Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101017**

ID профиля: **283410**

Вариант 18

Ч и с т о в и к

(2)

задача 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5) & (2)\end{cases}$$

Заметим, что неравенство (1) задаёт круг с центром в т. (a; b) и радиусом $R_1=\sqrt5$ (в плоскости xOy). Запишем

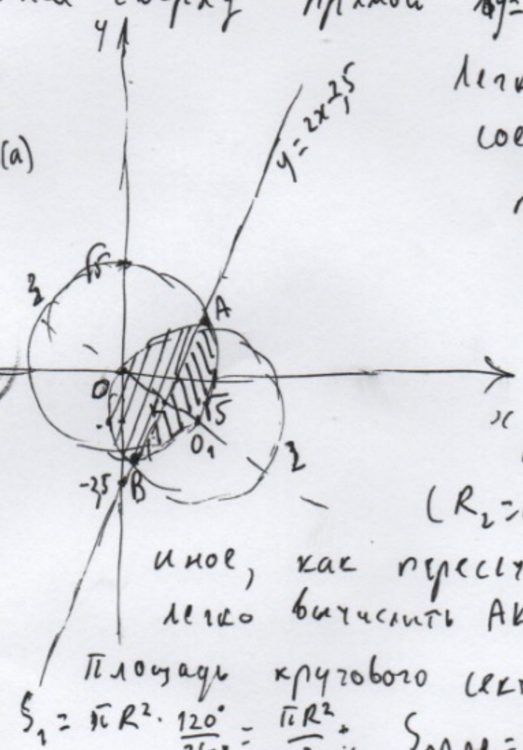
равносильную систему

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 & (1)\\ \left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 4a-2b \text{ при } 4a-2b<5\\ a^2+b^2 \le 5 \text{ при } 4a-2b \ge 5\end{array}\right. & (2)\end{cases}$$

Суть задачи – найти суммарную площадь, перекрываемую всевозможными кругами 1 при любых допустимых значениях a и b. Приведём систему условий (2) к виду

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5\\ b > 2a-2{,}5\end{cases} (а)\\ \begin{cases}a^2+b^2 \le 5\\ b \le 2a-2{,}5\end{cases} (б).\end{array}\right.$$

Эта совокупность задаёт множество точек (a, b), которые могут являться центром круга 1. Совокупность представляет собой объединение множеств (а) и (б). Множество (а) – часть круга$_а$ 2 с центром в т. (2; −1) и радиусом $R_2=\sqrt5$, ограниченная снизу прямой $y=2x-2{,}5$; множество (б) – часть круга с центром в т. (0; 0) и радиусом $R_3=\sqrt5$, ограниченная сверху прямой $y=2x-2{,}5$ (см. рис.) Заметим, что $R_1=R_2=R_3=R=\sqrt5$.



Легко заметить, что прямая OO_1, соед. центры кругов (2) и (3), перп-лярна прямой $y=2x-2{,}5$ и проходит через центр отрезка OO_1 K ($K(1; -\frac12)$; $-\frac12 = 2\cdot1-2{,}5$ верно), поэтому прямая $y=2x-2{,}5$ проходит через обе точки пересеч. окр-тей (3) и (2) A и B ($R_2=R_3$), а множество (а)∪(б) есть не что иное, как пересечение кругов (2) и (3). По т. Пифагора легко вычислить $AK=\frac{\sqrt{15}}{2}$ и $AB=\sqrt{15}$; $\cos\varphi=\frac12$, $\varphi=60°$; $\angle AOB = 2\varphi = 120°$ (см. рис.)

