Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100949**

ID профиля: **355805**

Вариант 18

Чистовик. Математика 11 класс часть I

Вариант 18 (1)

№1

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $\quad a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_1^2 + 17da_1 + 66d^2$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2 + 17da_1 + 72d^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > S+20 \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < S+44 \end{cases}$ $\quad 6d^2 < 24 \quad d^2 < 4 \quad |d| < 2$, $d \in \mathbb{Z}$ (по условию)

$S = \dfrac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \dfrac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$ $\qquad a_1 \in \mathbb{Z}$. Значит, $d \in \{-1; 0; 1\}$

При $d = -1$ прогрессия не является возрастающей

$\cancel{a_1^2 - 17a_1 + 66 > 20 + 7a_1 - 21}$

$\cancel{a_1^2 - 24a_1 + 67 > 0}$

$\cancel{D_1 = 144 - 67 = 77}$ $\quad \cancel{\sqrt{D_1} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \notin \mathbb{Z}}$, ~~прогрессия не яв. возрастающей~~

При $d = 0$ прогрессий не является возрастающей

При $d = 1$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 20 + 7a_1 + 21$ $\qquad a_1^2 + 17a_1 + 72 < 44 + 7a_1 + 21$

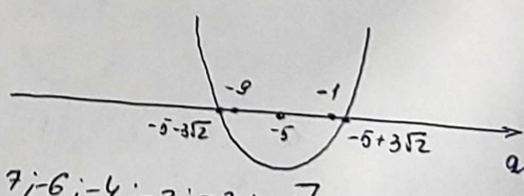
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$ $\qquad a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$ $\qquad D_1 = 25 - 7 = 18$

$a_1 \neq -5$ $\qquad a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-5 - 3\sqrt{2} < -5 - 4 = -9$

$-5 + 3\sqrt{2} > -5 + 4 = -1$



Значит, $\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \neq -5 \\ a_1 \in [-9; -1] \end{cases} \Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик Математика 11 класс Часть I
Вариант 18 (2)

№3

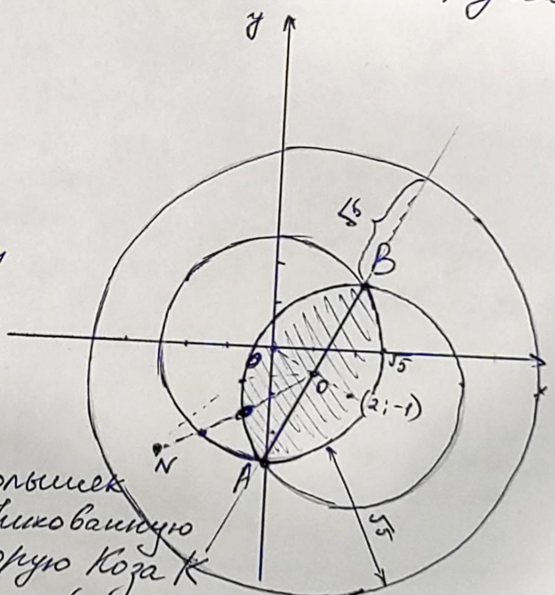
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$ - круг $((a;b);\sqrt{5})$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5) \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 & \to \text{круг}((0;0);\sqrt{5}) \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 & \to \text{круг}((2;-1);\sqrt{5}) \end{cases}$ (*)

(*) $\iff (a;b) \in \alpha \cap \beta$, где α - круг $((0;0);\sqrt{5})$
β - круг $((2;-1);\sqrt{5})$

Менее формально: неравенству $a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5)$ удовлетворяют такие пары чисел $a_1; b_1$, что точка с координатами $(a_1;b_1)$ принадлежит пересечению кругов круг $((0;0);\sqrt{5})$ и круг $((2;-1);\sqrt{5})$

Тогда вернёмся к первому неравенству. ~~Пусть~~
Для заданных x и y оно имеет решение тогда и только тогда, когда существует круг с центром и радиусом $\sqrt{5}$ $C \in \alpha \cap \beta$, который содержит точку $(x;y)$.



Проще говоря, есть коза K ~~на~~ привязанная к колышку верёвкой длины $\sqrt{5}$, причём колышек можно воткнуть только в заштрихованную область $(\alpha \cap \beta)$. Ту поверхность, которую коза K может обойти, нам и надо найти (фигура M по условию).

