Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101082**

ID профиля: **153291**

Вариант 18

Математика 11 кл.

Чистовик.

лист 3.

Задача 3.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5 = \sqrt{5}^2 = r^2$

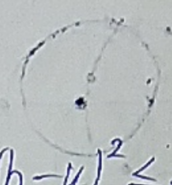
$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

~~2 варианта~~:

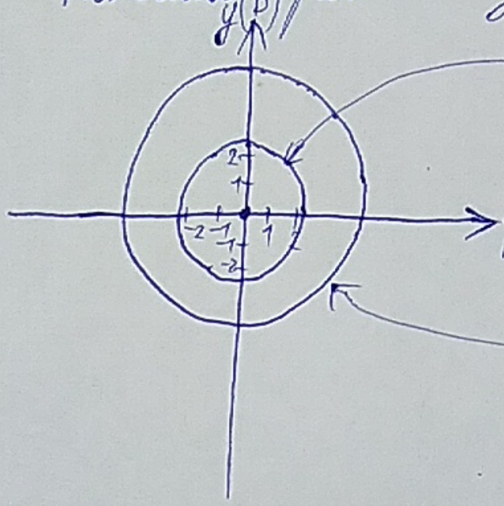
~~1) При $4a-2b \leq 5$; тогда $a^2+b^2 \leq 5$~~

~~$a^2+4a+b^2-2b+5 \leq 15$; $(a+2)^2+(b-1)^2 \leq 15$~~

~~Тогда $S_м = \pi r^2 = \pi \cdot 5 = 5\pi$~~



Сначала решим задачу: $\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq 5 \end{cases}$



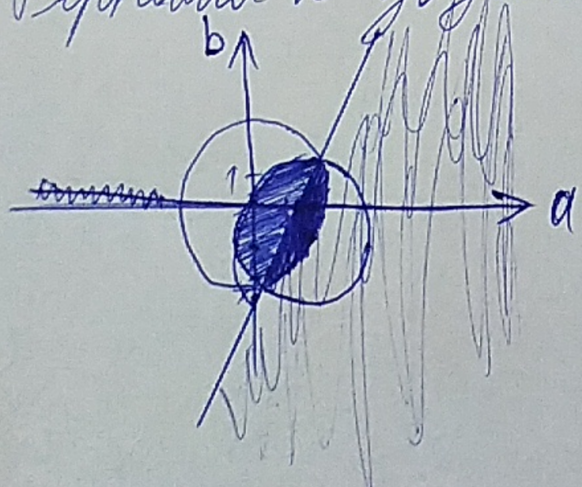
$a^2+b^2 \leq 5 \rightarrow$ ~~на~~ на каждую точку a,b берём и строим $(x-a)^2+(b-y)^2 \leq 5$.

Получилась окружность $R = 2\sqrt{5}$

$S_{окр.} = S = \pi R^2 = \pi \cdot 20 = 20\pi$

Значит $S_м \leq 20\pi$

Вернёмся к задаче:



$$\left[\begin{array}{l} 4a-2b \geq 5;\ a^2+b^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq 4a-2b \leq 5 \end{array}\right.$$

$a^2-4a+b^2+2b \leq 0$

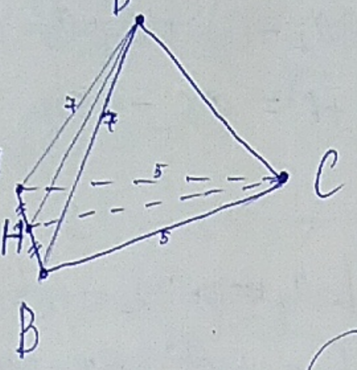
$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

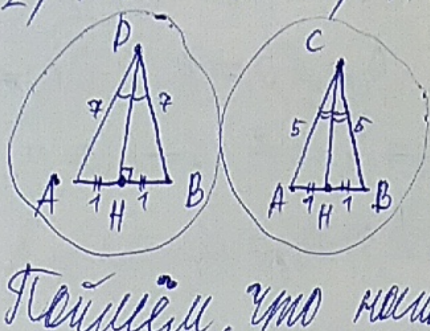
Математика 11кл.