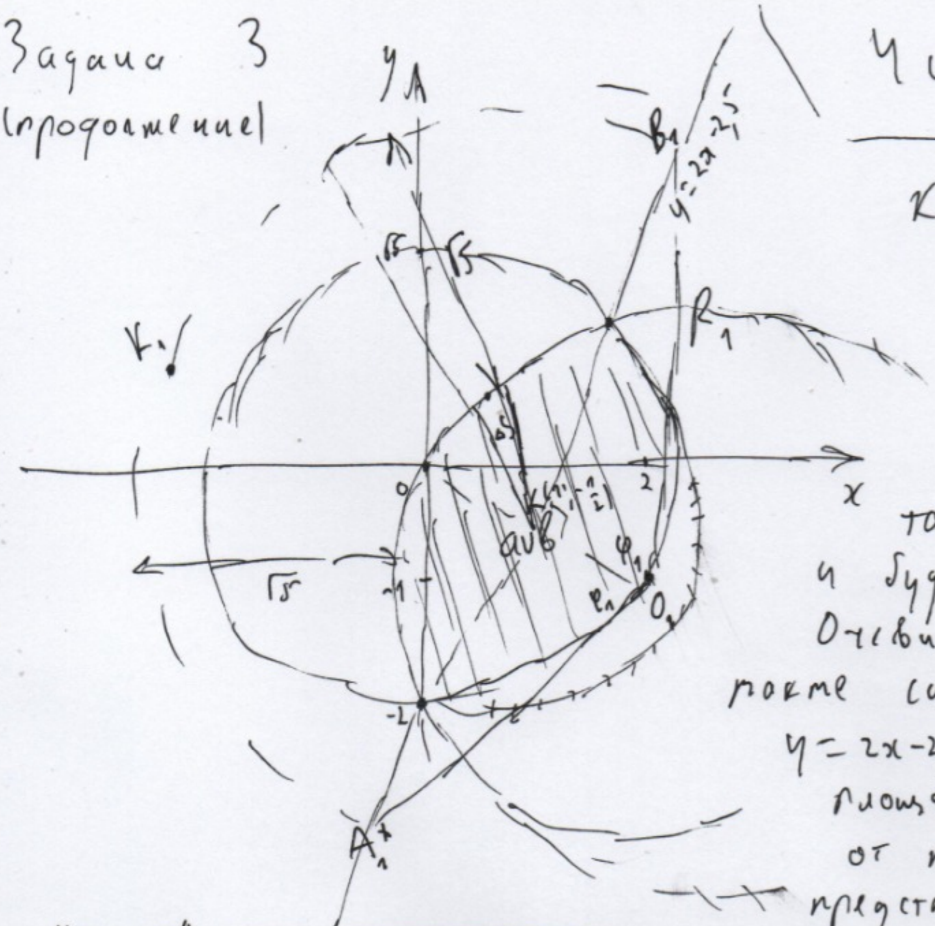
Площадь кругового сектора O_1BOA равна $S_1=\pi R^2\cdot\frac{120°}{360°}=\frac{\pi R^2}{3}$; $S_{\triangle O_1AB}=\frac12\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{5\sqrt3}{4}$, отсюда площадь $S_б$ фигуры, соответств. множеству (б), равна $S_б=S_1-S_{\triangle O_1AB}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{5\sqrt3}{4}$, очевидно, $S_а=S_б \Rightarrow S_{аб}=S_а+S_б=\frac{2\pi R^2}{3}-\frac{5\sqrt3}{2}$. Итак, мы получили множество точек, которые могут быть центрами круга (1).

21101017 (U283410 M1304464)

Задача 3 (продолжение)

Чистовик

3



Когда мы нарисуем всевозможные круги 1 с центрами во всех точках множества $a\cup b$, ~~то~~ то суммарная перекрытая этими кругами площадь и будет фигурой M. ~~Заметим~~ Очевидно, что эта площадь тоже симметрична относ. прямой $y=2x-2{,}5$. ~~Полови~~ „Половинка" этой площади S_I (напр., слева от прямой $y=2x-2{,}5$) представляет собой ~~„участка „кольца" шириной $d=R=\sqrt5$ и „внутренней" и „внешней" длиной $L_1=\frac{2\pi R}{3}$~~ сумму разницу площади сектора $O_1A_1K_1B_1$ (см. рис.) и площади $\triangle O_1A_1B_1$: ~~$S_I=S$~~ Заметим, что $B_1K=A_1K=\frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt5=\sqrt5\left(\frac{\sqrt3}{2}+1\right)$; $O_1K=\frac{\sqrt5}{2}$, тогда $tg\,\varphi_1=\frac{\sqrt5\left(\frac{\sqrt3}{2}+1\right)}{\frac{\sqrt5}{2}}=\sqrt3+2$; ~~$S_I=$~~ $\cos\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{6+4\sqrt3}}$, откуда найдем $R_1=\frac{\sqrt5}{2}/\cos\varphi_1=\sqrt{7{,}5+5\sqrt3}$, $S_I=\pi R_1^2\cdot\frac{arctg(\sqrt3+2)}{360°}-\frac{1}{2}\cdot A_1B_1\cdot O_1K=\ldots$

