# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100956**

ID профиля: **840199**

Вариант 18

Черновик 1.

Дано:

$1+2+3+4+5+6 = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$

N1 $a_1+a_2+\ldots+a_7 = S$

$a_n \in \mathbb{Z}$

$a_7 \cdot a_{12} > S+20$

$a_9 \cdot a_{10} < S+44$

$a_1 = ?$

$a_2 > a_1$

$\underbrace{a_1}_{1}+\underbrace{a_1+d}_{2}+\underbrace{a_1+2d}_{3}+\ldots+\underbrace{a_1+6d}_{7} = S$

$7a_1+21d = S$

$S>0.$

$-8d^2+24>0$

$-8d^2>-24$

$d=1$

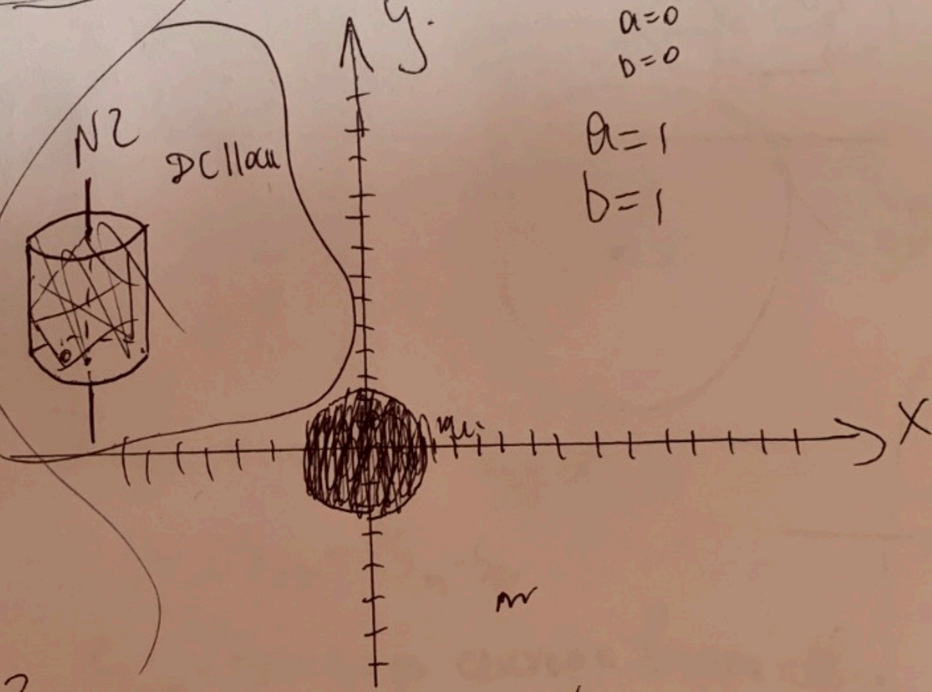
$-8>-24$

$d=2$

$-8\cdot 4$

N2

DC || аш



$a=0$
$b=0$

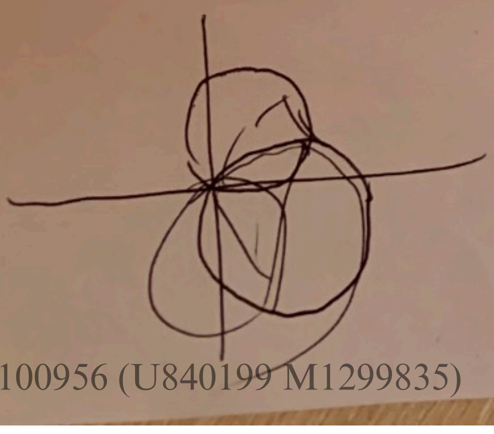
$a=1$
$b=1$

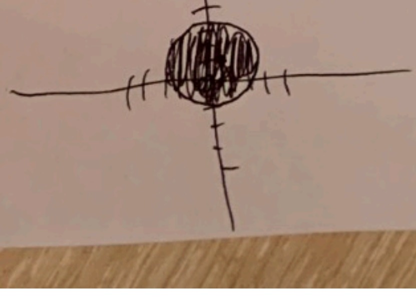
N3 $S_M = ?$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \text{ - круг с } r=\sqrt{5} \\ \underline{a^2+b^2} \le \min(4a-2b,5)\end{cases}$

$3>\sqrt{5}>2$

1) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2 \le 5 \\ 2 < \min(4-2,5)\end{cases}$





21100956 (U840199 M1299835)

Черновик 2.

$a_9 \cdot a_{10} < S+44$

$7a_1+21d=S$

$a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 > 7a_1+21d+20$

$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 = 7a_1+21d+44\end{cases}$ $\quad a_9 = a_1+8d$

$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44\end{cases}$

$\begin{cases}a_1^2+66d^2+6a_1d+11a_1d > 7a_1+21d+20 \\ a_1^2+72d^2+9a_1d+8a_1d \leq 7a_1+21d+44\end{cases}$

$\begin{cases}a_1^2+66d^2+10a_1d > 21d+20 \quad (1) \\ a_1^2+72d^2+10a_1d < 21d+44 \quad (2)\end{cases}$

~~(2)-(1)~~

$\begin{cases}a_1^2+66d^2+10_1d-21d > 20 \\ a_1^2+72d^2+10a_1d <\end{cases}$

$S = \sum_1^7 a_i \quad , 0,1(i-1)d, \ d>0 \ , d\in N$

$72-66=6$

(1)-(2)

$a_1+10a_1+25>0$

$d=1$

$a=$

$a_1^2+10a+9<0$

$D=8^2$

$D=100-4\cdot 9=64$

$a_1 = \frac{-10\pm 8}{2}$

21100956 (U840199 M1299835)

