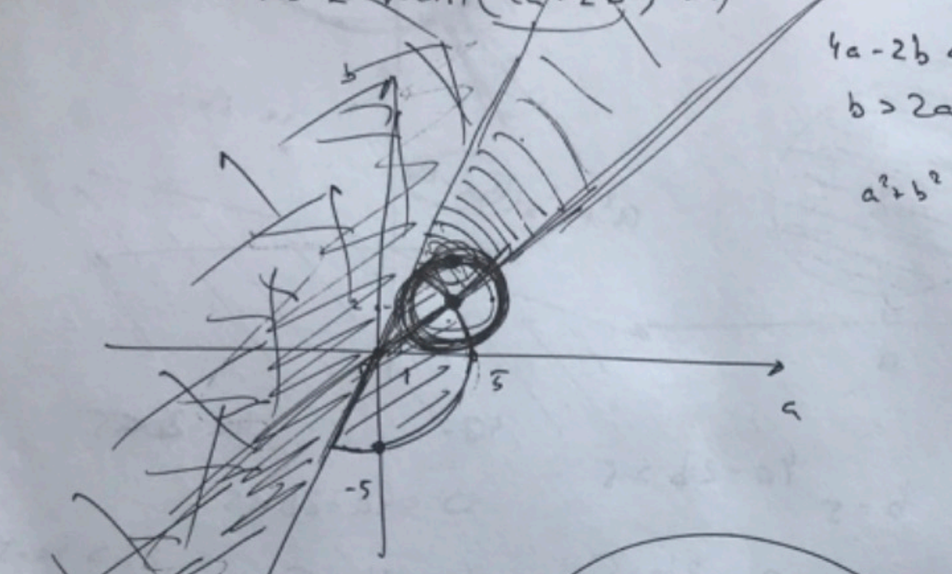
$4a-2b>5$

21101225 (U80337 M1302756)

Черновик

a^2+b^2

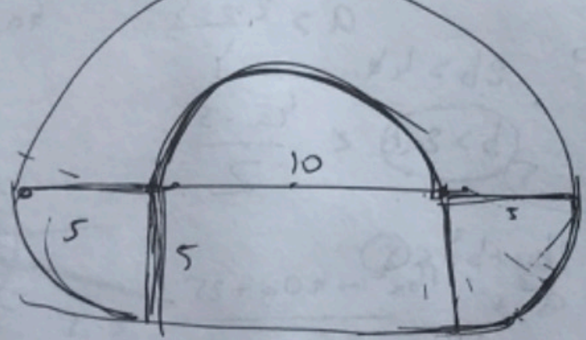
$a^2+b^2 \le \min(4a-2b; 5)$



$4a-2b<0$

$b>2a$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$



$50 + \frac{25\pi}{4} + \frac{100\pi}{2}$

$50 + \frac{225\pi}{4}$

~~4a =~~

$a=5$

$b \; {}^{20}\!\!<5$

21101225 (U80337 M1302756)

Черновик

$S = a_1 + \ldots + a_7$ $\quad 7a_1 + 21d < 7a_1 + 42$

$a_7 a_{12} > S + 20$ $\quad (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20$

$-5 + 3\sqrt{2} > -1$

$a_9 a_{10} < S + 44$ $\quad (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$3\sqrt{2} > 4$

$\underbrace{1+2}_{3} + \underbrace{3+4}_{7} + \underline{5+6}$ $\quad > a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$4 \quad 18 > 16$ $\quad a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

$66d^2 > \cancel{a_1^2 + 17a_1 d + 7a_1 + 21d} + 20$

$\cancel{7a_1 + 21d} + 44 > \cancel{a_1 + 17a_1 d} + 72d_1^2$

$66 - 41 = 25$

$24 > 6d^2$ $\quad -5 + 3\sqrt{2}$ $\quad 3 \cdot 1{,}4$ $\quad 5{,}2$

$72 - 65 = 7$

$d^2 < 4$ $\quad -1$ $\quad -5 - 5{,}2$ $\quad 72 - 65$

$d < 2$

-10 $\quad -5 + 3\sqrt{2}$

$a_1^2 + 34a_1 + 66 \cdot 4 > a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > S + 20$ $\quad 3\sqrt{2} - 5 < 1$

$3\sqrt{2} > 6$

$S + 44 > (a_1 + 8d)(a_1 + 9d)$

$4{,}2$ $\quad 9 \cdot 2 > 36$

$-5 - 3\sqrt{2} > -10$

$-9 \ldots -1.$ $\quad 66 - 41$

$d < 2$ $\quad 25$

$a_1 > 0$ $\quad a_1 = 0$ $\quad d = 1$ $\quad 25 - 7 = 18$

$5 > 3\sqrt{2}$

$(a_1 + 6)(a_1 + 11) > 7a_1 + 41$ $\quad \cancel{100 - 28} = 72$

$25 > 18$ $\quad \cancel{a_1^2 + 10d +}$ $\quad -5 \pm 3\sqrt{2}$

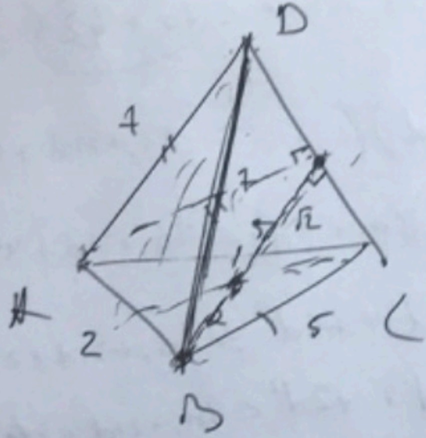
$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 > 0 \end{cases}$$