Черновик

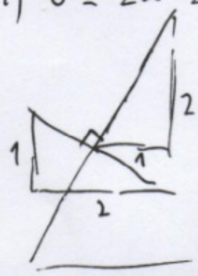
Задача 3.

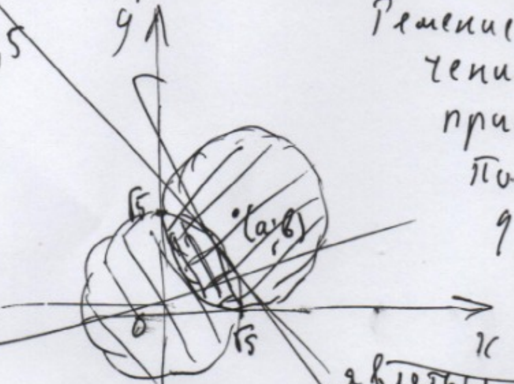
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;\ 5) & (2)\end{cases}$$

Найти площадь фигуры M, состоящей из всех точек $(x; y)$

Заметим, что неравенство (1) задаёт круг ~~на~~ с центром в т. $(a; b)$ ~~и~~ и радиусом $R_1=\sqrt5$ (в плоскости xOy), ~~а ур-е (2) -~~ неравенство (2) – круг с центром в т. $(0; 0)$ и радиусом $R_2=\sqrt{\min(4a-2b;5)}$ (если, конечно, ~~кор~~ $\min(4a-2b;5)\ge 0$, при $\min(4a-2b;5)=0$ круг вырождается в точку $(0;0)$). Целесообразно рассмотреть 2 случая: 1) $4a-2b\ge 5$, тогда $R_2=\sqrt5$. ~~(система имеет решение <=> 2 круга имеют хотя бы 1 общ. точку.~~

1) $b \le 2a-2{,}5$

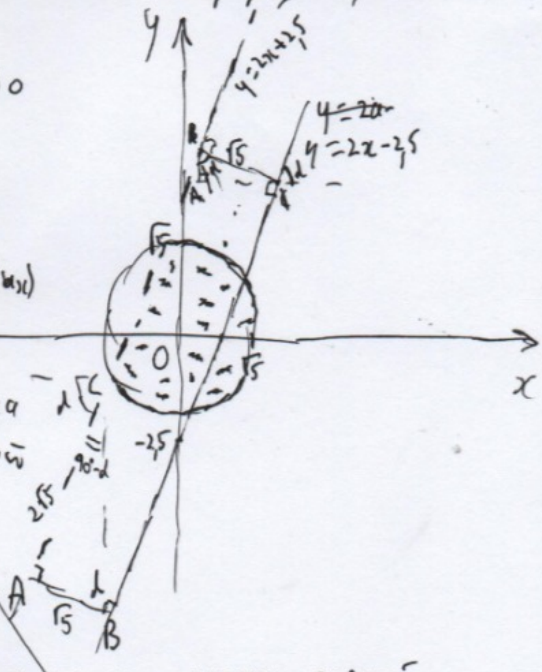




Решение системы – ~~пересеч~~ область пересечения двух кругов. Очевидно, эта область принадлежит кругу 1 (радиуса R_1).

~~Положим a=0, b=0, тогда круги совпадут, и весь круг 1 окажется решением. В то же время любая другая точка, не принадлежащая кругу 1, решением являться не может.~~

Т.к. ~~а~~ $b \le 2a-2{,}5$, то в нашем случае центр круга 2 лежит ниже прямой $y=2x-2{,}5$ или на ней (см. рис. справа). Т.о., при любых (всевозможных) допустимых значениях a, b ~~это~~ суммарная площадь, закрываемая всевозможными кругами 2, будет ограничена сверху прямой, проведённой параллельно прямой $y=2x-2{,}5$ на расст. ~~$\sqrt5$~~ $R_2=\sqrt5$ сверху от неё (на рис. обозначена пунктиром), и „перекрыть" ~~за~~ эта площадь сможет лишь часть круга 1 (показано на рис.).