Черновик 3

№3

$$\boxed{S_M = ?}$$

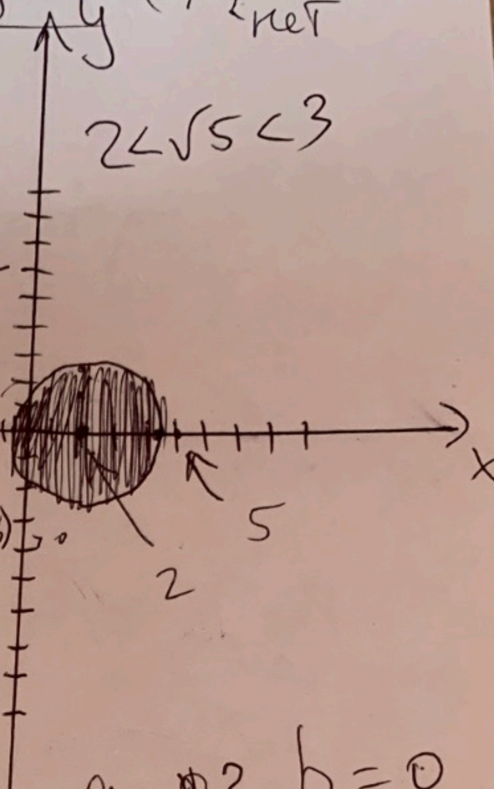
(2;0) – Работает.
(0;0)
(0;2) нет

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,5) \end{cases}$$

$2 < \sqrt{5} < 3$

1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

круг с $r=\sqrt{5}$
и центром в точке $(a;b)$




2) $\underbrace{a^2+b^2}\le \min(4a-2b,5)$

$a^2+b^2 \ge 0$

$\min(4a-2b,5) > 0$

$$\begin{cases} 4a-2b>0 \\ a^2+b^2 \ge 0 \end{cases}$$

1) ~~a = 1~~ Посмотрим че происходит.

$a=1 \quad b=1$

$(x-1)^2+(y-1)^2 \le 5$

$2 \le \min(4-2,5)$

$2$

$2<2$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \ge 0 \\ 4a-2b>0 \end{cases}$$

$4a>2b$

$a > \frac{b}{2}$

– Нет.

$a = 2 \quad b = 0$

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2 \le 5 \\ 4 \le \min(8,5) \end{cases}$$

выполн. $\begin{cases} a=2 \ b=0 \\ a= \end{cases}$

$a=2 \quad b=2$

$(x-2)^2+(y-2)^2 \le 5$

$8 \le \min(4,5)$

– Нет

1) $a \le 0$
$b \ge 0$

2) $a \ge 0$
$b \le 0$

$4-2b \ge 2\sqrt{-8ab}$

$a=3 \quad b=3$

$18 \le \min(4\cdot3-2\cdot3, 5)$

Какое-то из $a, b,$ $<0$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b,5)$ $\quad 4a-2b$

$$\frac{4a+(-2b)}{2} \ge \sqrt{4a(-2b)}$$

21100956 (U840199 M1299835)

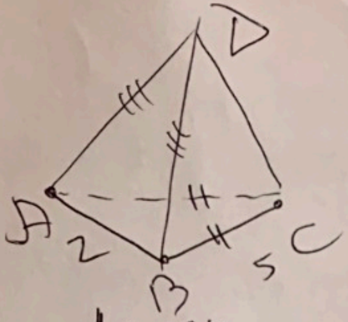
Черновик 4.

$CD = $ ...
Выбрать тэтр. с min $V$.

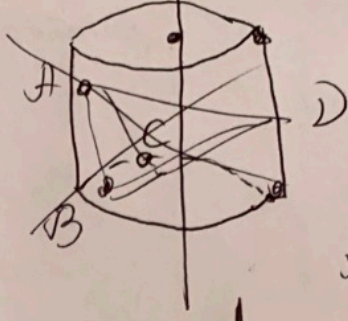
$AB = 2$, $AC = CB = 5$

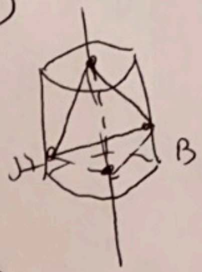
$AD = DB = 7$.

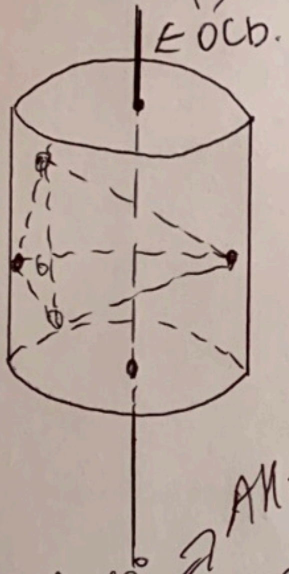
$CD \parallel$ оси цилиндра.

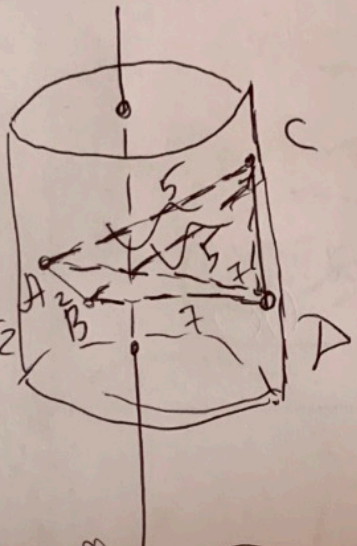


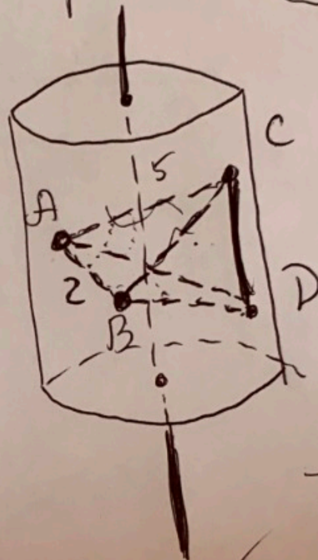




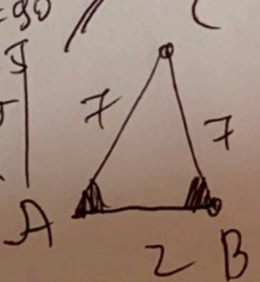

$AH = BH = \sqrt{2}$

$\angle AHB = 90^\circ$

$AC = 5$

$\angle AHC = 90$

$AB \perp \alpha$




$\cancel{4} = 98 - \cancel{2} \cdot 7 \cdot 7 \cos\angle ACB$

$4 = 98 - 98\cos\angle ACB$

$\frac{94}{98} = \frac{47}{49}$.

$\angle ACB = \arccos\frac{47}{49}$

$\frac{94}{98} = \cos\angle ACB = \frac{47}{49}$.

