Часть 1

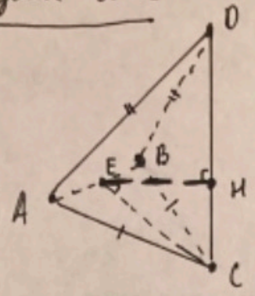
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101224**

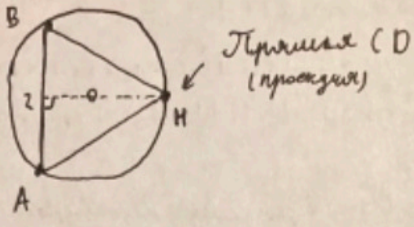
ID профиля: **289414**

Вариант 18

Задача №2



Вид сверху:



Поскольку и D и C лежат на серединных перпендикулярах AB, прямые AB и CD перпендикулярны

⇓

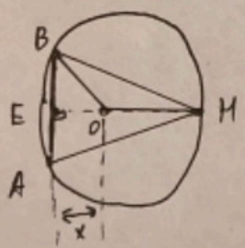
Проекция AB в плоскости основания цилиндра (при виде сверху) равна отрезку AB = 2

DE и CE в той же проекции выглядят как пунктирная линия, проходящая через ось цилиндра. $CE = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$; $DE = \sqrt{7^2 - 1^2} = 2 \cdot 2\sqrt{3}$

(Пунктирная линия при виде сверху далее называется „высота")

высота не может быть длиннее наименьшего из отрезков CE и DE ⇒ длина высоты $h \leq 2\sqrt{6}$

В зависимости от положения точки C и D h может изменяться от 0 до $2\sqrt{6}$



$\triangle BAH$ - равнобедренный ⇒ $OB = OA$ всегда

$OH = R$; $h - R = x$ (x может быть как больше, так и меньше 0)

$OB = R = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + x^2}$ ⇒ R минимален и равен $\frac{AB}{2} = 1$ при $x = 0$, то есть при $h = R = 1$

$CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = \sqrt{24 - h^2} = \sqrt{23}$

$DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = \sqrt{48 - h^2} = \sqrt{47}$

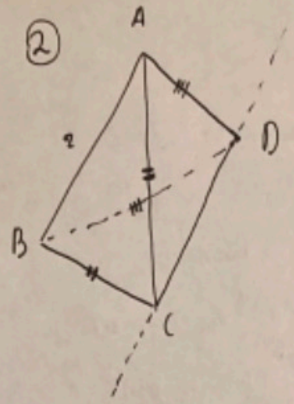
Замечу, что D и C могут находиться как по одну, так и по разные стороны от точки H

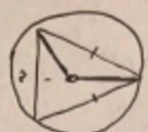
⇓

$CD = \left[\begin{array}{l} \sqrt{23} + \sqrt{47} \\ \sqrt{47} - \sqrt{23} \end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

②

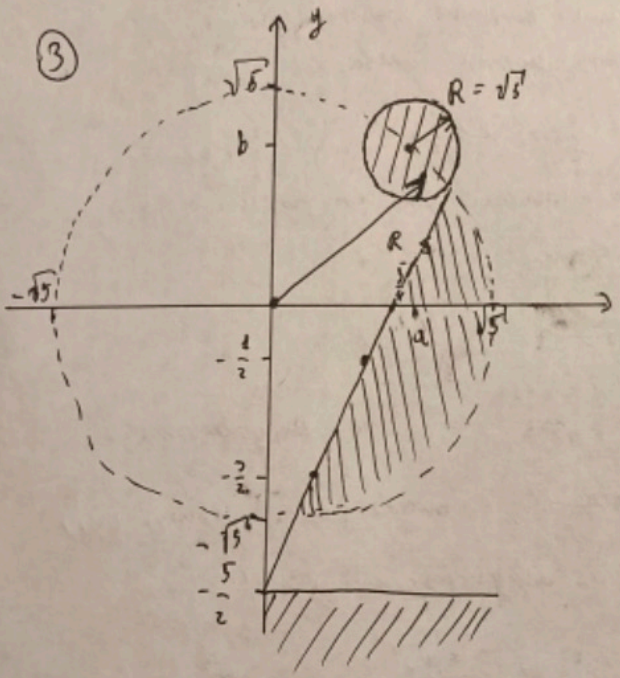




$h = R + x$

$R^2 = 1^2 + x^2$

③



$4a - 2b \geq 5$

$a \geq \frac{5}{4} + \frac{b}{2}$

!!