$-5 - 3\sqrt{2}$

$0 \quad -5 + 3\sqrt{2}$

21101225 (U80337 M1302756)

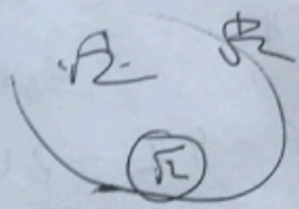
Черновик



$\sqrt{2}^2$

$\sqrt{2+2}$

$\cancel{\frac{7\cdot 5 \sin\alpha}{2}}$ $\frac{35 \sin\alpha}{2} : cd = h$

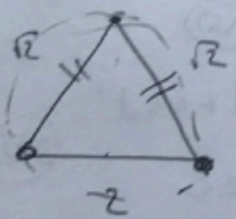


$S = \frac{h \cdot c}{2}$

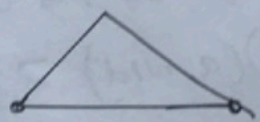
$\frac{2S}{cd} = h$

$25 - 2 = \sqrt{23}$

$49 - 2 = 47 = \sqrt{47} + \sqrt{23}$



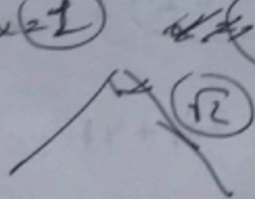
$\alpha = 90^\circ$



$\frac{2}{\sin\alpha} = 2R$ $\alpha = 90^\circ$

$R = 1$ $\frac{2}{\sin\alpha} = 2R$

$\sin\alpha = 1$ $R = 1$



21101225 (U80337 M1302756)

Математика 11 класс.

1

Чистовик. Вариант - 18.

№1.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Решение: $S = a_1 + \ldots + a_7$

разность - d
первый член - a_1

$a_7 a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d)$

$a_9 a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d)$

$S = 7a_1 + 21d$

Имеем:

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \\ S+44 > +(a_1+8d)(a_1+9d)\end{cases}$$

Складываем, ~~получаем~~ и раскрываем скобки, получаем:

$$\cancel{a_1^2+17a_1d} + 66d^2 + \cancel{S} + 44 > \cancel{a_1^2+17a_1d} + 72d^2 + \cancel{S} + 20$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

Т.к. прогрессия возрастающая, то $d > 0$, а также из полученного нер-ва $|d| < 2 \Rightarrow d \in (0; 2)$, т.к. d целое, то $d = 1$.

Тогда исходная система примет вид:

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11) > 7a_1 + 21 + 20 \\ (a_1+8)(a_1+9) < 7a_1 + 21 + 44\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

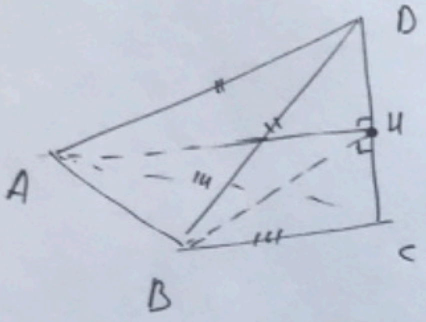
$$\Leftrightarrow a \in (-5-3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5+3\sqrt{2})$$

Т.к. ~~[illegible]~~ $4 < 3\sqrt{2} < 5$, то a_1 принимает значения $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

2

Чистовик. Вариант - 18.

№2.



Дано:

$AB = 2$

$AD = DB = 7$

$AC = CB = 5$

Решение:

Пусть H - основание высоты из B на CD

Заметим, что AH также перпендикулярна CD.

($\triangle ACD = \triangle BCD$ по трем ~~углам~~ сторонам, и отношения $\frac{DH}{HC}$ одинаково в обоих треугольниках).

Заметим, что $(ABH) \perp CD$ и CD полностью лежит на боковой поверхности цилиндра. Тогда $(ABH) \parallel$ основанию цилиндра. Значит окр. описанная около $\triangle ABH$ имеет такой же радиус, что и радиус цилиндра.

Пусть $\angle AHB = \alpha$, тогда по теореме синусов

$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$, R радиус описанной около $\triangle ABH$ окр.