Чистовик.
лист 2.

Задача 2.

$AB=2;\ AC=CB=5;\ AD=DB=7$



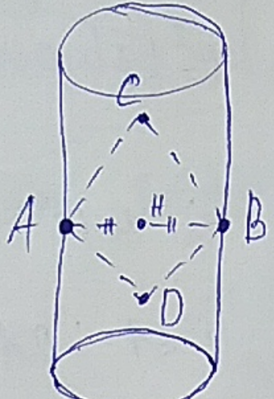


$DH \perp AB;\ CH \perp AB \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \perp HDC \Rightarrow AB \perp DC \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel$ основ. цилиндра $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ тогда при r_{min} AB – диаметр окруж.

Поймём, что наименьший радиус это 1:

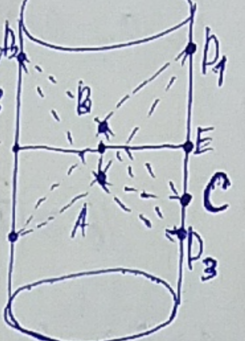
$2r \geqslant AB = 2;\ r_{min} = 1$

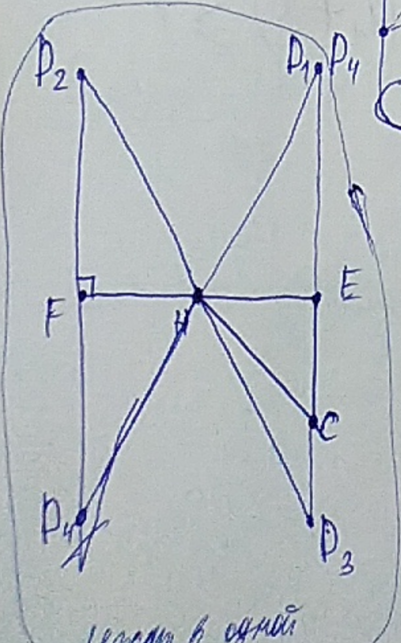
При $r<1$ не выполняется условие, что точки A и B $\in$ бок. пов.



Вид сбоку:

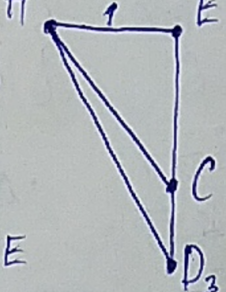
Один из 4 случаев:

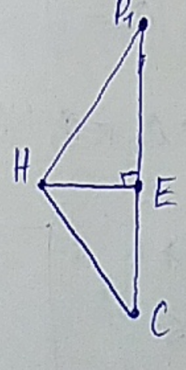




лежат в одной плоскости

$HE=1$;





$DH=\sqrt{49-1}=4\cdot\sqrt{3}$

$CH=\sqrt{25-1}=2\cdot\sqrt{6}$

$$\left[\begin{aligned} &D_3C = D_3E - CE = \sqrt{47}-\sqrt{23} \\ &D_1C = D_1E + CE = \sqrt{47}+\sqrt{23} \\ &D_2C = \sqrt{D_1C^2+FE^2} \\ &D_4C = \sqrt{D_3C^2+FE^2} \end{aligned}\right.$$

$FE=2$

$$DC=\left[\begin{aligned} &\sqrt{47}-\sqrt{23} \\ &\sqrt{47}+\sqrt{23} \\ &\sqrt{47+23+4-2\sqrt{47\cdot23}} \\ &\sqrt{47+23+4+2\sqrt{47\cdot23}} \end{aligned}\right.;\quad DC=\left[\begin{aligned} &\sqrt{47}\pm\sqrt{23} \\ &\sqrt{74\pm2\sqrt{1081}} \end{aligned}\right.$$

Математика 11 кл.