M

При a и b внутри прям. окруж.

Подходят все x и y

$x^2 + y^2 \leq (5 + \sqrt{5})^2$

$\cancel{b > \sqrt{5}}$

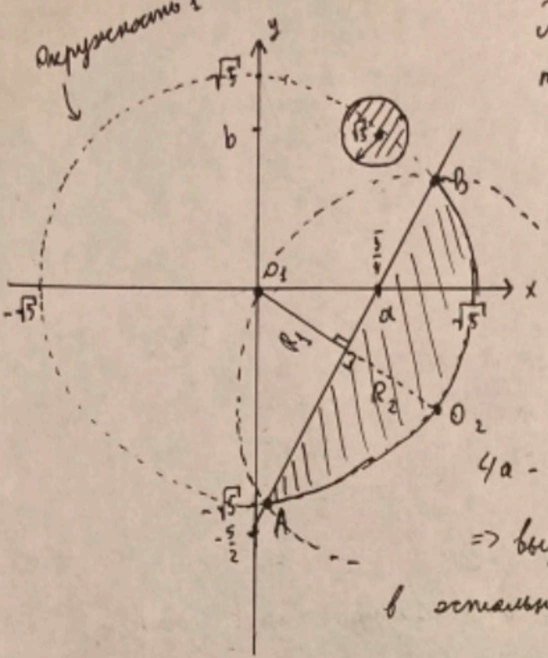
$\frac{5 - 2\sqrt{5}}{4}$ $\quad -\frac{5}{2}$

$2 \to 1,5$

$\sqrt{5} \approx 2,23 \quad \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,77(7) \quad \frac{10}{3} \to 2,5$

$\sqrt{3}^2 + (2\sqrt{3})^2 = 3 + 12 = 15 = R^2$

Задача №3



в смысле неравенство

Первое уравнение задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ в точке с координатами $(a; b)$

a^2+b^2 из второго уравнения - квадрат длины радиус-вектора из $(0;0)$ к $(a;b)$

Если $4a-2b \geq 5$, то a и b могут быть любыми внутри пунктирной окружности на рисунке слева.

$4a-2b \geq 5 \Rightarrow a \geq \frac{5}{4} + \frac{b}{2} \Rightarrow x \geq \frac{5}{4} + \frac{y}{2} \Rightarrow y \leq -\frac{5}{2} + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ выделенная область - такая, для которой $4a-2b \geq 5$, в остальной части плоскости $4a-2b<5$

$$a^2+b^2 = 4a-2b$$
$$a^2-4a+4+b^2+2b+1 = 4+1$$
$$(a-2)^2+(b+1)^2 = \sqrt{5}^2$$

Вспоминаем, что a - это координата по x, а b - по оси y

Окружность 2

$\Rightarrow$ Задаёт окружность радиуса $\sqrt{5}$; в точке $(2;-1)$ центр (O_2)

Точки A и B лежат на прямой $y=-\frac{5}{2}+2x$; на окружности $x^2+y^2=5$

$x^2+(2x-\frac{5}{2})^2 = 5x^2-10x+\frac{25}{4}=5 \Rightarrow x^2-2x+\frac{1}{4}=0 \quad D=3 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_A = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}; \; x_B = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_A = -\frac{1}{2}-\sqrt{3}; \; y_B = -\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

Окружность 2 очевидно проходит через точки A и B, поскольку функция $\min(4a-2b; 5)$ непрерывна (AB - хорда обеих окружностей)

середина хорды AB в точке с координатами $(1; -\frac{1}{2})$

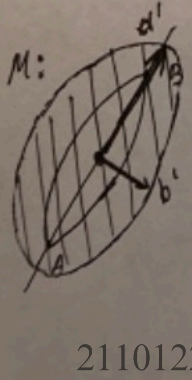
O_1O_2 перпендикулярна AB

$R_2 = R_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$R_1 = \sqrt{1^2+(-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Longleftarrow$