$\frac{2}{\sin\alpha} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sin\alpha}$ в силу того, что $\alpha \in (0; 180)$

и ~~...~~ R минимально, $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$

(так минимальное значение R достигается если синус максимален, в $\angle$ заданном $\max.(\sin) = 1$)

См. на обороте

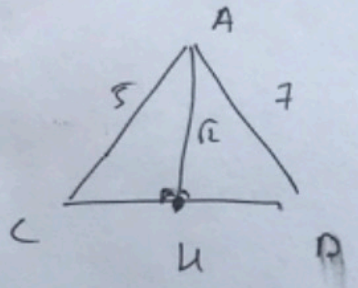
Математика 11 класс

(3) Чистовик. Вариант - 18

Значит $\triangle AKB$ - прямоугольный, а также равнобедренный ($AH = BH$, т.к. $\angle ACD = \angle BCD$), гипотенуза равна двум, значит катеты равны $\sqrt{2}$. $\Rightarrow AH = \sqrt{2}$

Рассматриваем $\triangle ACD$

1)



~~$\angle CAB$ острый~~ $\angle ACD$ острый

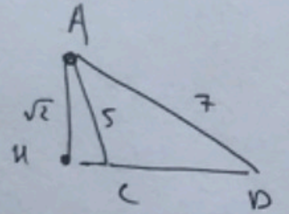
В этом случае

$CH = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$ (т. Пифагора для $\triangle ACH$)

$DH = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$ (т. Пифагора для $\triangle AHD$)

$CD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

2)



$\angle ACD$ тупой

$CH = \sqrt{23}$

$DH = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$.

Отсюда Ответ: $CD = \sqrt{47} \pm \sqrt{23}$.

21101225 (U80337 M1302756)

Чистовик Вариант - 18.

№3.

4 Ответ: $10 + \frac{25\pi}{2}$.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

Первое ур-ие понятное дно окр. с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

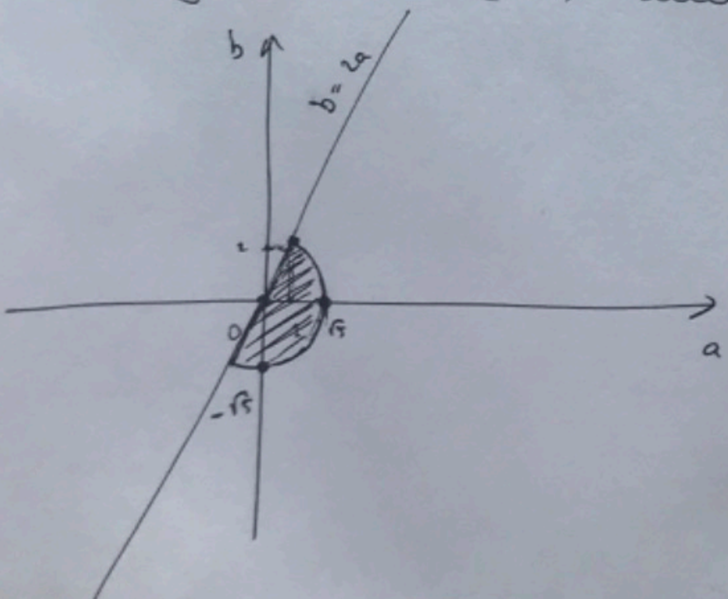
Рассмотрим мн-во точек $(a;b)$, получаемое из 2-го ур-ия.

1° $4a-2b<0$ $\quad b > 2a$ на графике это полуплоскость относительно прямой $b=2a$ (график $b(a)$)

2° ~~$0 \le 4a-2b \le 5$~~ $4a-2b \ge 0$

в этом случае график $b(a)$ для $a^2+b^2 \le \min(4a-2b,5)$ выглядит как ~~к~~руг радиуса ~~...~~ $\sqrt{\min(4a-2b,5)}$ и центром $(0;0)$, который границей совпадает с кругом радиуса $\sqrt{5}$ и центром $(0;0)$

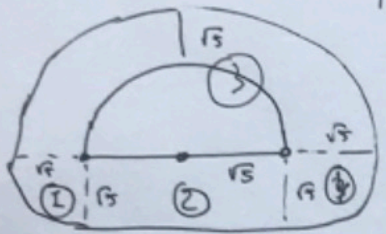
Поэтому мн.-во $(a;b)$ имеет вид:



(5) Чистовик Вариант-18.

Отсюда мн-во $(x; y)$ это „ободок" радиуса $\sqrt{5}$ поверх мн-ва $(a; b)$

Точка M выглядит подобно следующему:



Фигура 1 и 4 это четверти окружности радиуса $\sqrt{5}$

3 это полуокр. радиуса $2\sqrt{5}$

2 это прямоугольник со сторонами $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$

Итого: площадь M это сумма площадей фигур

1, 2, 3, 4

$S_1 + S_4 = \frac{5\pi}{2}$

$S_2 = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10$

$S_3 = \frac{20\pi}{2} = 10\pi$

Отсюда $S_M = 10 + \frac{5\pi}{2} + 10\pi = 10 + \frac{25\pi}{2}$.

