Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100985**

ID профиля: **863630**

Вариант 18

Чистовик.

№1. Пусть разность между числами d, тогда

$a_1+a_2+\dots a_7 = S = \cancel{\frac{a_1+a_1+6d}{2}(a_1+3d)\cdot 7}$ $\quad \frac{a_1+a_1+6d}{2}=(a_1+3d)\cdot 7$

По условию $a_1, d>0$, и целые

Из первого данных неравенств

$a_7\cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) > S+20$

$a_9\cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44$

Рассмотрим первое неравенство

(1) $a_1^2+17a_1d+66d^2 > 7a_1+21d+20$

$a_1^2+17a_1d+66d^2-7a_1-21d-20>0$

$a_1^2+(17d-7)a_1+66d^2-21d-20>0$

(2) Аналогично из второго неравенства следует:

$a_1^2+(17d-7)a_1+72d^2-21d-44<0$

$-a_1^2-(17d-7)a_1-72d^2+21d+44>0$

(3) Сложим условия получаем

$24-6d^2>0$

$d\in(-2;2)$

Получаем $d=1$.

(4) Подставим в первое неравенство:

$a_1^2+10a_1+66-21-20>0$

$\cancel{(a_1+25)}\ (a_1+5)>0$

$a_1=-5$.

(5) Подставим во второе неравенство:

$a_1^2+10a_1+72-21-44<0$

$a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2})$

(6) Так как a – целое, то $4<3\sqrt{2}<5$, тогда

$\cancel{a\in\{-9,-1}$ $a\in\{-9;\dots;-1\}$

21100985 (U863630 M1304682)

(7) Ответ: $a\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$

Чистовик

№3 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$

Второе неравенство:

$a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)$

(1) $4a-2b\geqslant 5$:

$$a^2+b^2\le 5$$

Решение - круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{5}$. С учётом условия $4a-2b\geqslant 5$ от круга остаётся небольшая область ниже прямой $4a-2b=5$

(2) Если $4a-2b>5$

$$a^2+b^2\le 4a-2b$$
$$a^2-4a+4-4+b^2+2b+1-1\le 0$$
$$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$$

Решение - круг с центром в точке $(2;-1)$ с радиусом $\sqrt{5}$. С учётом условия $4a-2b=5$ Эти две области расположены симметрично по разные стороны прямой $4a-2b=5$ и они являются частями окружностей. Поэтому область всех возможных решений $(a;b)$ - пересечение двух окружностей радиуса $\sqrt{5}$ и с центрами в $(0;0)$ и $(2;-1)$.

Первое неравенство

$$(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$$

Решение - круг с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{5}$. И мы уже нашли множество всех возможных значений $(a;b)$. Тогда нарисуем для каждой точки полученной области окр. радиуса $\sqrt{5}$. В получится искомая фигура - эллипс. Найдём его полуоси A и B. Расстояние между центрами $(0;0)$ и $(2;1)$ равно $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ Тогда малая полуось:

$2B=\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ - к расстоянию между центрами окр. прибавим ещё два радиуса - решений первой системы. Большая полуось: $2A=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)$

Отсюда $A=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)}{2}$; $B=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ Тогда площадь полученного эллипса равна $\pi\cdot A\cdot B=\frac{15\pi(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}$

Ответ: $\frac{15\pi(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}$

2

Чистовик

№2 Рассмотрим шары с центрами C и D и радиусами 5 и 7, соответственно. Заметим, что плоскость их сечения параллельна основанию цилиндра и перпендикулярна оси, т.е. CD.

Тогда пусть O – пересечение этой плоскости с CD $\Rightarrow$ $\triangle ABO$ – вписан в окр цилиндра и $AO \perp CD$ $BO \perp CD$ $\Rightarrow$ радиус окр не меньше половины хорды $AB = 2$ $\Rightarrow$ радиус $= 1$ AB-диаметр

$\angle AOB$ – прямой $\Rightarrow$ $OA = OB = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $CO = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{23}$

$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{47}$

$\Downarrow$

$CD = DO \pm CO = \sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

(зависит от того находится ли C внутри шара с центром в D)

21100985 (U863630 M1304682)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100985**

ID профиля: **863630**

Вариант 18

Чистовик

№4

$НОД(a, b, c) = 15$

$НОК(a, b, c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$3^{15} \cdot 5^{18} \vdots a$ => в разложении a непростые только 3 и 5, аналогично про b и c

① Пусть (a_1, b_1, c_1) — степени вхождение 3 в a, b, c соответсвенно

(a_2, b_2, c_2) — степени вхождения 5 в a, b, c соответственно.