Получившаяся фигура - общая площадь двух окружностей (1 и 2) - ГМТ центров окружностей $(x-a)^2+(y-b)^2=5 \Rightarrow$ фигура M это ГМТ таких, что удалены от пересечения окружностей не более чем на $\sqrt{5}$

это эллипс



Его большая полуось $a' = \frac{AB}{2}+\sqrt{5} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}^2+(2\sqrt{3})^2}}{2}+\sqrt{5} = \frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt{5}$

малая полуось $b' = R_1+\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$S(M) = \pi a'b' = \pi\left(\frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt{5}\right)\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) = \pi\cdot\left(\frac{15}{2}+\frac{15\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{15\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ответ: $S(M) = \frac{15\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3

Задача №1 $a_1; d \in \mathbb{Z}; d>0$

$S = 7a_1 + (d+2d+3d+4d+5d+6d) = 7a_1 + 21d$

$a_7 a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$a_9 a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

Если $6d^2 \geq 24$, то, прибавив к верхнему неравенству $6d^2$ мы получим

$a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 > 7a_1 + 21d + 44$, что противоречит второму условию

$\Downarrow$

$6d^2 < 24 \Rightarrow d^2 < 4 \Rightarrow |d| < 2.$

Поскольку d целый и больший нуля, но по модулю меньше двух, d может быть равно только $1 \Rightarrow S = 7a_1 + 21$

$a_7 a_{12} = a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

$a_9 a_{10} = a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 10^2 - 4\cdot 7 = 72$

граничные точки второго неравенства $\rightarrow$ $a_1 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{9\cdot 4\cdot 2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$-11 < -5-\sqrt{2}\cdot 3 < -10$; $3\sqrt{2}-5 < 1$; $3\sqrt{2}-5 > 0$

Так как a_1 может быть только целым, оно может принимать все целые значения от -10 до 0 кроме -5

$\Downarrow$

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1; 0.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101224**

ID профиля: **289414**

Вариант 18

Чистовик

Математика, 11 класс

Задача №4 Представим числа a, b, c в альтернативном виде:

$$\begin{cases} a = 15k_1 \\ b = 15k_2 \\ c = 15k_3 \end{cases}$$, где k_1, k_2 и k_3 по условию взаимно просты.

Если мы поделим все три числа на НОД, то и НОК уменьшится в то же число раз

$$\Downarrow$$

$$НОК(k_1, k_2, k_3) = 3^{14} \cdot 5^{17}$$

Число такого вида может делиться только на другие числа вида $3^m \cdot 5^n$

$$\begin{cases} k_1 = 3^{m_1} 5^{n_1} \\ k_2 = 3^{m_2} 5^{n_2} \\ k_3 = 3^{m_3} 5^{n_3} \end{cases}$$

Заметим, что условие взаимной простоты k_1, k_2 и k_3 подразумевает, что среди чисел m_1, m_2, m_3 есть хотя бы одно нулевое, равно как и среди чисел n_1, n_2, n_3.

Поскольку $НОК = 3^{14} \cdot 5^{17}$, хотя бы одно из чисел m_1, m_2, m_3 равно 14, а хотя бы одно из чисел n_1, n_2, n_3 равно 17

Из m_1, m_2, m_3 одно равно 0, одно - 14, а третье может быть любым (от 0 до 14)

Из n_1, n_2, n_3 одно равно 0, другое - 17, а третье - любое от 0 до 17 (целое, разумеется)

Разных способов выбрать m_1, m_2 и m_3 из вариантов 0, 14, d:

кол-во способов выбрать, какое из m будет равно 0, а какое - 14: $3 \cdot 2 = 6$;

Для каждого из 6 вариантов есть 13 способов выбрать неповторяющееся третье число - любое от 1 до 13 + для троек m 0, 0, 14 и 14, 14, 0 есть 3 способа распределения => всего разных комбинаций m_1, m_2, m_3: $6 \cdot 13 + 2 \cdot 3 = 84$

Аналогично для n_1, n_2, n_3: всего разных комбинаций будет $6 \cdot 16 + 2 \cdot 3 = 102$

На каждую расстановку m_1, m_2 и m_3 и каждую расстановку n_1, n_2 и n_3 приходится одна конкретная тройка чисел k_1, k_2, k_3 => всего одна тройка чисел a, b, c

$$\Downarrow$$

Всего разных троек чисел (a, b, c) - $N = 84 \cdot 102 = \underline{8568}$

Ответ: 8568 троек чисел.