В ~~т~~ $\triangle ABC$ $\angle ABC=\alpha$, где α - ~~угол~~ угол наклона прямой $y=2x-2{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, т.е. $AC=2AB=2\sqrt5$, ~~$5x^2=5$, $x^2=1$, $x=1$; $AC=2$, $AB=1$ (т. Пифагора)~~ ~~B~~ $BC=\sqrt{5+4\cdot5}=5$ по т. Пифагора, тогда пунктирная прямая, ограничивающая площадь, задаётся ур-ем $y=2x-2{,}5+5$, т.е. $y=2x+2{,}5$

Подставим ~~$y=2x+2{,}5$~~ т. $(x,\ 2x+2{,}5)$ в ур-е окр-ти (1)

$x^2+y^2=5$

21101017 (U283410 M1304464)

Чистовик

1

Задача 1.

$S = \frac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 6d)\cdot 7}{2} = (a_1+3d)\cdot 7$ (здесь d - разность прогрессии, $d>0$)

$a_7 a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > S+20,$

т.е. $a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + (17d-7)a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0$

$a_1, a_2, a_3 \ldots$ - целые числа

$a_9 a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < S+44$

Заметим, что $\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > S+20 \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < S+44 \end{cases}$ т.к. $72d^2 - 66d^2 = 6d^2 > 0$, то $a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 > a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2$,

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d_1 + 72d^2 < S+44 \\ -a_1^2 - 17a_1 d_1 - 66d^2 < -S-20 \end{cases} \Rightarrow 6d^2 < 24;\ d^2 < 4;$ т.к. $a_1, a_2, a_3 \ldots$ - целые числа, то и $d \in \mathbb{Z}$, с учётом $d>0$ $\underline{d=1}$

тогда $S = (a_1 + 3\cdot 1)\cdot 7 = 7a_1 + 21;$

$a_7 a_{12} = a_1^2 + 17a_1 \cdot 1 + 66 = a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a_1+5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$

и

$a_9 a_{10} = a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65;\quad a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0;\quad (a_1 + 5 - 3\sqrt{2})(a_1 + 5 + 3\sqrt{2}) < 0$

$a \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

С уч. $a \in \mathbb{Z}$ $a \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

$(1{,}4 = \sqrt{1{,}96} < \sqrt{2} < \sqrt{2{,}25} = 1{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 < 3\sqrt{2} < 5)$

Кроме того, $a \neq -5$, поэтому
$a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

21101017 (U283410 M1304464)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101017**

ID профиля: **283410**

Вариант 18

Чистовик

1

Задача 4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=15 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{15}\cdot 15^{18} \end{cases}$$

$15=5\cdot 3$, $3^{15}\cdot 15^{18}=3^{15}\cdot 3^{18}\cdot 5^{18}=3^{33}\cdot 5^{18}=\cancel{\text{НОК}}(a,b,c)$, ~~Пусть~~ $\cancel{a=3^{n}5^{m}}$ $=\text{НОК}(a,b,c)$, тогда числа a, b, c можно представить в виде $\begin{cases} a=3^{n_1}\cdot 5^{m_1} \\ b=3^{n_2}\cdot 5^{m_2} \\ c=3^{n_3}\cdot 5^{m_3} \end{cases}$, где $n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}$, $n_1\dots m_3\geq 0$.