$\begin{cases} CD = \sqrt{3} + \sqrt{5} & H \in DC \\ CD = \sqrt{5} - \sqrt{3} & H \notin DC \end{cases}$

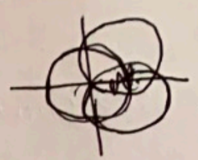
$\triangle ADC = \triangle BDC$

$\left.\begin{array}{l} AH \perp DC,\ H \in DC \\ BH \perp DC;\ H \in DC \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} H = H \\ AH = BH \\ AH, BH \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow ABH \perp DC$

$\left.\begin{array}{l} AH = \sqrt{2} \\ AC = 5 \\ \angle AHC = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow CH = \sqrt{3}$

$HD = \sqrt{5}$

Черновик 5




$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases}$$

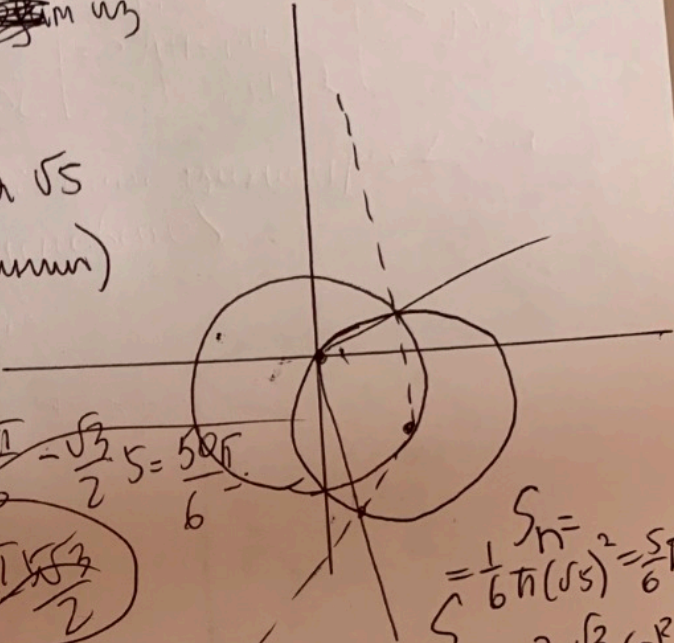
$a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

Удвоим радиусы, соотв. каждым из двух дуг фигур

Затем строим дуги радиуса $\sqrt5$ из пересеч. дуг. (волнистые линии)

$\frac{40\pi}{3}$

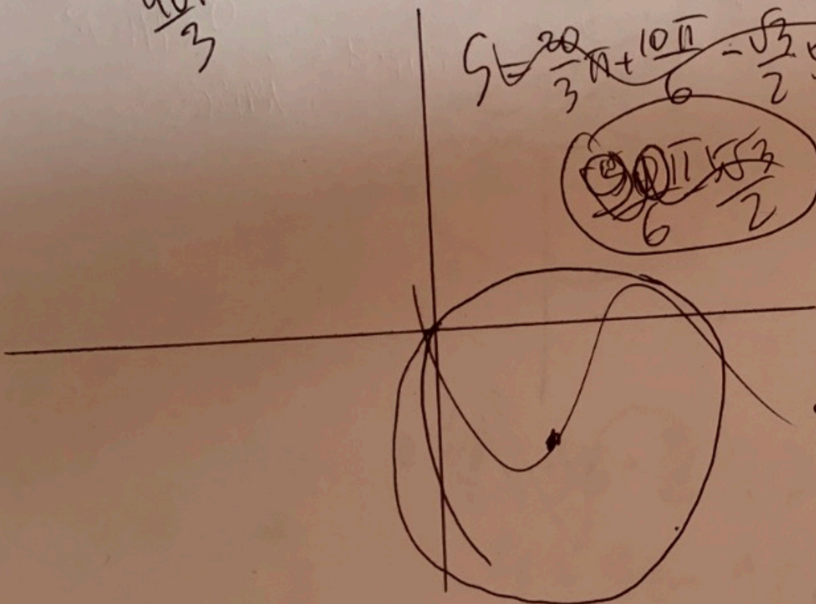


$S=\cancel{\frac{20}{3}\pi+\frac{10\pi}{6}}-\frac{\sqrt3}{2}5=\frac{50\pi}{6}$

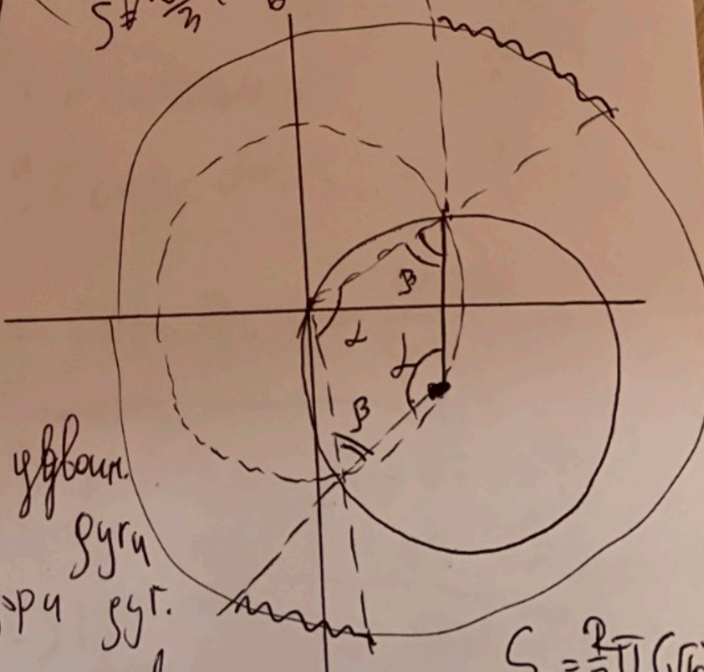
$\frac{20\pi}{6}-\frac{5\sqrt3}{2}$

$S_п=\frac16\pi(\sqrt5)^2=\frac56\pi$

$S_◊=2\cdot\frac{\sqrt3}{4}(\sqrt5)^2=\frac{\sqrt3}{2}\cdot5$



$S=\cancel{\frac{10\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}}$



Тогда площадь будет

$S=2S_{2п}+2S_п-S_◊$

$S_{2п}$ – площадь сектора внутри удвоин. дуги

$S_п$ – площадь сектора внутри дуг.