Чистовик — Математика, 11 класс

Задача №5 $K=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $L=\log_{6x-14}(x-1)^2=2\log_{6x-14}(x-1)$;

$M=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Сначала запишем ОДЗ x:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{x}{3}+3}>0;\ \neq 1 \Rightarrow x>-9;\ \neq -6 \\ 6x-14>0;\ \neq 1 \Rightarrow x>\frac{14}{6};\ \neq \frac{15}{6} \\ x-1>0;\ \neq 1 \Rightarrow x>1;\ \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\left(\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};\infty\right)$$

$K=\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)^2=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$. Есть три варианта того, какие из чисел K, L, M равны: I) $K=L$; II) $L=M$; III) $K=M$

I) $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}(x-1)=2k \Rightarrow \left(\frac{x+9}{3}\right)^k=6x-14$; $(6x-14)^k=x-1$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2k-1 \Rightarrow (x-1)^{2k-1}=\frac{x+9}{3}$

$\Downarrow$ $(x-1)=\left(\frac{x+9}{3}\right)^{k^2}$

$\Rightarrow \frac{x+9}{3}=\left(\frac{x+9}{3}\right)^{2k^3-k^2} \Rightarrow 2k^3-k^2=1$

$\Leftarrow (k-1)\underbrace{(2k^2+k+1)}_{D<0}=0$

$\log_{\frac{x+9}{3}}(6x-14)=1 \Leftarrow k=1$

$\frac{x+9}{3}=6x-14 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ При проверке этот вариант ~~отсутствует~~ подходит ~~$((x-1)\neq(6x-14))$~~

II) $2\log_{6x-14}(x-1)=\log_{x-1}\left(\frac{x+9}{3}\right)=2k \Rightarrow (6x-14)^k=x-1$; $(x-1)^{2k}=\frac{x+9}{3} \Rightarrow \frac{x+9}{3}=(6x-14)^{2k^2}$

$2\log_{\frac{x+9}{3}}(6x-14)=2k-1$

$\Rightarrow \left(\frac{x+9}{3}\right)^{2k-1}=(6x-14)^2=(6x-14)^{4k^3-2k^2}$

Если $x=\frac{13}{5}$, то $\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{58}{15}$, а это не так

$2k^3-k^2=1 \Rightarrow k=1$ (Аналогично ранее написанному)

$\Leftarrow$ $6x-14=x-1$, то есть $x=\frac{13}{5}$

III) $2\log_{\frac{x+9}{3}}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x+9}{3}\right)=2k \Rightarrow \left(\frac{x+9}{3}\right)^k=6x-14$; $(x-1)^{2k}=\frac{x+9}{3} \Rightarrow (6x-14)^{2k^2}=(x-1)$

$2\log_{6x-14}(x-1)=2k-1 \Rightarrow (6x-14)^{2k-1}=(x-1)^2=(6x-14)^{4k^2} \Rightarrow 4k^2=2k-1$

$4k^2-2k+1=0$

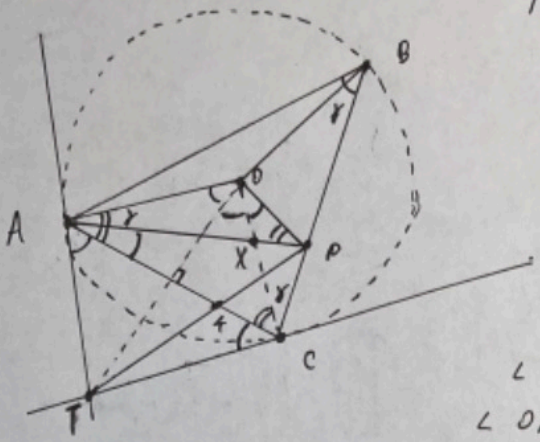
Таких k нет

Во всех случаях мы получили отсутствие решений, кроме $x=3$.

~~Ответ: ни при каких x~~

Ответ: только при $x=3$.