Часть 2

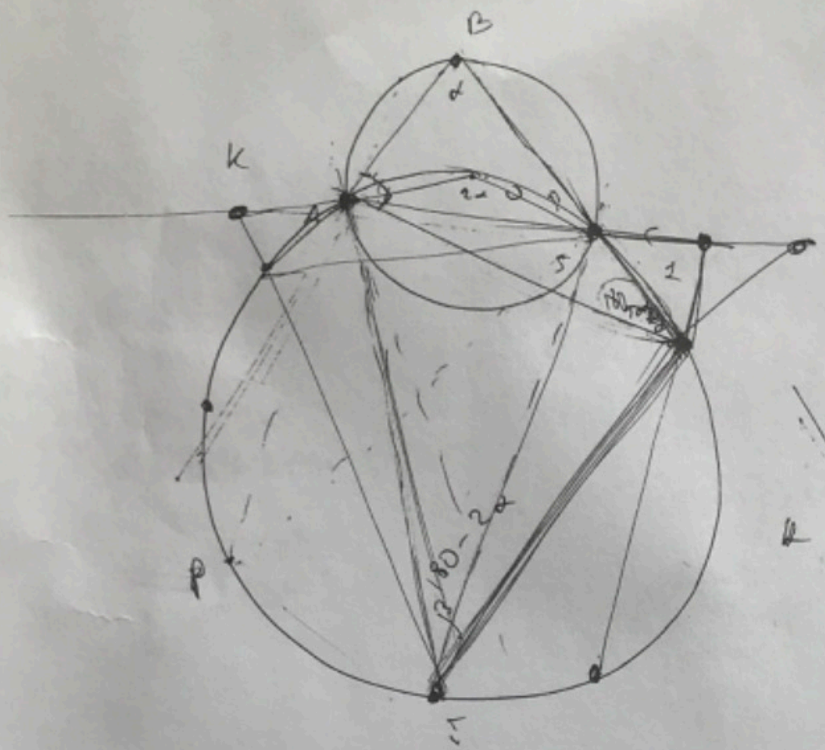
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

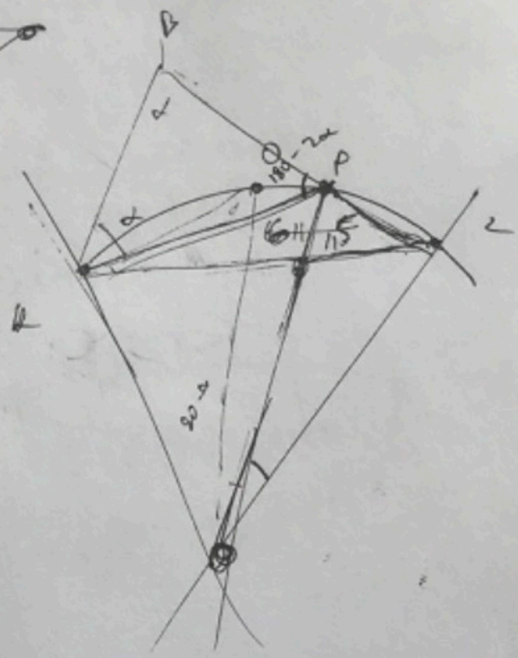
Шифр: **21101225**

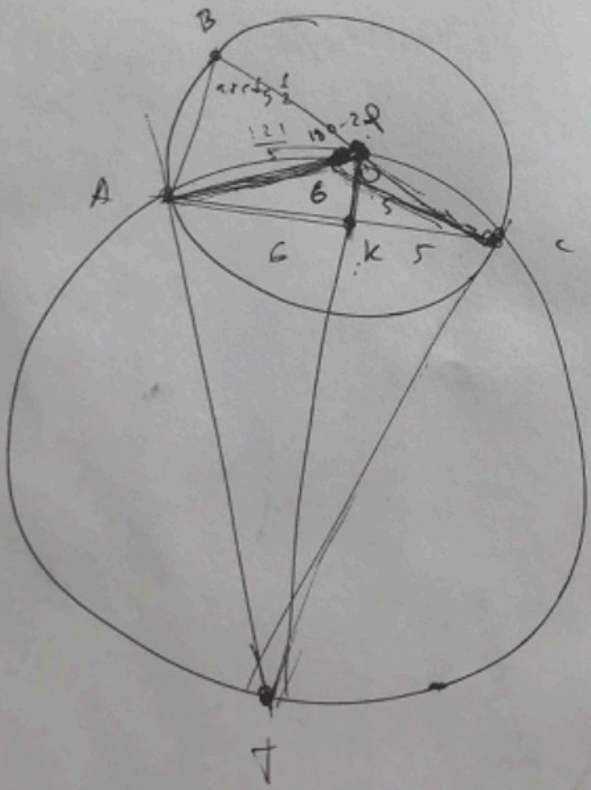
ID профиля: **80337**

Вариант 18

Черновик







Чернетка

$a = \frac{x}{3} + 3$

$b = 6x - 14$

$c = x - 1$

$\log_{\sqrt{a}} b \quad \log_b c^2 \quad \log_c a$

$2\log_a b \quad 2\log_b c \quad \log_c a$

1° $\begin{cases} \log_a b = \log_b c \\ \cancel{\log_c a} \; 2\log_a b - \log_c a = 1 \end{cases}$

$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\frac{\log_a^2 b}{\log_a c} = 1$

$2\log_a b - \frac{1}{\log_a c} = 1$

$\log_a b = x$

$x^2 - 2x\log_a c + 1$

$4\log_a^2 c - 4 > 0$

$4(\log_a^2 c - 1) > 0$

$|\log_a c| > 1$

$\frac{x}{3} + 3 \geq 0$

$x + 9 > 0$

$x > -9$

$x =$

$x + 9 \neq 1$

$x \neq -8$

$x \in (-9; 8) \cup (8; +\infty)$

$6x - 14 > 0$

$x > \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$6x - 14 \neq 1$

$x \neq \frac{5}{2}$

$x \in \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$

$\cancel{x \in \frac{7}{}}$ $x \in (8; +\infty)$

$\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 8\right) \cup (8; +\infty)$