A и B - точки пересечения окр $((0;0);\sqrt{5})$ и окр $((2;-1);\sqrt{5})$

O - середина AB. Рассмотрим некоторую точку N. ~~треугольника нетрудно заметить что колышек нужно вбивать По неравенству в точку пересечения NO с окр., чтобы покрыть наиб~~

$N \in M \iff \rho(N; \alpha \cap \beta) \le \sqrt{5}$. (т.е. найдётся точка, куда можно вбить колышек так, чтобы коза K могла достигнуть N). Тогда получим, что M - множество всех точек $\alpha \cap \beta$ и точек на расстоянии не больше $\sqrt{5}$ от $\alpha \cap \beta$. То есть это круг $(O; 2\sqrt{5})$

$O(1;-0{,}5)$, тогда M = круг $((1;-0{,}5);2\sqrt{5})$ и его площадь равна

$S = \pi R^2 = \pi \cdot 50 = 50\pi$

Ответ: $S = 50\pi$

Чистовик Математика 11 класс Часть I

Вариант 18 (3)

№2

M - середина AB,

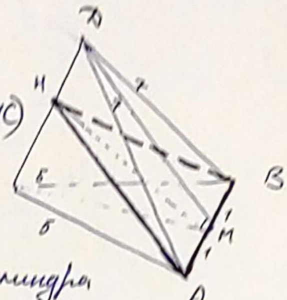
$MH \perp CD$

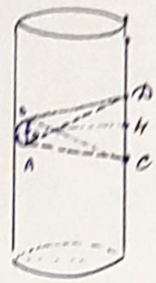
$\Delta ABC,\ AC = CB \Rightarrow CM \perp AB$ }

$\Delta ABD,\ AD = BD \Rightarrow DM \perp AB$ } $\Rightarrow AB \perp (DMC)$

$AB \perp (DMC) \Rightarrow AB \perp CD$ }

$MH \perp CD$ } $\Rightarrow CD \perp (ABH)$





Тогда A, B, H лежат на бок. пов. цилиндра и сечение (ABH) перпендикулярно CD, а, значит, и оси, т.к. CD параллельно оси по условию.

MH - отрезок диаметра цилиндра, т.к. M - середина хорды AB, а MH ⊥ AB. Тогда радиус цилиндра равен радиусу описанной около ΔABH окружности. Этот ~~раду~~ радиус не зависит от длины CD, т.к. при изменении CD расстояние от AB до CD (т.е. MH) не меняется). Значит, необходимо и достаточно, чтобы ABCD существовал. Пусть CD = a, DH = x, тогда CH = a - x

По т. Пифагора $CM^2 - CH^2 = DM^2 - DH^2$ (двойное выражение MH^2) $DM^2 = 49 - 1 = 48$, $CM^2 = 25 - 1 = 24$

$24 - (a - x)^2 = 48 - x^2$

$24 - a^2 - x^2 + 2ax = 48 - x^2$

$24 = 2ax - a^2$

$24 + a^2 = 2ax \quad x = \frac{a^2 + 24}{2a}, \quad \begin{cases} x < a \\ x > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ \frac{a^2+24}{2a} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 > 24 \\ a > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow a > 2\sqrt{6}$

$x^2 < 48$ условие, что $MH^2 = 48 - x^2$ положительно

$x < 4\sqrt{3}$

$\frac{a^2 + 24}{2a} < 4\sqrt{3}$

$a^2 + 24 < 8\sqrt{3} \cdot a \qquad a^2 - 8a\sqrt{3} + 24 < 0$

$D_1 = 48 - 24 = 24$

$a = 4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}$

$a \in (4\sqrt{3} - 2\sqrt{6};\ 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$

$4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} < 2\sqrt{6}$

$4\sqrt{3} < 4\sqrt{6}$

$\cancel{a \in (2\sqrt{6};\ 4\sqrt{3})}$ $a \in (2\sqrt{6};\ 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$

Значит, CD имеет длину $(2\sqrt{6};\ 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$

Ответ: $(2\sqrt{6};\ 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$

Черновик

$7a_1 +$

$$\frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7$$

$$(a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d$$

$a_1^2 + 17da_1 + 66d^2$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_1^2 + 6da_1 + 11da_1 + 66d^2 > S + 20$