$S_◊$ – площадь пересеч. удв. секторов,

Легко посчитать: $\alpha=120°$ $\beta=180-120=60°$

$S_{2п}=\frac23\pi(\sqrt{10})^2=\frac{20\pi}{3}$

Чистовик 1

d-разность

№1 ~~[зачёркнуто]~~ , $d>0$, $d \in N$, $a_1 \in \mathbb{Z}$

Найти возможные знач. $a_1$

~~[зачёркнуто]~~, $S_7 = \frac{6(6+1)}{2}d = 7a_1+21d$

Арифм: ~~$a_n = a_{n-1}+d$~~ $a_1 \Rightarrow a_2 = a_1+d \Rightarrow a_3 = a_1+2d$.

$a_7 \cdot a_{12} > S+20$, где $a_7 = a_1+6d$, а $a_{12} = a_1+11d$

Значит $(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20$

$a_9 \cdot a_{10} < S+44$, где $a_9 = a_1+8d$, $a_{10} = a_1+9d$

Значит $(a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 = 7a_1+21d+44$

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1d-7a_1+(66d^2-21d-20)>0 & (1) \text{ — это из первого} \\ a_1^2+17a_1d-7a_1+(72d^2-21d-44)<0 & (2) \end{cases}$$

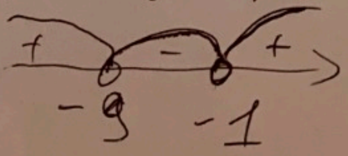
просто пометка для удобства

Вычтем из первого второе, то есть (1)-(2).

$-8d^2+24>0$ т.к. $d \in N \Rightarrow d=1$, (если $d \geq 2$, то л.ч. меньше нуля)

1) $a_1^2+10a_1+25>0 \Leftrightarrow (a_1+5)^2>0$, $a_1 \neq -5$

2) $a_1^2+10a+9<0 \Leftrightarrow (a_1+9)(a_1+1)<0$, $a \in (-9;-1)$




~~Значит~~ Т.к. $a$ – целое число, значит

$a_1 \in \{-8; -7; -6; \text{[зачёркнуто]}; -4; -3; -2\}$

Ответ: -8, ~~-7~~, -6, ~~[зачёркнуто]~~, -4, -3, -2.

Чистовик 2

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5) & (2)\end{cases}\qquad S_M=?$$

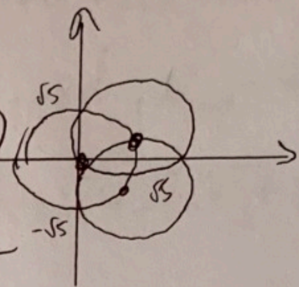
(1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ – круг с $r=\sqrt{5}$ и центром в точке $(a;b)$. $2<\sqrt{5}<3$, т.к. $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$

2) $a^2+b^2\ge 0$ ... $4a-2b\ge 0$

Приходим к:

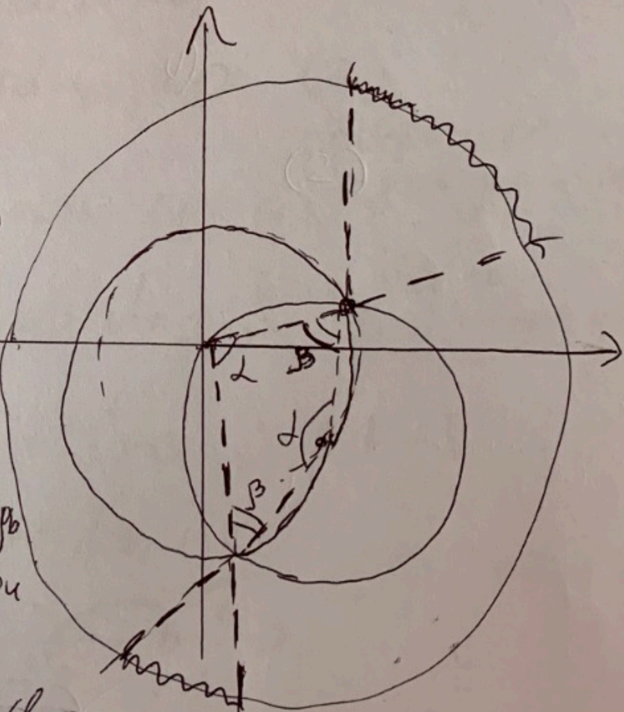
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases}$$

Получается фигура для а и b (из второго условия)




Удвоим радиусы соотв. каждой из двух дуг нашей фигуры и построим удвоенные дуги

Затем построим дуги радиуса $\sqrt{5}$ из точек пересеч. дуг (волнистые линии на рисунке)




Легко посчитать/увидеть что $\alpha=120°$, а $\beta=180-\alpha=60°$

Тогда площадь фигуры M будет:

$S_M=2S_{2n}+2S_n-S_\lozenge$, где $S_{2n}$ – площадь сектора внутри удвоенной дуги.

$S_n$ – площадь сектора внутри дуг.

$S_\lozenge$ – площадь пересеч. удв. секторов (вычесть)

$S_{2n}=\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{5})^2=\frac{20\pi}{3}$,

$S_n=\frac{1}{6}\pi(\sqrt{5})^2=\frac{5\pi}{6}$, $S_\lozenge=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5})^2=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

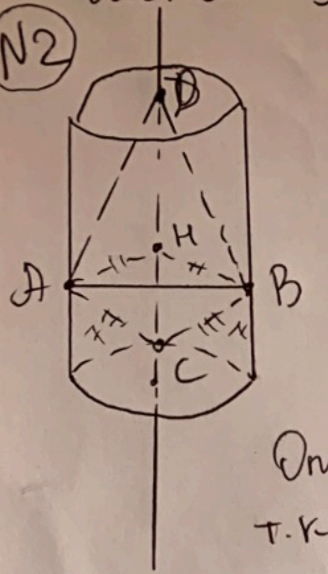
Тогда $S_M=2\frac{20\pi}{3}+\frac{10\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5=\frac{90\pi}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{90\pi}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

21100956 (U840199 M1299835)

Чистовик 3

№2




Дано:
$AB=2$
$AC=CB=5$
$AD=DB=7$
$DC \parallel$ оси цилиндра

Найти, $CD=?$
R-цилиндра мин.