Чистовик

Лист 1.

Задача 1.

$b, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{Z}$. $a_7 \cdot a_{12} > S + 20$; $a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$a_1 + b = a_2$; $a_1 + 2b = a_3 \dots a_1 + 6b = a_7$; $a_1 = a_7 - 6b$; $a_2 = a_7 - 5b \dots$

$a_6 = a_7 - b$; $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = S = 7a_7 - b(0+1+\dots+6) = 7a_7 - 21b$

$a_{12} = a_7 + 5b$; $a_9 = a_7 + 2b$; $a_{10} = a_7 + 3b$

$$\begin{cases} a_7 \cdot (a_7 + 5b) > S + 20 = 7a_7 - 21b + 20 \\ (a_7 + 2b)(a_7 + 3b) < S + 44 = 7a_7 - 21b + 44 \\ a_7 = a_1 + 6b \end{cases} \quad \begin{cases} a_7^2 + 5b \cdot a_7 > 7a_7 - 21b + 20 \\ a_7^2 + 5b \cdot a_7 + 6b^2 < 7a_7 - 21b + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7^2 + 5b \cdot a_7 - 7a_7 + 21b - 20 > 0 \\ a_7^2 + 5b \cdot a_7 - 7a_7 + 21b - 20 < 24 - 6b^2 \end{cases} \Rightarrow 24 - 6b^2 > 0 \;;\; \frac{24}{6} = 4 > b^2$$

$b \in \mathbb{Z}$; $2 > |b|$; $b = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$; $b^2 \leq 1$;

возраст. арифм. прогр. $b = 1$

$$\begin{cases} a_7^2 + 5a_7 - 7a_7 + 21 - 20 \geq 0 \\ a_7^2 - 2a_7 + 1 \leq 24 - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} a_7^2 - 2a_7 + 1 = (a_7 - 1)^2 > 0 \\ (a_7 - 1)^2 < 18 \end{cases}$$

$$a_7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} (a_7 - 1)^2 \geq 1 \\ (a_7 - 1)^2 \leq 16 \end{cases} ;\; a_7 = a_1 + 6 \;;\; 16 \geq (a_1 + 5)^2 \geq 1$$

$$4 \geq |a_1 + 5| \geq 1 \;;\; \left[\begin{array}{l} 4 \geq a_1 + 5 \geq 1 \\ -4 \leq a_1 + 5 \leq -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -1 \geq a_1 \geq -4 \\ -9 \leq a_1 \leq -6 \end{array}\right.$$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Черновик.

$1+2+3+4+5+6=21$ ($10+11$)

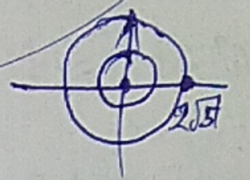
$$\begin{array}{r} 47 \\ \times\ 23 \\ \hline 141 \\ +\ 94 \\ \hline 1081 \end{array}$$

$4a \leq 5$

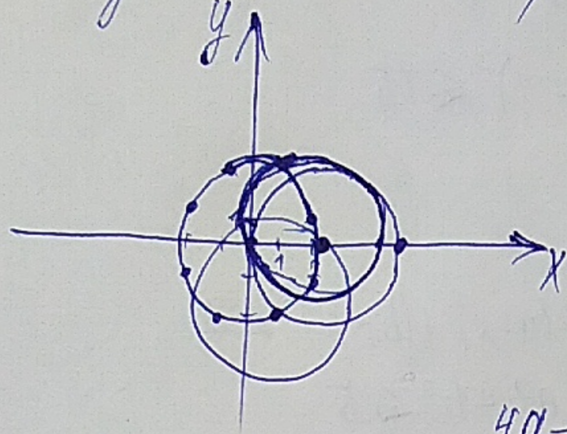
$a \leq 1{,}25$

3. Сначала решим задачу:

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq 5 \end{cases}$$



Допустим $a=2$; $b=1$, тогда



При $a=0$; $b=0$:

При $a=\sqrt{5}$; $b=0$:

При $a=\sqrt{5}$; $b=4\sqrt{5}-5$

При $a=1$; $b=-2$

$4a-2b=5$; $a^2+b^2=5$

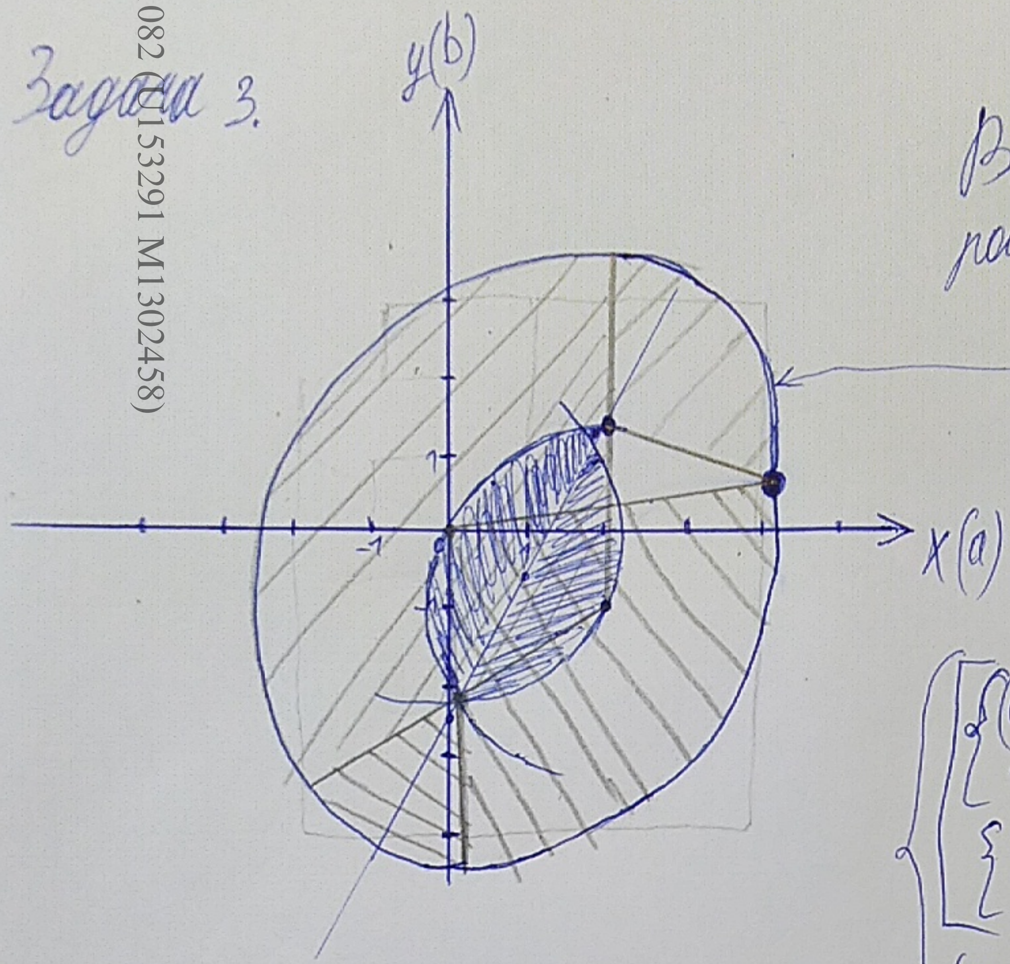
Математика 11 кл.

Чистовик.

лист 4.

21101082 (U153291 M1302458)

Задача 3.