$a_1^2 + 8da_1 + 9da_1 + 72d^2 < S + 44$

$\cancel{6d^2}$

$-a_1^2 - 17da_1 - 72d^2 > -S - 44$

$-6d^2 > -24$

$d^2 < 4$

$|d| < 2$

$\begin{cases} a > 0 \\ 0 < \frac{a^2+24}{2a} < a \end{cases}$

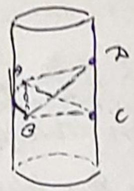
$\begin{cases} a > 0 \\ 0 < a^2 + 24 < 2a^2 \end{cases}$

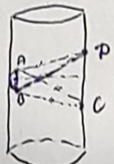
$a > 0$

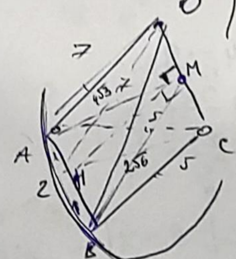
$a^2 - 24 > 0$

$a^2 > 24$

$a > 2\sqrt{6}$







$48 - x^2 = 24 - (a - x)^2$

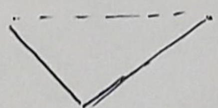
$48 - x^2 = 24 - a^2 - x^2 + 2ax$

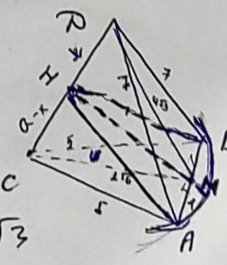
$24 = -a^2 + 2ax$

$2ax = a^2 + 24$

$x = \frac{a^2+24}{2a}$, $a > 0$

$x \in (0; a)$





$\frac{a^2+24}{2a} < 4\sqrt{3}$

$a^2 + 24 < 8a\sqrt{3}$

$a^2 - 8a\sqrt{3} + 24 < 0$

$D_1 = 48 - 24 = 24$

$a = 4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}$

$\cancel{x = 2}$

$4\sqrt{3} < x + MH$

$2\sqrt{6} < a - x + MH$

$4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

$-2\sqrt{6} > x - a - MH$

$MH = \sqrt{48 - x^2}$

$4\sqrt{3} < x + \sqrt{48 - x^2}$

$48 + x^2 - 8\sqrt{3}x < 48 - x^2$

$2x^2 - 8\sqrt{3}x < 0$

$x^2 - 4\sqrt{3}x < 0$

$x > 0$

$x^2 - 4\sqrt{3} < 0$

$x < 4\sqrt{3}$

$\begin{cases} 24 - (a - x)^2 = 48 - x^2 \\ x^2 < 48 \\ x > 0 \\ a > x \end{cases}$

$24 = x^2 - (a^2 - 2ax + x^2)$

$-a^2 - 2ax = 24$

$a^2 + 2ax + 24 = 0$

$D_1 = x^2 - 24$

$\cancel{a = x \pm \sqrt{x^2 - 24}}$

$2ax = -a^2 - 24$

$x = \frac{-a^2 - 24}{2a}$

Черновик

$a^2+b^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a \quad +b^2+2b \le 0$

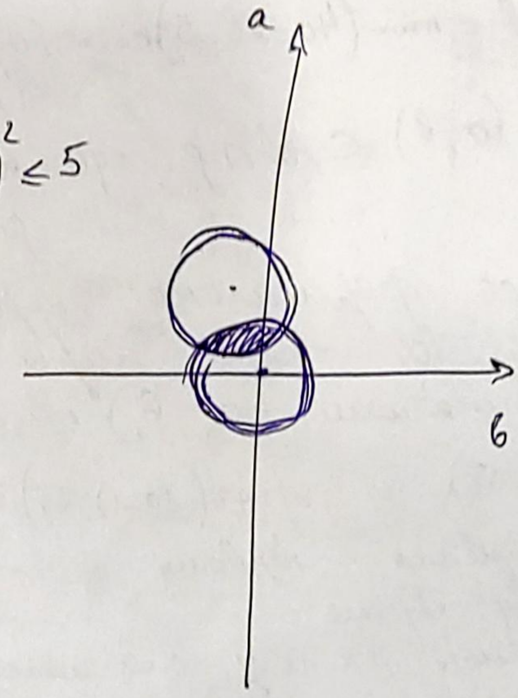
$a -$

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5\\ a^2+b^2 \le 5\end{cases}$$