Задача №6



$AT = TC$; $OA = OC$; $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

$\angle AOC = \angle APC$ ($AOPC$ - вписанный)

$AK : KC = 6 : 5$ (у APK и CPK одна высота)

$AOCT$ - вписанный ($\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$)

$\angle TAC = \angle TOC = \angle CAT = \angle TOA = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$

$\angle POC + \gamma = \beta$ ($\angle AOP + \angle ACP = 180^\circ$)

$\angle OXP = 180^\circ - 2\beta + \gamma = 2\alpha + \gamma$

$\angle OAP = \gamma = 180^\circ - 4\alpha - \gamma \Rightarrow \gamma = 90^\circ - 2\alpha = \beta - \alpha$

$\angle POC = \beta - \gamma = \beta - (\beta - \alpha) = \alpha = \angle PAC$

$AC \cdot PC \cdot \sin(2\beta - \alpha) = AC \cdot PC \cdot \sin(3\beta - 90^\circ) = 11$ (S_{APC})

$S_{ABC} = AC \cdot BC \cdot \sin(3\beta - 90^\circ) = AB \cdot BC \cdot \sin(90^\circ - \beta) = 11 \cdot \frac{BC}{PC} \cdot \frac{AB}{AC}$

Черновик

Математика, 11 класс

(4) $a = 15k_1$ $\quad$ $\underline{k_1, k_2, k_3}$ взаимно просты $\Rightarrow$ НОК$(k_1, k_2, k_3) = k_1 k_2$

$b = 15k_2$ $\quad$ 2 3 6

$c = 15k_3$ $\quad$ НОК = 6 $\quad$ $3^{15} \cdot 5^{18} \vdots 15k_1 ; \vdots 15k_3$

$3^{14} \cdot 5^{17} \vdots k_1, k_2, k_3$

m_1 n_1

m_2 n_2

m_3 n_3

$\begin{cases} \text{Есть число без множителя } 3 \\ \text{Есть число без множителя } 5 \end{cases}$

Есть число с множителем 3^{14}

Есть число с множителем 5^{17}

$k/_1$ 0 $5^{17} \cdot 3$

0 $3^{14} \cdot 5$

0

0	14	0	14	•	•
14	0	•	•	0	14
•	•	14	0	14	0

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{6 вариантов}}$

0	m_1	0
m_2	0	14
14	14	m_3

$\left.\begin{array}{l} 0, 0, 14 \\ 0, 1, 14 \\ \ldots\ldots \\ 0, 14, 14 \end{array}\right\}$ 15 троек m

0

0

14

$6 \cdot 13 + \frac{6 \cdot 2}{?!} = 6 \cdot 14$

$\log_{\frac{x+9}{3}} (6x - 14) = \log_{6x-14} (x-1)$

(5) $\log_{a^2} k^2 = \log_a k \Rightarrow \log_{\sqrt{a}} k = \log_a k^2 = 2 \log_a k$

$3^3 = 27$

$(x-1) = \underbrace{(6x-14) \cdot (6x-14) \ldots\ldots}_{k \text{ раз}} =$

$27^3 = \cancel{81} 3^9$

$3^9 = 3^{3 \cdot 3}$

$\left(\frac{x+9}{3}\right)^k = 6x - 14$

$(6x-14)^k = x - 1$

$x - 1 = \left(\frac{x+9}{3}\right)^{k^2}$

$(x-1)^{2k-1} = \left(\frac{x+9}{3}\right)$

=

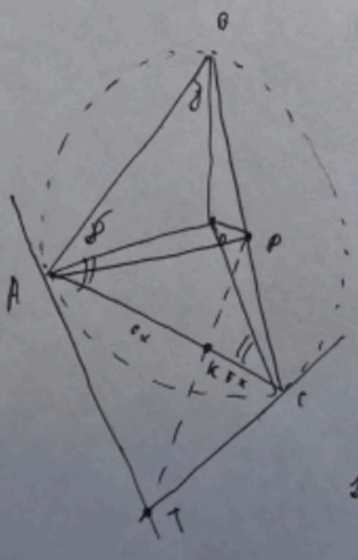
$\frac{\frac{13}{5} + 9}{3} = \frac{58}{15}$

$6x - 14 = x - 1$

$5x = 13$

$\frac{8}{5}$

(6)



$180 = 2\alpha + \beta + \gamma + POC$

$\gamma + \delta = \alpha$

$180 - 2\beta = 2\gamma + 2\delta$

~~$\gamma = 90 - \beta - \delta$~~

1