$НОД(a, b, c) = 15 \Rightarrow \min(a_1, b_1, c_1) = 1$

$\min(a_2, b_2, c_2) = 1$

$НОК(a, b, c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow \max(a_1, b_1, c_1) = 15$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 18$

② Значит в (a_1, b_1, c_1) есть одна 1, одна 15 и ещё число от 1 до 15. Вариантов, где 15 встречается не дважды и где 1 встречается не дважды, их $13 \cdot 3!$, где все $3!$ перестановки возможны, а в $(1, 1, 15)$ и $(1, 15, 15)$ только по три перестановки и того $13 \cdot 3! + 6 = 84$

③ Аналогично считаем для (a_2, b_2, c_2): $(18-2) \cdot 3! + 6 = 102$

Далее выбираем любую тройку (a_1, b_1, c_1) и скрещиваем с любой из (a_2, b_2, c_2) — и очевидно получим все решения. И того получится $84 \cdot 102 = 8568$ вариантов

Ответ: 8568 вариантов.

21100985 (U863630 M1304683)

Чистовик.

№5 $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$$6x-14>0 \Rightarrow x>\frac{14}{6}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$$

$$\log_{6x-14}(x-1)^2=2\log_{6x-14}(x-1) \qquad x>\frac{14}{6}>1$$

① Рассмотрим произведение логарифмов из условия:

$$2\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \ominus$$

(пусть $\frac{x}{3}+3=a$;

$6x-14=b$;

$x-1=c$)

$$\ominus\ 4\cdot\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=4\cdot\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{c_1}{b_1}\cdot\frac{a_1}{c_1}=4$$

② Если $a=e^{a_1}$

$b=e^{b_1}$

$c=e^{c_1}$, то это верно (если именно из a_1, b_1, c_1 не равен 1), но никто из них не равен одному. Т.к. изначально логарифмы сущ.

Если 2 из наших логарифмов равны 4, то:

$$4u\cdot(u-1)=4$$

$$4^3-u^2=4$$

$$u^3-u^2-4=0$$

$$(u-2)(u^2+4+2)=0$$

$$D<0 \Rightarrow u=2$$

③ Значит $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$ равен либо 2 либо 1.

Первое: $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$

$$x-1=\frac{x}{3}+3$$

$$3x-3=x+9$$

$$2x=12$$

$$x=6;$$

Чистовик

Но $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6\cdot 6-14) = 2\log_{\sqrt{5}} 22 \neq 2.$

то есть 6 - не подходит

Второе: $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$\frac{x}{3}+3=(x-1)^2$

$x+9=3x^2-6x+3$

$3x^2-7x-6=0$

$D=49+72=121$

$x_{1,2}=\frac{7\pm 11}{6}$

$x_1=3$ $\quad x_2=-\frac{2}{3}<\frac{14}{6}$

(а мы знаем, что $x>\frac{14}{6}$)

$x=3$

$\log_{\sqrt{\frac{3}{3}+3}}(6\cdot 3-14)=\log_2 4=2$

$\log_{6\cdot 3-14} 4=\log_4 4=1$

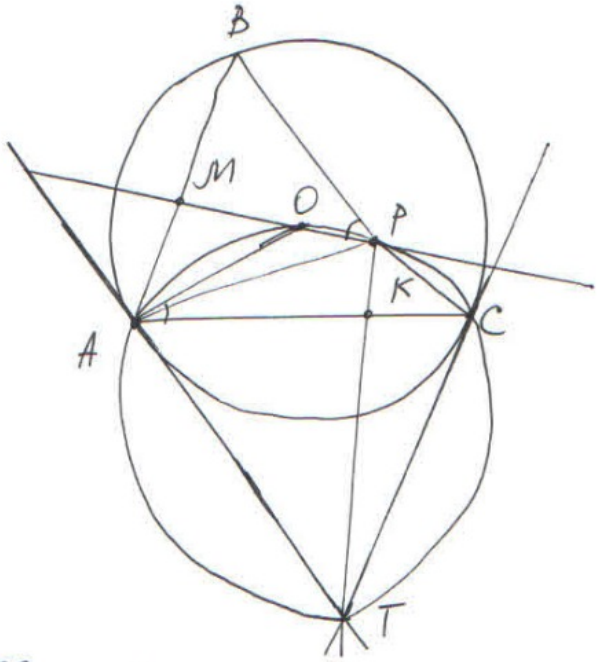
$\log_{3-1}\left(\frac{3}{3}+3\right)=\log_2 4=2$

Ответ: 3

21100985 (U863630 M1304683)

Чистовик

№6



$\angle AOC = 2\angle ABC$, тогда $\angle AOC = 90 - \frac{1}{2}\angle DAC = 90 - \angle CAB$

Тогда если окр. AOC пересекает параллельно отрезок BC

в точках P и C , то $\angle BOP = \angle OAC = 90 - \angle BAC$

Значит $OP \perp AB$, тогда OP – серединный перпендикуляр к AB

Пусть M – середина AB , тогда $BP = AP$

$\frac{AP}{PC} = \frac{\sin\angle ATP}{\sin\angle PTC} =$ (т.к. точки лежат на одной окружности)

$= \frac{AK}{KC}$

$\frac{AP}{PC} = \cancel{\frac{9}{8}}\ \frac{6}{5}$ /

$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC}$, т.е. $(BP = AP)$ и равно $\frac{6}{5}$

Тогда $S_{ABP} = \frac{6}{5}(6+5)$ и $S = 11 + \frac{6}{5}(6+5)$

Ответ: $S = 11 + \frac{6}{5}(6+5)$