Вот фигура у которой нужно найти S.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5 \\ 4a-2b \leq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a-2b \geq 5 \\ a^2+b^2 \leq 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$$

Заметим, что эта фигура состоит из простых фигур у которых мы можем посчитать площадь, но это слишком долго, поэтому посчитаем примерно:

$$S_M \approx 5+8+\overset{20+22}{16}+12+1 \approx 42$$

Теперь посчитаем точно:

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101082**

ID профиля: **153291**

Вариант 18

Чистовик

лист 4.

5 задача

3) $\left[\begin{array}{l} \log_{6x-14}(x-1)^2 = c-1; \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = c \\ \left(\frac{x}{3}+3\right)^c = (6x-14)^2 \\ (x-1)^{2c} = \left(\frac{x}{3}+3\right)^2 \\ (6x-14)^{(c-1)c} = (x-1)^{2c} \end{array}\right.$

$(6x-14)^{(c-1)c} = (6x-14)^{\frac{4}{c}}$

$c = 2$; $\frac{x}{3}+3 = 6x-14$; $x = 3$

Все варианты разобраны 1, 2, 3.

(В них содерж. все варианты, которые нам нужны

Подходит только $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

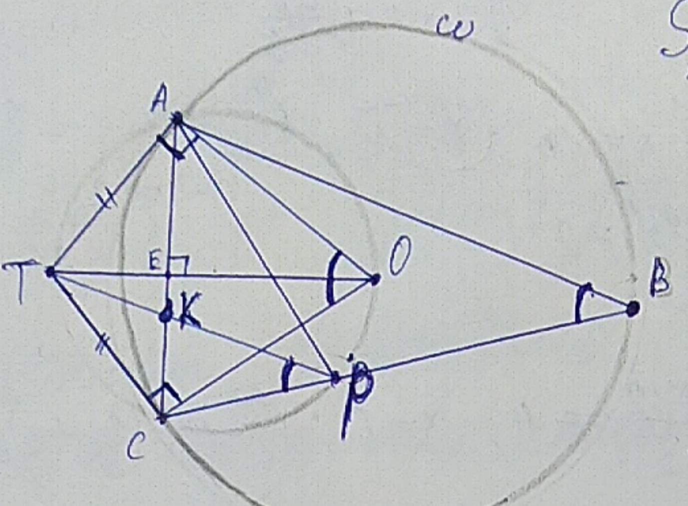
Математика 11кл.

Чистовик.

Лист 3.

21101082 (U153291 M1302459)

Задача 6.



$S_{APK}=6$; $S_{CPK}=5$.

а) S_{ABC} — ? ; $\angle OCT=90^\circ$; $\angle TAO=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow TO$ — диаметр

$S_{ABC}=\cancel{AA}\,AC\cdot BC\cdot\dfrac{\sin\angle ACP}{2}$

$\dfrac{S_{APC}}{S_{KPC}}=\dfrac{AC}{KC}$

$AO=CO$; $\cancel{\#}$ TO – общ; $\angle OAT=\angle OCT=90^\circ \Rightarrow \triangle TAO=\triangle TCO \Rightarrow TA=TC$

$S_{AP\cancel{C}}=S_{APK}+S_{CPK}=11=AC\cdot CP\cdot\dfrac{\sin\angle ACP}{2}$; $S_{ABC}=\dfrac{BC}{CP}\cdot 11$

$\angle TPC=\angle TOC=\angle TOA$; $\angle TOA+\angle TOC=\angle ABC\cdot 2$

$\angle ABC=\dfrac{2}{2}\angle TPC=\angle TPC \Rightarrow TP\parallel AB\parallel KP \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB\sim\triangle KCP \Rightarrow \cancel{\frac{AK}{KC}}\ \dfrac{AC}{KC}=\dfrac{BC}{PC}=\dfrac{S_{APC}}{S_{KCP}}=\dfrac{11}{5}$

$S_{ABC}=\dfrac{BC}{CP}\cdot 11=\dfrac{11\cdot 11}{5}=\dfrac{121\cdot 2}{10}=24{,}2$

Ответ: $S_{ABC}=24{,}2$.

б) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; AC — ? ; Пусть $AT=CT=x$, тогда ~~AO~~

$\angle ABC=\angle AOT$ ~~...~~ $\operatorname{tg}\angle AOT=\dfrac{1}{2}=\dfrac{AT}{AO} \Rightarrow AO=2x=CO$; $TO=\sqrt{5}x$

$\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{AT}{TO}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $AE=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x=CE$; $AC=\dfrac{4}{\sqrt{5}}x=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x=0{,}8\sqrt{5}x$

$\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{6}{5}$; $CK=\dfrac{5}{11}AC$; $CE=\dfrac{1}{2}AC$; $KE=\dfrac{1}{22}AC$

Чистовик
лист 2.

Задача 5.

~~Допустим~~ Если $\frac{x}{3}+3=6x-14$, то $\frac{18-1}{3}x=17$; $x=3$

$\frac{x}{3}+3=4=6x-14$; $x-1=2$

$\log_{?}4$; $\log_4 2^2$; $\log_2 4$; $\log_{?}4=\log_2 4=2$; $\log_4 2^2=1$

$2-1=1=\log_2 4-\log_4 2^2$

$x=3$ – подходит

~~$\log_{\frac{x}{3}}$~~ ОДЗ: $\frac{x}{3}+3>0$; $\frac{x}{3}+3\neq 1$; $x-1\neq 1$; $x-1>0$

$6x-14>0$; $6x-14\neq 1$

ОДЗ: $x>\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$; $x\neq\frac{15}{6}=2{,}5$; ОДЗ: $x>2\frac{1}{3}$; $x\neq 2{,}5$

① При $\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$ ~~$\log_{x-1}(6x-14)$~~ $=c$

Это значит $\begin{cases}(6x-14)^c=(x-1)^2\\(x-1)^c=\frac{x}{3}+3\end{cases}$ $\left(\frac{6x-14}{x-1}\right)^c=\frac{3(x-1)^2}{x+9}$

$(x-1)^{c+1}=\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)$; $x\neq 2$ не подходит

Если $6x-14=x-1$; $x=2{,}6$; $x-1=1{,}6$

$\frac{x}{3}+3=3\frac{26}{30}$; $x=2{,}6$ не подходит

Если $x-1=\frac{x}{3}+3$; $x=6$; $x-1=5$; $6x-14=16$ не подходит

② При $\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=c$; $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=c-1$

Это значит; ~~$\left(\frac{3(6x-14)}{x+9}\right)^c$~~ $\begin{cases}(6x-14)^c=(x-1)^2\\\left(\frac{x}{3}+3\right)^c=(6x-14)^2\\(x-1)^c=\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)\end{cases}$

$(x-1)^{(c-1)c}=\left(\frac{x}{3}+3\right)^c=(6x-14)^2=(x-1)^{\frac{4}{c}}$

$c=2$; $x-1=\frac{x}{3}+3$; $x=6$ не подходит

Математика 11 кл.

Чистовик

Лист 1.

Задача 4.

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 15 \\ НОК(a, b, c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

$a \vdots 15$; $b \vdots 15$; $c \vdots 15$

$5^{18}\cdot 3^{15} \vdots a(b,c)$

Одно из чисел делится на 3^{15} ~~, допустим это a~~.

Одно из чисел не делится на 9, но делится на 3 ~~, допустим это b~~.

Тогда $(a,b,c) = 3^{\alpha_c}\cdot 5^{\beta_c}$, где $1 \le \alpha_c \le 15$; $\alpha_c \in \mathbb{Z}$.

Также для 5.

Одно из чисел делится на 5^{18}. Одно из чисел не делится на 25, но делится на 5. А последнее делится на 5^{γ}, но не делится на $5^{\gamma+1}$.