$2\log_a b \log_a c - 1 = \log_a^2 b$

$(x - 1) > 0$

$x > 1$

$x \neq 2$

$\frac{7}{3} < \frac{5}{2}$

$AP \cdot PC \sin\alpha = 11$

14 15

$AP^2 \sin\alpha = \frac{11}{PC}$

$\frac{7}{3} > 2$

$\left(\frac{x}{3} + 3\right) < x - 1$

$4 < \frac{2x}{3}$

12

$x > 6$

Чернови

$3^{13} \cdot 2^{16} + 3^{16} \cdot 2^{13}$

3

3·5 3·5 3·5

$3(3^{13} \cdot 2^{16} + 3^{16} \cdot 2^{13})$

13
17
9
10
7
5
3
1

7

3 5

$3^{14} \cdot 2^{16}$

$3^{13} \cdot 2^{16}$

$3^{35} - 3^{14} \cdot 2^{16} - 3^{17} \cdot 2^{13}$

$3^{35} - 3^{17} \cdot 2^{10} - 3^{20} \cdot 2^{16}$

$3 \cdot 3^{13} \cdot 2^{16} - 1$

3^{13} 16

$2^{13} \cdot 2^{16}$

3

$3 \cdot (3^{13} \cdot 2^{16} + 3^{16} \cdot 2^{13} + 2^{29})$

$2\log_a b$ $2\log_b c$ $\log_c a$

$\log_c a = 2\log_a b$

$\frac{1}{\log_a c} = \log_a b^2$

$\log_a b^2 \cdot \log_a c = 1$

$\log_c a - 2\log_b c = 1$

$2\log_a^2 c(\log_a^2 b + 1) = \log_a b$

$\log_a b^2 \cdot \log_a c = \log_c a - 2\log_b c$

$2\log_a^2 b \cdot \log_a^2 c = \log_a b - 2\log_a^2 c$

$\log_a b^2 \cdot \log_a c = \frac{1}{\log_a c} - \frac{\log_a c^2}{\log_a b}$

Чернова

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ $\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$ $2\log_{6x-14}(x-1)$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