Решение:

$\triangle ADC=\triangle BDC$
$AH \perp DC, H \in DC$
$BH' \perp DC, H' \in DC$
$\Rightarrow H=H'$, $AH=BH$, $AH, BH \perp \alpha$ $\Rightarrow ABH \perp DC$

Описанной о. ABH - сечении цилиндра $\perp$ оси т.к. $DC \parallel$ оси (по условию)

$R_{ABH}$ - радиус цилиндра

$\frac{AB}{\sin\angle AHB}=2R_{ABH} \Rightarrow R_{ABH} \geq \frac{1}{2}AB$ (равенство достигается только при AB - диаметр описанной о)

AB - диаметр $\Rightarrow \angle AHB=90°$, $AH=BH$, $AB=2$ $\Rightarrow AH=BH=\sqrt{2}$

$BH=\sqrt{2}$, $DB\,7$, $\angle DHB=90°$ $\Rightarrow HD=\sqrt{5}$

$AH=\sqrt{2}$, $AC=5$, $\angle AHC=90°$ $\Rightarrow HC=\sqrt{3}$

$\Rightarrow DC=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ или $DC=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (при $H \in DC$ и $\notin DC$ соответственно)

Ответ: $CD=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, если $H \in DC$
или $CD=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, если $H \notin DC$.

21100956 (U840199 M1299835)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100956**

ID профиля: **840199**

Вариант 18

черновик 6

№4

Кол-во троек натур. $(a;b;c)$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$$

$НОД(a,b,c)\cdot НОД(a,b,c)=15^{16}\cdot5^{3}=$
$=3^{16}\cdot5^{3}$

$$\begin{cases} a,b,c \in 3^{*}, 5^{*}, 1 \\ a,b,c = 1;\ 3^{*};\ 5^{*} \\ a,b,c = 5^{*};\ 1;\ 3^{*} \end{cases}$$

$НОД(a,b,c)\cdot НОК(a,b;c)=15\cdot3^{15}\cdot15^{18}$

Основное свойство: ~~НОД (a,b)~~ $НОД(a;b)\cdot НОК(a,b)=ab$

Значит $НОД(a,b,c)\cdot НОК(a,b,c)=15\cdot3^{15}\cdot5^{18}$

Разложение: $15=3\cdot5$

$=15\cdot15^{15}\cdot5^{3}=15^{16}\cdot5^{3}$

Приходим $НОК(a;b;c)\cdot НОД(a;b;c)=15^{16}\cdot5^{3}$

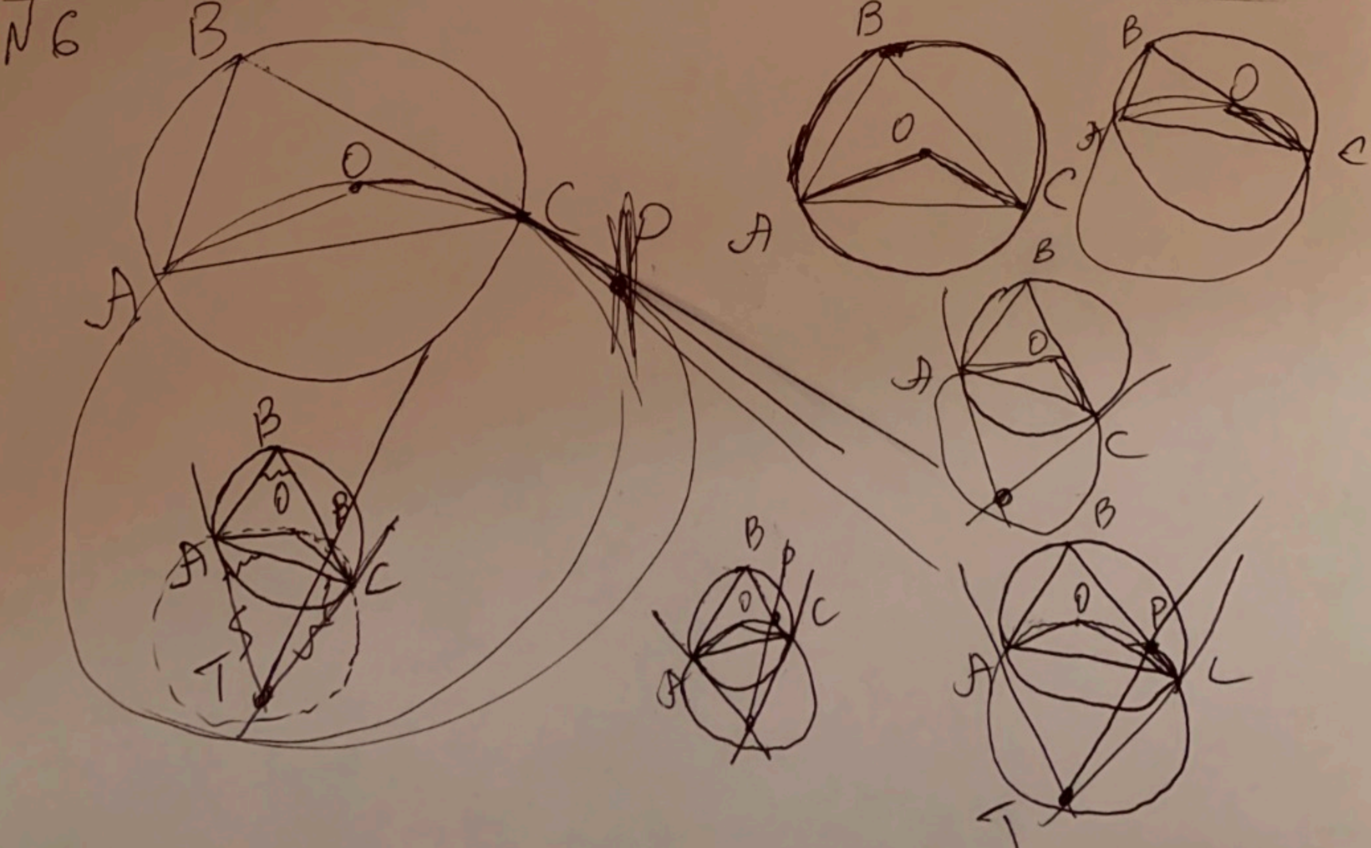
№5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14),\ \log_{6x-14}(x-1)^2,\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

~~2log~~ $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14),\ 2\log_{6x-14}(x-1),\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

мб: $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$

№6




21100956 (U840199 M1299836)

Черновик 7.