т.к. $\text{НОД}(a,b,c)=15$, это означает, что $\cancel{n_1,n_2\dots m_2,m_3\neq 0}$, $\min(n_1,n_2,n_3)=1$ и $\min(m_1,m_2,m_3)=1$

($\text{НОД}(a,b,c)=\min(3^{n_1},3^{n_2},3^{n_3})\cdot\min(5^{m_1},5^{m_2},5^{m_3})=3^{n}\cdot 5^{m}$, где $n=\min(n_1,n_2,n_3)$, $m=\min(m_1,m_2,m_3)$; $15=3^1\cdot 5^1$, т.е. $m=1$, $n=1$)

$\text{НОК}(a,b,c)=\cancel{\text{НОД}(a,b,c)}\max(3^{n_1},3^{n_2},3^{n_3})\cdot\max(5^{m_1},5^{m_2},5^{m_3})=3^{n'}\cdot 5^{m'}$, где $n'=\max(n_1,n_2,n_3)$; $m'=\max(m_1,m_2,m_3)$; т.к. $\text{НОК}(a,b,c)=3^{n'}\cdot 5^{m'}=3^{33}\cdot 5^{18}$, то $n'=33$, $m'=18$. Имеем систему

$$\begin{cases} \min(n_1,n_2,n_3)=1 \\ \max(n_1,n_2,n_3)=33 \\ \min(m_1,m_2,m_3)=1 \\ \max(m_1,m_2,m_3)=18 \end{cases}$$

Отметим, что мы определили ~~минимал~~ меньшее и большее из чисел n_1,n_2,n_3. А последнее, „среднее" или „промежуточное" число из этой тройки, очевидно принадлежит $[\min(n_1,n_2,n_3);\max(n_1,n_2,n_3)]$, т.е. $1\leq n_{ср}\leq 33$.

Аналогично, $1\leq m_{ср}\leq 18$. Итого по принципу комбинаторного умножения имеем $33\cdot 18=594$ неупорядоченных(!) вариантов ~~набо множеств~~ „набора" множества $\{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,m_3\}$

Но как-то порядок важен! По сути, мы должны найти, сколькими способами можно ~~переставить~~ элементам множества $\{n_1,n_2,n_3\}$ (присвоить значения $1, 33, n_{ср}$) (так, чтобы получились разные упорядоченные множества!), то же самое проделать с m_1,m_2,m_3 и результаты перемножить.

Если $1<n_{ср}<33$, то число способов составить „упорядоченное" множество $\{n_1,n_2,n_3\}$ составит $3!=6$ (при данном $n_{ср}$), если же $n_{ср}=1$ или $n_{ср}=33$, таких способов будет 3 (число, не равное $n_{ср}$, ставим 3-мя способами)

Аналогично для $\{m_1,m_2,m_3\}$: при $1<m_{ср}<18$ 6 способов перестановки элементов внутри множества, при $m_{ср}=1$ или $m_{ср}=18$ 3 таких способа.

Назовем набор $\{n_1\dots m_3\}$ хорошим, если $n_{ср}\in(1;33)$ и $m_{ср}\in(1;18)$, будем иметь $31\cdot 16=496$ хороших наборов; плохим, если выполняется ровно одно из условий $n_{ср}\in\{1;33\}$ и $m_{ср}\in\{1;18\}$ (94 плохих набора) и очень плохим, если условия $n_{ср}\in\{1;33\}$, $m_{ср}\in\{1;18\}$ выполняются одновременно (4 очень плохих набора)

($94=2\cdot 16+31\cdot 2$)

Чистовик

②

Задача 4 (продолжение)

Итак каждый хороший набор приходится $6\cdot6=36$ вариантов перестановки элементов, на каждый плохой — $6\cdot3=18$ таких способов, на каждый очень плохой — $3\cdot3=9$ таких способов. Поэтому всего имеем $K=496\cdot36+94\cdot18+4\cdot9=$
$=36(496+47+1)=36\cdot544=19584$ троек $(a;b;c)$

Ответ: 19584.