a b c

$\cancel{\log}$ $\log_{\frac{x}{3}+3} = \log$

$\log_c a = 2\log_a b - 1$

$\log_{(\frac{x}{3}+3)} = \log_{6x-14}$

$\log_c a\cancel{b} = \log_a b^2$

$\log_a b = \log_b c$

$\log$ $\log_c ac = \frac{\log_c b^2}{\log_c a}$

$\log_c ac \cdot \log_c a = \log_c b^2$

$\frac{1}{\log_b a} = \log_b c$

$\log_b c \log_b a - 1 = 0$ $\log_a b = \log_b c$

$\frac{\log_b c \log_b a - 1}{\cancel{\log}} = 0$

$\log_b c \log_b a = 1$

$\log_b c = \log_a b$

$abc = 3^{16} \cdot 5^{19}$

$\log_b$

$\log_a b = \frac{1}{\log_c b}$ $\log_c b = \frac{1}{\log_a b}$

$\cancel{\log_a b \log_c b}$

$\log_c ac \cdot \log_c a = \frac{1}{\log_a^2 b}$

13 16 3 5

$\log_c a(\log_c a + 1) = \frac{1}{\log_a^2 b}$

a

$3^{13} \cdot 5^{16}$

a b c

3^{29} − 13 − 16 13 ·

~~13~~

Игрови

log

$2\log$

$\frac{x}{3}+3=a$

$6x-14=b$

$x-1=c$

$(a;b;c)=15$

$[a;b;c]=3^{15}\cdot 5^{18}$ $2\log_a b$ $2\log_b c$ $\log_c a$

$\frac{abc}{15}=3^{15}\cdot 5^{18}$

$\begin{cases}\log_a b=\log_b c\\ \log_b c=\log_c a-1\end{cases}$

$abc=3^{16}\cdot 5^{19}$

$\log_a b=\frac{\log_a c}{\log_a b}$

$a=$ 3^{13} 5^{16}

$\log_a^2 b=\log_a c$

a b c

$a=15$
$b=15$
$c=15$

$\log_b c=\log_c a-1$

$\log_b bc=\frac{1}{\log_a c}$

13

$\frac{1}{\log_b bc}=\log_a c$

13 2^4 16 $2^{13}\cdot 2^{16}$

$C_3^2=\frac{3\cdot 2}{2}=2$

2^{29}

$\frac{1}{\log_a^2 b}=\log_b bc$

1 1

a b c

$\log_b^2 a=\log_b bc$

$2\cdot 2=4$

3 5

$3^{13}\cdot 3^{16}$ 10 13

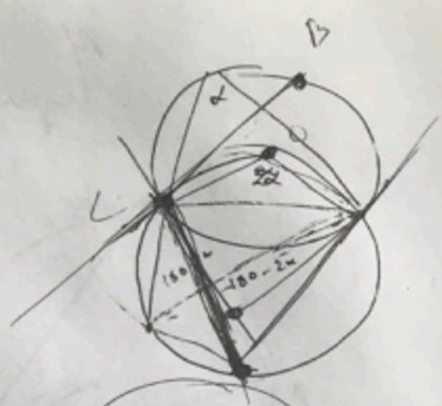
$3^{29}-2\cdot 3^{27}+3^{23}$

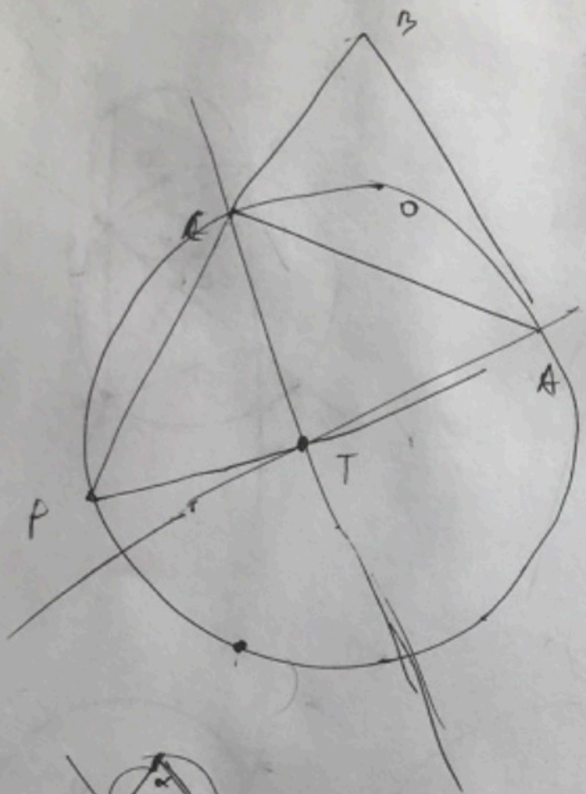
$3^2-2\cdot 3^0+3^0$

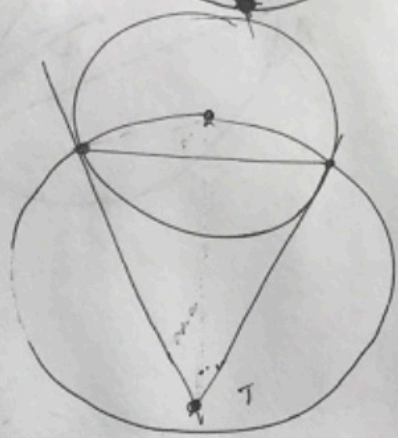
$3^2-6/1\cancel{6}$

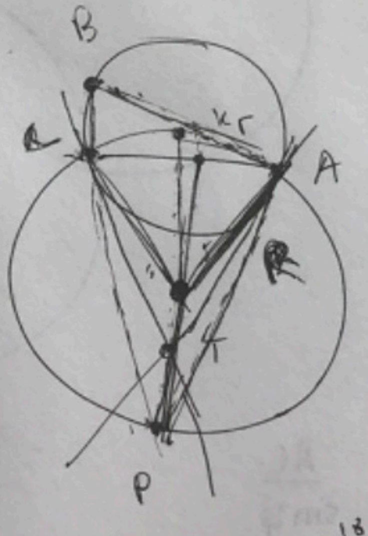
21101225 (U80337 M1302757)

Чертеже:

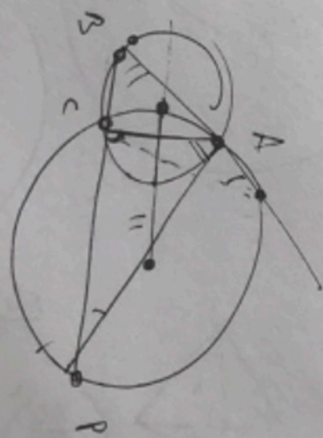






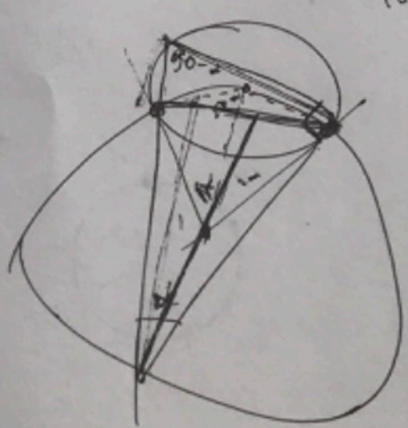


$2r = \frac{AB}{\sin\alpha}$



18

$S = \frac{AB \cdot CD \sin\alpha}{2}$



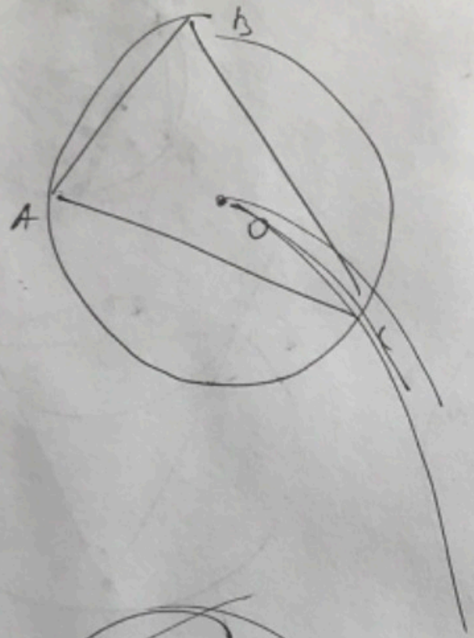
$S \quad AB \cdot$

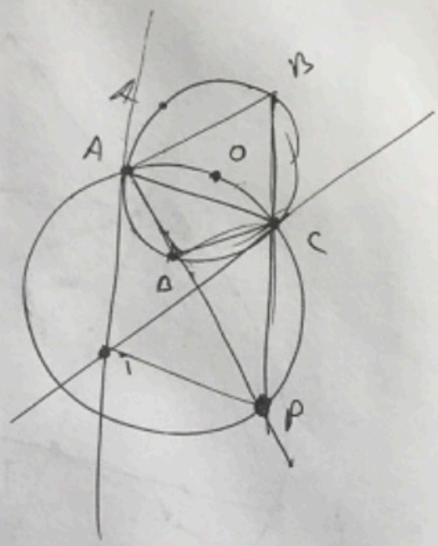
$\sin\alpha = \frac{2S}{AB\,\cancel{AB} \cdot CD}$

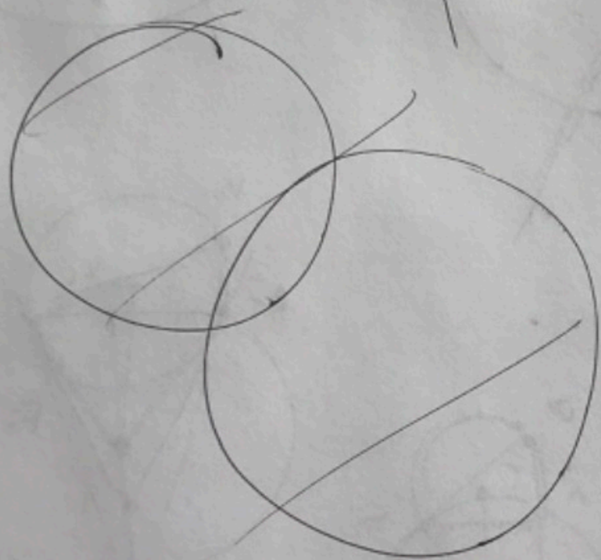
$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{2}\right) = \frac{22}{AB \cdot CD}$

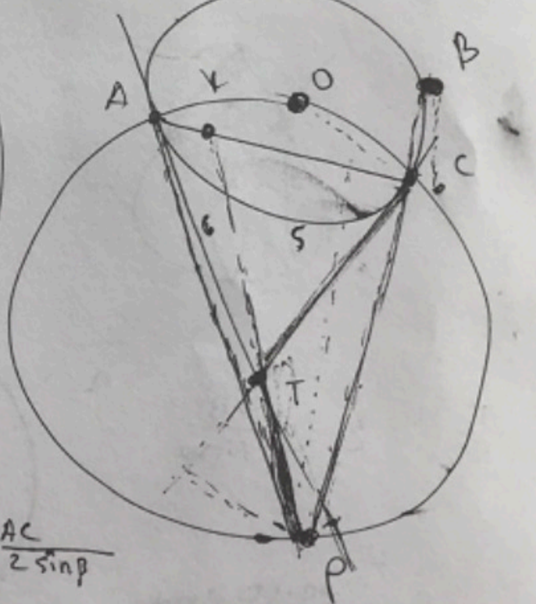
$AB^2 + CD^2 \qquad AB \cdot CD$

Чернови



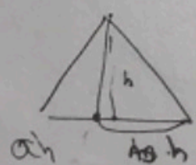






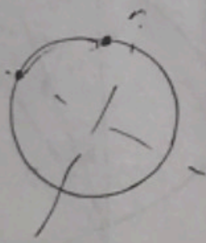
$\frac{AC}{\sin 2\beta}$

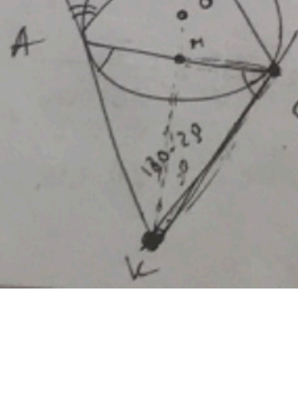
$\frac{AC}{2\sin\beta}$



$$\frac{\left(\frac{AC}{2\sin\beta}\right)^2 \cdot \sin 2\beta}{2\ h} = AC_{\sin(\pi-2\beta)} = \sin$$

$(\pi-2\beta)$





$\frac{AC}{AK}$ $KC = \frac{AC}{\sin\beta}$

$KC = \frac{\frac{AC}{2}}{\sin 2}$ 2

21101225 (U80337 M1302757)

(1) Математика 11 класс

Чистовик. Вариант - 18

№4

Ответ: $3^{35}+3\cdot2^{35}-35\cdot3^{17}\cdot2^{16}$.