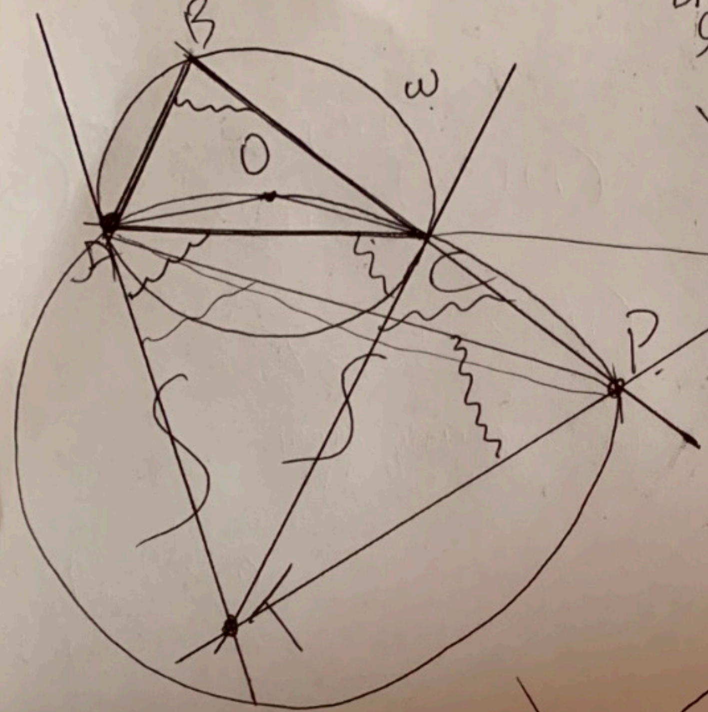
$\triangle ABC$ - остроуг.

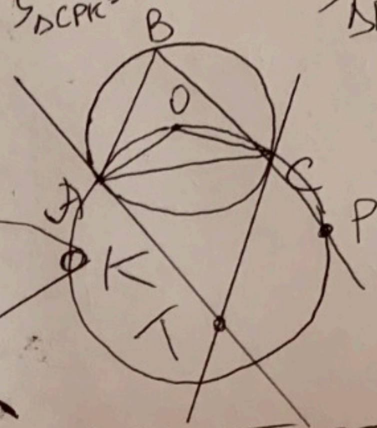
$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle CPK} = 5$

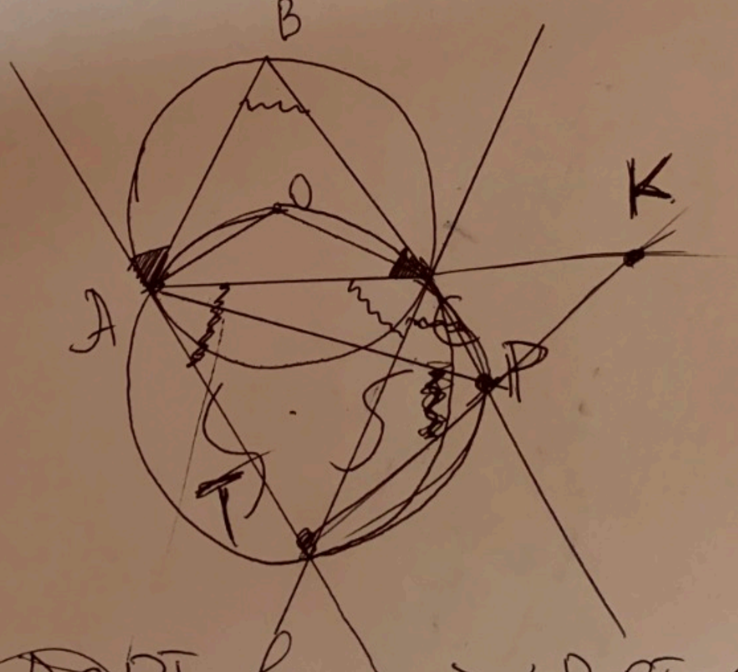
$S_{\triangle ABC} = 7$

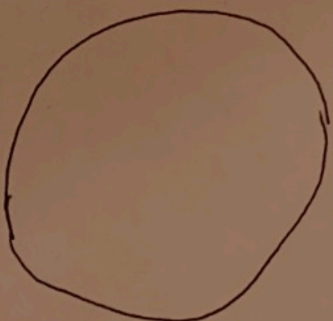
$\boxed{520}$

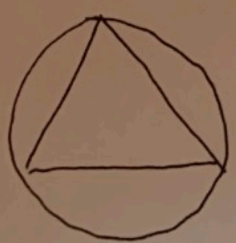




$AT = CT = PT$







~~$ACPT$ - впис. $\Rightarrow \angle APT = \angle ACT =$~~

$= \angle$

$25 \cdot 11 = 275$

Черновик 8

№5 $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14),\ \log_{6x-14}(x-1)^2,\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$6x-14>0$ $x\neq 1$ $\frac{x}{3}+3>0$ $x+9>0$ $x>-9$

При каких $x$ два из этих чисел равны, а другое третье меньше на 1.

$6x-14=2(3x-7)$

$1=2=3+1$

1) $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-\log_{6x-14}(x-1)=0$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-\dfrac{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}=0$

$t$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$ $2\log_{6x-14}(x-1)^2$ и $\log_{x-1}\frac{x}{3}+3.$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-\log_{6x-14}(x-1)=0$

$\dfrac{1}{\log_{6x-14}(x+9)}\ \log_{6x-14}(x-1)=0$

$x-1=t$

$x+9$

$x+9=t+10$

$t^2=\dots=\frac{6}{2}=3$

если 6 из: 1, 2, 3

Случаи

1) $1=2=3+1$

2) $2=3=1+1$

3) $3=1=2+1$

log.

Ограничения:

$\begin{cases}6x-14>0\\(x-1)^2>0\\\frac{x}{3}+3>0\end{cases}$

$\begin{cases}6x>14\\x\neq +1\\x+9>0\end{cases}$

$\begin{cases}x>\frac{14}{6}\\x=-1\\x>-9\end{cases}\Rightarrow x>\frac{14}{6}$

$x>\frac{14}{6}$

Черновик 9

$НОД(a,b,c) \cdot НОД(a,b,c) = 15^{16} \cdot 5^3 = 3^{16} \cdot 5^3$.