Чистовик

Задача 5

3

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$ ОДЗ: $\begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \neq 2,5 \end{cases}$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2 = k$

$\cancel{\log(6x-14)} \cdot \log_{6x-14}(x-1)^2 = \frac{1}{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$; $\cancel{\frac{1}{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}} = (\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3})^{-1}}$

$\cancel{\boxed{\log_{6x-14}(x-1)^2 \cdot \log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 1}}$

~~тогда~~ $\cancel{\log_{6x-14}(x-1)^2}$ $\cancel{\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = \log_{6x-14}(x-1)^2 - 1} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) + \log_{x-1}(x-1) = \log_{6x-14}(x-1)^2 \Rightarrow \log_{x-1}((\frac{x}{3}+3)(x-1)) = \frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)}}$;

$\cancel{\boxed{\log_{x-1}((\frac{x}{3}+3)(x-1)) \cdot \log_{x-1}(6x-14) = 2}}$ и $\cancel{\boxed{\log_{6x-14}(x-1)^2 \cdot \log_{6x-14}(\frac{x}{3}+3) = 2}}$

Введём для удобства обозначения $6x-14 = a$, $\frac{x}{3}+3 = b$, $x-1 = c$.

тогда 1) $\begin{cases} \log_b a = \log_a c^2 = k \\ \log_c b^2 = \log_b a - 1 \end{cases}$ $\cancel{c^2 = a^{\log_a c^2} = a^{\log_b a}}$

$a = b^k$; $c^2 = a^k = b^{k^2} = \cancel{(b^k)^2}$; $c = b^k$,

$\log_b c = k$; $\log_c b^2 = 2\log_c b = \frac{2}{\log_b c} = \frac{2}{k}$,

тогда $\frac{2}{k} = k - 1$, $k^2 - k - 2 = 0$; $D = 9$; $k = 2$ или $k = -1$

$\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)}$

$\left[\begin{array}{l} \log_{6x-14}(x-1)^2 = 2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2 = -1 \end{array}\right.$ $\overset{\text{в ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$ $\left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = (6x-14)^2 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x-1 = 6x-14 \Leftrightarrow x = 2,6 \\ (x-1)^2 = \frac{1}{6x-14} \Leftrightarrow \text{~~нет корней в ОДЗ~~} \; x_5 \text{ посл. корень} \end{array}\right.$

2) $\cancel{\begin{cases} \log_b a = \log_c b^2 = k \\ \log_a c^2 = \log_b a - 1 \end{cases}}$ $\cancel{a = b^k;\ b^2 = c^k;}\ a = (b^2)^{\frac{k}{2}} = c^{\frac{k^2}{2}}$

2) $\begin{cases} \log_b a = \log_c b^2 \\ \log_a c^2 = \log_b a - 1 \end{cases}$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1) = 2\log_a c$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_b a$

$\begin{cases} \log_b a = 2\log_c b \\ 2\log_a c = \log_b a - 1 \end{cases}$

$2\log_a c = 2\log_c b - 1$

21101017 (U283410 M1304465)

Черновик

$A = abc$ $\quad$ $НОД(A, B, C) = a$

$B = acd$

$C = ade$ $\quad$ $НОК(A, B, C) = abcde$

$НОК(A, B, C) =$

$$\begin{array}{r} \times\ 544 \\ 36 \\ \hline 3264 \\ +1632\ \ \\ \hline 19584 \end{array}$$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = \dfrac{\log_{6x-14}(6x-14)}{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{6x-14}(x-1)^2 - 1$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = \dfrac{1}{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1) = \log$

$\log_b a = \log_a c^2$; $\quad \log_c b^2 = \log_b a - 1 = \log_b \frac{a}{b}$

$\log_a c^2 = \dfrac{1}{\log_a b}$

$\begin{cases} \log_a b + \log_a c^2 = 1 \\ \end{cases}$

$\cancel{\sqrt{\frac{x}{3}+3}^{\,k} = 6x-14}$

$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}+3\right)^k = 6x-14 \\ \cancel{6x-14}\ 6x-14^k = (x-1)^2 \end{cases}$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^{2k} = (x-1)^2$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^k = (x-1)$

$6x-14 = \left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^k$; $\quad (x-1)^2 = 6x-14$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) = \log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$6x^3 - 14x^2 - 12x^2 + 28x + 6x - 14 = 0$

$6x^3 - 26x^2 + 34x - 15 = 0$ $\quad$ $48 - 104 + 68 - 15 =$

~~$x = 1$ — корень~~ $\quad$ $x = 3$ $\quad$ $\cancel{162 - 234} + 102$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_b a = \log_a c^2 \\ \log_c b^2 = \log_b a - 1 \end{cases}$

21101017 (U283410 M1304465)