$a = y$

$b = x$

$4a-2b$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100949**

ID профиля: **355805**

Вариант 18

Чистовик Математика 11 класс

Часть II (1)

Вариант 18

№4

Т.к. $НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$, то

$a = 3^{x_1} \cdot 5^{x_2}$, $b = 3^{y_1} \cdot 5^{y_2}$, $c = 3^{z_1} \cdot 5^{z_2}$,

$\left.\begin{matrix} \min(x_1; y_1; z_1) = 1 \\ \min(x_2; y_2; z_2) = 1 \end{matrix}\right\}$ т.к. $НОД(a;b;c) = 15 = 3^1 \cdot 5^1$

$\left.\begin{matrix} \max(x_1; y_1; z_1) = 15 \\ \max(x_2; y_2; z_2) = 18 \end{matrix}\right\}$ т.к. $НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$x_1; y_1; z_1$ и $x_2; y_2; z_2$ - независимы

Упорядочим их, $x_1 \le y_1 \le z_1$,

$x_2 \le y_2 \le z_2$

$1 \le y_1 \le 15 \to 15$ вариантов

$1 \le y_2 \le 18 \to 18$ вариантов

Кол-во ~~способов~~ перестановок из 3 элементов = 6.

Тогда возможных вариантов расставить ~~коэффициенты~~ показатели степени при 3 - $15 \cdot 6$, а при 5 - $18 \cdot 6$

Т.к. они независимы, то ответ: $15 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 6 = 18^2 \cdot 30$

$18 \times 18 = 324$

$324 \times 30 = 9720$

Ответ: 9720

Чистовик Математика 11 класс

часть II ②

Вариант 18

№5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq \frac{5}{2} \end{cases}$

I $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)^2$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}(x-1)$

$\frac{1}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}=\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$

$(x-1)\left(\frac{x}{3}+3\right)=6x-14$

$(x-1)(x+9)=18x-42$

$x^2-x+9x-9=18x-42$ $x^2-10x+33=0$ $D=25-33<0$

II $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\frac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}$

~~III $\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$ $\frac{2}{\log_{x-1}(6x-14)}=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$~~

$\frac{x}{3}+3=2(6x-14)(x-1)$

$x+9=6(6x-14)(x-1)$

$x+9=36x^2-84x-36x+84$

$36x^2-121x+75=0$

$D=3841$

$x=\frac{121\pm\sqrt{3841}}{72}$

$121\cdot121$: 121, 242, 121, 14641

$75\cdot4\cdot36=300\cdot36=10800$

$14641-10800=3841$

$67\cdot67$: 469, 402, 4489

$64\cdot64$: 256, 384, 4096

$62\cdot62$: 124, 372, 3844

$\frac{121-\sqrt{3841}}{72}<\frac{121-62}{72}=\frac{59}{72}$ не входит в ОДЗ

$\frac{121+62}{72}=\frac{183}{72}=\frac{61}{24}>\frac{7}{3}$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)-1$

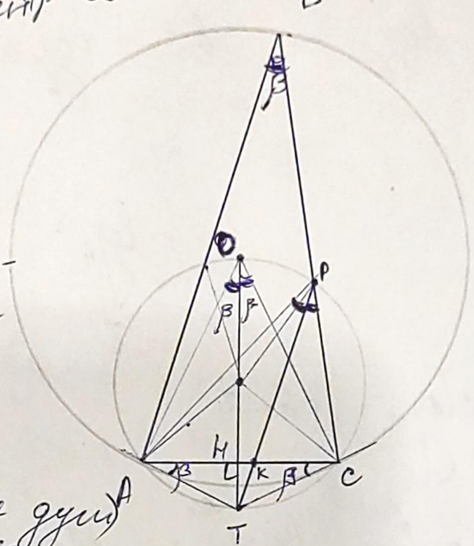
$\frac{2}{\log_{x-1}(6x-14)}=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)-1$ $(6x-14)\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Отлично, решим все эти однотипные уравнения, пересечём полученные решения с ОДЗ, проверим полученные корни и готово

Математика 11 класс Часть II
Чистовик Вариант 18 (3)

№6

OACT – вписанный в окр., описанную около $\triangle AOC$ (пусть она α)
т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$



$OA = OC$, т.к. O – центр ω

OT – диаметр α т.к.