$\begin{cases} НОД = 3^{k} \cdot 5^{n} \\ НОК = 3^{16-k} \cdot 5^{16-n} \end{cases}$

---

№5

Огранич. $\begin{cases} x > \frac{14}{6} \\ x \neq \frac{15}{6} \end{cases}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$$\frac{\log_{x-1}(6x-14)}{\frac{1}{2}\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)} = \frac{2\underbrace{\log_{x-1} x-1}_{=1}}{\log_{x-1} 6x-4}$$

$\log^2_{x-1}(6x-14) = \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)$

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) + 1 = \frac{2}{\log_{x-1} 6x-14}$ Пусть $\log_{(x-1)} 6x-14 = a$

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3 = \frac{2}{a} - 1$

$a^2 = \frac{2}{a} - 1$

$a^3 = 2 - a$

$a^3 + a - 2 = 0$

$(a-1)(\underbrace{a^2+a+2}_{D<0}) = 0$

$a = 1$

Значит $\log_{x-1} 6x-14 = 1$

$x - 1 = 6x - 14$

$5x = 13$

$x = \frac{13}{5}$

$\frac{14}{6} \vee \frac{12}{5} \mid 30$

~~$5 \cdot 14 \vee 12 \cdot 6$~~

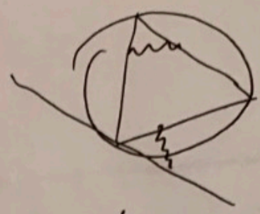
~~$70 \vee 72$~~

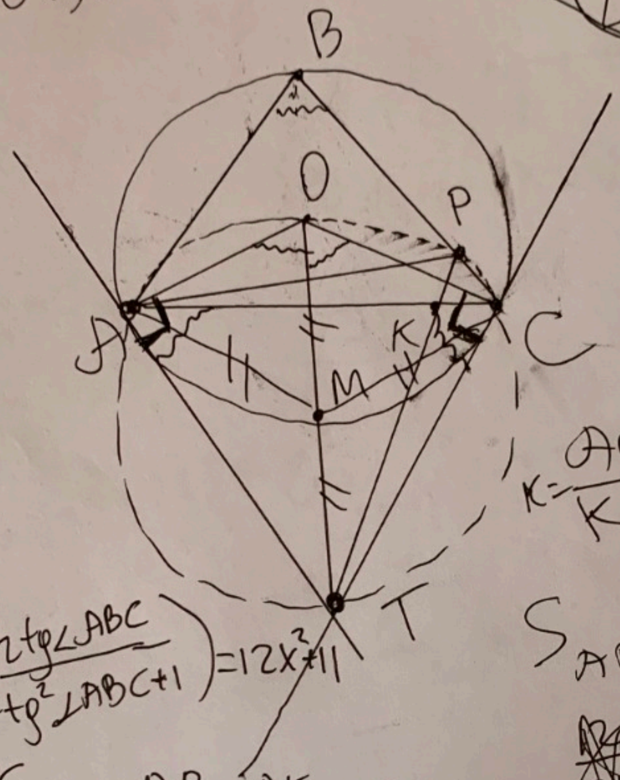
$\frac{13}{5} > \frac{14}{6}$

$x = \frac{13}{5}$

Черновик 10

2) ~~(3) = (1) = (2)+1~~






$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$k = \frac{AC}{KC} = \frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta KPC}} = \frac{11}{5}$

$S_{ABC} = S_{KPC} \cdot k^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \cdot$

$13x^2 + \left(\frac{2tg\angle ABC}{tg^2\angle ABC+1}\right) = 12x^2+11$

$\frac{AP}{AK} = \frac{PC}{CK} \Leftrightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{CK} = \frac{6}{5}.$

$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$S_{ABC} = \frac{6x \cdot 5x}{2}\sin\angle APC = 13x^2 + 2tg$

$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$x = \sqrt{\frac{11}{12}}$

$2\angle ABC = \angle APC$ (PC - биc-са)

$AC^2 = 25x^2. \Rightarrow 25 \cdot \frac{11}{12} = \frac{25 \cdot 11}{12} = \frac{5^2 \cdot 11}{3 \cdot 2^2} =$

$AC = \sqrt{\frac{275}{12}}$

$= \frac{275}{12}$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 11 \\ \hline 25 \\ +25 \end{array}$

275

Чистовик 4

N 5 $\overset{①}{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)}$, $\overset{②}{\log_{6x-14}(x-1)^2}$, $\overset{③}{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}$

Ограничение:

$$\begin{cases} x>\frac{14}{6} \\ x\neq\frac{15}{6} \end{cases}$$ (из того что $\log_a b=c$, $b>0$, $a\neq 1$.)

Какие бывают случаи? $\left[\begin{array}{l} ①=②=③+1 \\ ②=③=①+1 \\ ③=①=②+1 \end{array}\right.$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)^2=2\log_{6x-14}(x-1)$

$$\frac{\log_{x-1}(6x-14)}{\frac{1}{2}\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}=\frac{2\log_{x-1}x-1}{\log_{x-1}6x-14},\quad \log^2_{x-1}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)+1=\frac{2}{\log_{x-1}6x-14}$. Пусть $\log_{x-1}(6x-14)=a$

тогда $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\frac{2}{a}-1$. $a^2=\frac{2}{a}-1$, $a^3+a-2=0 \Leftrightarrow$

$(a-1)\underset{D<0}{(a^2+a+2)}=0$ $\quad \underline{a=1}$ Значит $\log_{x-1}6x-14=1$

$x-1=6x-14$ $\quad x=\frac{13}{5}=2{,}6$; $\frac{13}{5}>\frac{14}{6}$ -> Подходит под ОДЗ.

2) ①=③=②+1

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)\Leftrightarrow\frac{\log_{\frac{x}{3}+3}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_{\frac{x}{3}+3}}=\frac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}=$$

$$=\frac{2}{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)}.\quad \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)=2$$

$$\log_{6x-14}(x-1)^2+1=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14),\quad \text{тогда:}\ \frac{2\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)}{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)}+1=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$$

Чистовик 5

Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=a$, тогда $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)=\frac{a^2-a}{2}$

$a^3-a^2-4=0$ $\quad (a-2)(a^2+a+2)=0$, $\quad a^2+a+2=0$, $D=1-4\cdot 2<0$

$\Rightarrow a=2$

То есть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$ $\quad \frac{x}{3}+3=6x-14 \mid \cdot 3$

$x+9=18x-42$ $\quad 17x=51$ $\quad x=3$ - подходит - по всем ограничениям

3) (2) = (3) = (1) + 1

$2\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_{x+1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$, $\quad \frac{2\log_{x-1}x-1}{\log_{x-1}(6x-14)}=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2=\log_{(x-1)}(6x-14)\cdot\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$.