$\gamma \in \mathbb{Z}$; $1 \le \gamma \le 18$

Таблица:

	a	b	c
$\vdots 5^{18}$			
$\vdots 5$			
$\vdots 5^{\gamma}$			

~~$a = 5^{18}\cdot 3^{15}$; $b = 15$; $c = 3^{\alpha_c}\cdot 5^{\gamma}$ 15·18 вариантов~~
~~$a = 3^{15}\cdot 5$; $b = 3\cdot 5^{18}$; $c = 3^{\alpha_c}\cdot 5^{\gamma}$ 15·18 в.~~
~~$a = 5^{18}\cdot 3^{15}$; $b = 3\cdot 5^{\gamma}$; $c = 3^{\alpha_c}\cdot 5$ 15·18 в.~~
~~$a = 3^{15}\cdot 5$; $b = 3\cdot 5^{\gamma}$; $c = 3^{\alpha_c}\cdot 5^{18}$ 15·18 в.~~
~~$a = 3^{15}\cdot 5^{\gamma}$; $b = 3\cdot 5$; $c = 3^{\alpha_c}\cdot 5^{18}$ 15·18 в.~~
~~$a = 3^{15}\cdot 5^{\gamma}$; $b = 3\cdot 5^{18}$; $c = 3^{\alpha_c}\cdot 5$ 15·18 в.~~

~~$6\cdot 15\cdot 18 = 3\cdot 30\cdot 9\cdot 2 = 20\cdot 81 = 1620$ – это кол. вариантов без повторений с повторениями:~~

$a_2 \ne b_1$
$b_2 \ne a_1$
$c_2 \ne c_1$

При $\gamma = 1$; $\alpha_c = 1$; $3\cdot 3 = 9$ вариантов

При $\gamma = 1$; $\alpha_c = 15$, или $\gamma = 18$; $\alpha_c = 1$, или $\gamma = 18$; $\alpha_c = 15$; 9 вариантов

При $\gamma = 1$; $2 \le \alpha_c \le 14$: $6\cdot 3\cdot 13$ вариантов

При $\gamma = 18$; $2 \le \alpha_c \le 14$: $6\cdot 3\cdot 13$ вар.

При $\alpha_c = 1$ или $\alpha_c = 15$; $2 \le \gamma \le 17$; $6\cdot 3\cdot 16\cdot 2$ вар.

При $2 \le \alpha_c \le 14$; $2 \le \gamma \le 17$; $6\cdot 6\cdot 13\cdot 16$ вар.

$9\cdot 4 + 2\cdot 6\cdot 3\cdot 13 + 2\cdot 6\cdot 3\cdot 16 + 6\cdot 6\cdot 13\cdot 16 = 7488$

Ответ: 7488 вариантов.

2110082 (U153291 M1302459)

Черновик

$13 \times 16 = 78 + 130 = 208$; $16 \times 13 = 48 + 160 = 208$; $208 \times 36 = 1248 + 6240 = 7488$

$4\left(9 + 9\cdot13 + 9\cdot16\right) + 36\cdot13\cdot16 = 36\left(30 + 13\cdot16\right) = 208\cdot36 = 7488$

$5x = 13$; $x = 2,6$

$6x - 14 = x - 1 = 1,6$

$\frac{x}{3} + 3 = 3\frac{26}{30}$

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$; $\frac{18-1}{3}x = 17$; $x = 3$; $6x - 14 = 4 = \frac{x}{3} + 3$

$x - 1 = 2$

$\log_{\sqrt{4}} 4$; $\log_4 2^2$; $\log_2 4 = 2$

$x - 1 = \frac{x}{3} + 3$; $\frac{x\cdot2}{3} = 4$; $x = 6$; $(x-1) = \left(\frac{x}{3} + 3\right) = 5$

$6x - 14 = 16$