Решение:

$НОК(a;b;c)=[a;b;c]$ $НОД(a;b;c)=(a;b;c)$

Известно, что $[a;b;c]=\frac{a\cdot b\cdot c}{(a;b;c)}$, поэтому

$abc=[a;b;c]\cdot(a;b;c)=15\cdot3^{15}\cdot5^{18}=3^{16}\cdot5^{19}$

Всего раскидать делители 3^{16} и 5^{19} по 3ем числам $3^{16}\cdot3^{19}=3^{35}$ (для ~~3ки~~ каждой 3ки есть 3 места, для каждой 5ки есть 3 места)

Посчитаем варианты, когда $(a;b;c)\neq15$, в этом случае либо есть число без 5ок, либо есть число без 3ек. Если есть число без 5ок, то это $3^{16}\cdot2^{19}\cdot3$ (Для 3ек есть 3 числа, для 5ок есть 2 числа, умножаем на 3 из-за тройки упорядочение) Если есть число без 3ек, то ~~таких~~ кол-во таких вариантов $3\cdot3^{19}\cdot2^{16}$. Пересечение таких случаев, то есть когда есть число без троек и 5ок это $2^{16}\cdot2^{19}\cdot3$

Итого, по формуле включений исключений кол-во вариантов, когда $(a;b;c)\neq15$ это $3^{17}\cdot2^{19}+3^{20}\cdot2^{16}-3\cdot2^{35}$.

Поэтому число троек уд-щих условию это $3^{35}-3^{17}\cdot2^{19}-3^{20}\cdot2^{16}+3\cdot2^{35}$.

Ответ: $3^{35}+3\cdot2^{35}-3^{17}\cdot2^{16}(2^{3}+3^{3})$ или $3^{35}+3\cdot2^{35}-3^{17}\cdot2^{16}\cdot(35)$.

21101225 (U80337 M1302757)

cc

③ Чистовик Вариант -18.

Поэтому $PK \parallel AB$.

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{CP}{BP} = \frac{5}{6}$, $\frac{CP}{CB} = \frac{5}{11}$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$. $k = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = 5 \cdot \frac{11^2}{5^2} = \frac{121}{5}$

Отсюда Ответ: а) $\frac{121}{5}$.

б) r - радиус ω

~~AC = 2r sin(arctg ½)~~

Считаем $S_{\triangle ABP}$ как $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle APC}$

Выражаем BP из известной площади и угла.

по т. косинусов выражаем AB. ($\triangle ABP$)

Из известного соотношения $\frac{BP}{PC} = \frac{6}{5}$ выражаем PC

По теореме косинусов для $\triangle ABC$ выражаем

AC. ($\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, BP посчитали, $BC = BP + CP$, тоже посчитали).

21101225 (U80337 M1302757)

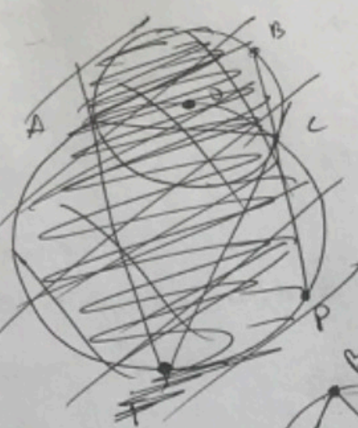
Математика 11 класс

Чистовик Вариант - 18.

(2)

№ 6

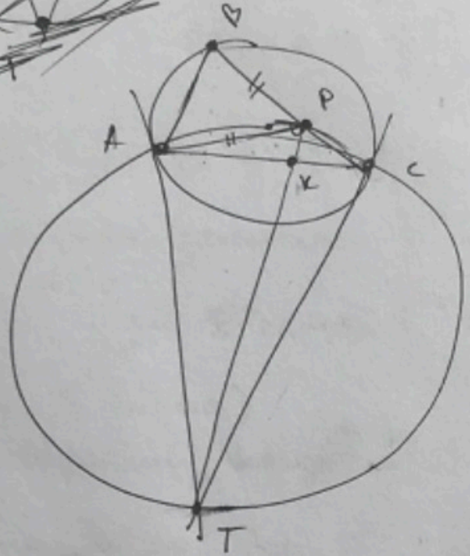
~~Дано~~



Дано:

$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$



Решение:

AOPK лежат на одной окр. и AOCT вписанный четырехугольник ($OA \perp AT$, $OC \perp CT$, противолежащие углы в сумме $180°$) поэтому

A, O, C, P, T лежат на одной окр.

Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (центральный в ω)

$\angle ATC = 180 - 2\alpha$. (на одной окр.)

$\angle BCA = \angle ATC$, т.к. APCT вписанный.

Тогда $\angle BAP = 180° - \angle BPA - \angle ABP = 180° - 180° + 2\alpha - \alpha = \alpha$.

$\Rightarrow BP = AP$.

~~$S_{\triangle APC} = PC \cdot AP \cdot \sin\angle APC = \frac{4}{3}P$~~

$\angle CPK = \angle CAT = \angle ABC$ (вписанные, и угол секущ. и ~~хорды~~ касат.)

21101225 (U80337 M1302757)