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)+1$.

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\frac{2\log_{(x-1)}(6x-14)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)}+1$, Пусть $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=a$

тогда $\log_{(x-1)}(6x-14)=\frac{1}{2}a(a-1)$. Придем к выраж. вида

$a^3-a^2-4=0$ $\quad (a-2)(a^2+a+2)=0$ $\Rightarrow$ $a=2$. $\quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3 \mid \cdot 3$ $\quad 3x^2-6x+3=x+9$, $\quad 3x^2-7x-6=0 \mid : 3$

$x^2-\frac{7}{3}x-2=0$ $\quad D=\left(\frac{7}{3}\right)^2+4\cdot 2$, $\quad x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{85}}{6}$

$x_1=\frac{7+\sqrt{85}}{6}>\frac{7+9}{6}>2{,}6$ - подходит под ОДЗ.

$x_2=\frac{7-\sqrt{85}}{6}<0$ $\rightarrow$ Не подходит.

Ответ: $x=2{,}6$; $x=3$; $x=\frac{7+\sqrt{65}}{6}$.

Чистовик 6

№4 $\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$ Найти кол-во троек $(a;b;c)$.

Основное св-во связанное с НОК'ом и НОД'ом:
$НОД(n;k)\cdot НОК(n;k)=n\cdot k$. Разложим 15 на простые множители: $15=3\cdot5$.

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=5\cdot3 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$ $НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c)=5\cdot3\cdot3^{15}\cdot5^{18}=$
$=5^{19}\cdot3^{16}$

Пусть: $a=3^{a_3}\cdot5^{a_5}$
$b=3^{b_3}\cdot5^{b_5}$
$c=3^{c_3}\cdot5^{c_5}$

$\begin{cases} a_3+b_3+c_3=15 \\ a_5+b_5+c_5=18 \\ \min(a_3,b_3,c_3)=1 \\ \min(a_5;b_5;c_5)=1 \end{cases}$

Рассмотрим расстановки для 3. Будем расставлять ~~где все степени разные~~. степени не поубыв. Тогда очевидно первое будет 1..

1 1 3 → 3
1 2 12 → 6
1 3 11 → 6
1 4 10 → 6
1 5 9 → 6
1 6 8 → 6
1 7 7 → 3

Тройки чисел где все степени, дадут нам 6 разных вариантов. А те где, где есть повторяющиеся дадут -3. (волнистой линией отметил)

Перестановки:
$a_3\ b_3\ c_3$
$a_3\ c_3\ b_3$
$b_3\ a_3\ c_3$
$b_3\ c_3\ a_3$
$c_3\ a_3\ b_3$
$c_3\ b_3\ a_3$

$6\cdot5+3\cdot2=\boxed{36}$

Для пятерок точно так же:

1 1 16 → 3
1 2 15 → 6
1 3 14 → 6
1 4 13 → 6
1 5 12 → 6
1 6 11 → 6
1 7 10 → 6
1 8 9 → 6

$7\cdot6+3=\boxed{45}$

Эти случаи нужно перемножить
=> Всего троек $45\cdot36=1520$

Ответ: 1520

Чистовик 7:

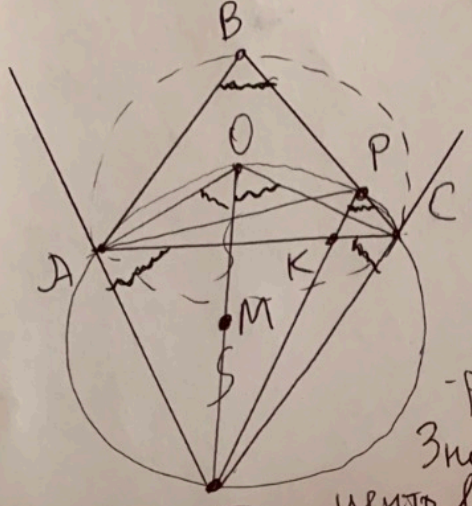
№6

ABC – остроуг. $S_{\triangle APK}=6$ $S_{CPK}=5$

AT, CT – касат. к $\omega$.

а) $S_{\triangle ABC}=?$

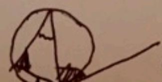
б) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $AC=?$



Решение:

Пусть M – середина OT, $\triangle OAT$ – прямоуг. $\Rightarrow$ т. A, T, O – равноудалены от т. M.

Аналогичным образом C, O, T – равноудалены от M.

Значит AOTCP – вписанный, причем центр в точке M. $\angle ABC=\angle CAT$, $\angle ACT=\angle ABC$ (т.к. AT и CT – касат. к $\omega$) . Из-за вписанности $\angle AOT=\angle ACT=\angle ABC=\angle CAT=\angle TPC=\angle TOC$

Углы между касательной и секущей + впис. углы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC=\angle KPC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$. $k=\frac{AC}{KC}=\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle KPC}}=\frac{11}{5} \Rightarrow S_{\triangle ABC}=$

$=S_{\triangle KPC}\cdot k^2=\left(\frac{11}{5}\right)^2=\frac{121}{5}$

б) Т.к. PK – бис-са угла APC, то справедливо: $\cancel{\frac{AP}{AK}=\frac{PC}{CK}=\frac{5}{6}}$

$\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{CK}=\frac{6}{5}$. $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot 5x\cdot \sin\angle APC = 15x^2\left(\frac{2\operatorname{tg}\angle ABC}{\operatorname{tg}^2\angle ABC+1}\right)=$

$=12x^2=11 \Rightarrow x^2=\frac{11}{12}$, $x=\sqrt{\frac{11}{12}}$ (т.к. $\angle ABC=\angle APC$)

$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC=$ (т. Косинусов) $=61x^2-60x^2\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\angle ABC}{1+\operatorname{tg}^2\angle ABC}\right)$

$=25x^2$. Универсальная подстановка: $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$AC^2=25\cdot\frac{11}{12}=\frac{275}{12}$. Значит $AC=\sqrt{\frac{275}{12}}$

Ответ: б) $AC=\sqrt{\frac{275}{12}}$

а) $S_{ABC}=\frac{121}{5}$.