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$

Тогда T как и O лежит на серединном перпендикуляре к AC, $TA = TC \Rightarrow$
$\angle APT = \angle CPT$
(вписанные, опира на равные дуги)

$AK = \frac{6}{5} CK \Rightarrow AP = \frac{8}{5} CP$

Из ω, ~~$\angle B = 2\angle$~~ $\angle AOC = \cancel{2}\angle ABC$

$\angle AOT = \angle COT = \angle ABC = \angle APT = \angle CPT = \beta$

Также $\angle CAT = \angle ACT = \beta$ (из окр. α)

$\triangle CKP \sim \triangle CAB$ (по двум углам)

$\angle C$ – общий
$\angle CPK = \angle CBA = \beta$

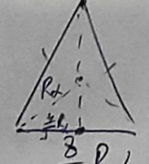
$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25} \qquad S_{ABC} = \frac{121 \cdot S_{KPC}}{25} =$$

$$= \frac{121}{5}$$

$$\frac{S_{AKT}}{S_{PCK}} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{AKT} = \frac{36}{5}$$

б) $AC \cap OT = H$ $\quad tg\angle AOT = tg\angle ABC = \frac{1}{2}$ $\quad OH = 2AH = AC$

$+ \; TH = \frac{1}{2} AH \qquad TH = \frac{1}{4} AC$



$\frac{8}{5} R_\alpha$

S_{AKT} найдём из $\triangle AKT \sim \triangle CKP$

$2{,}5 AH = 2R_\alpha$

$\frac{5}{2} AH = 2 R_\alpha \qquad 4R_\alpha = 5AH$

Тогда $S_{AKT} = \frac{1}{2} TH \cdot AK = \quad \frac{8}{5} R_\alpha = AC$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} \cdot AC \cdot \frac{1}{4} AC = \frac{3}{44} AC$

$440 + 88 = 528$

S_{AKT} знаем тогда выразим AC

$$AC = \frac{S_{AKT} \cdot 44}{3} = \frac{\frac{36}{5} \cdot 44}{3} = \frac{12 \cdot 44}{5} = \frac{528}{5}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{121}{5}$
$AC = \frac{528}{5}$

Черновик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log$ bc $\log_{b^r} a^r = \dfrac{\log_b a^r}{\log_b b^r} =$

$= \dfrac{r\log_b a}{r} = \log_b a$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$2\log_{6x-14}(x-1)^{2} = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1) = \dfrac{1}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}$

$\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$

$\cancel{6x}\ (x-1)\left(\frac{x}{3}+3\right)=6x-14$

bc $\log_b a = \log_c b$

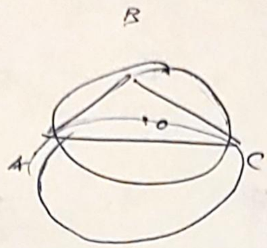
$\cancel{bc}$

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_b c}$ $\log_b a\cdot\log_b c = \cancel{\log} \ 1$

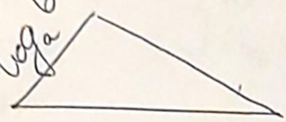
$\log$ $\log 8\cdot\log 4 = 6$

$ac = b$

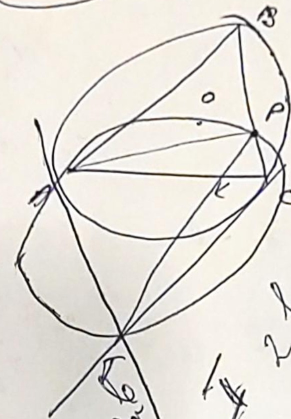
Черновик



$2\log_c a = 2\log_c b$



$\frac{1}{\log_a c} = \log_a b$



$2\log_c a$

$\log_a b \cdot \log_a c = 1$

$bc = a$

4

$2\log_a b$

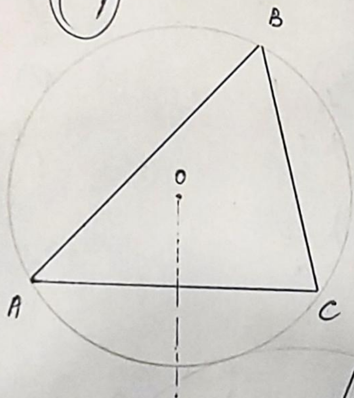
$\log_b c$

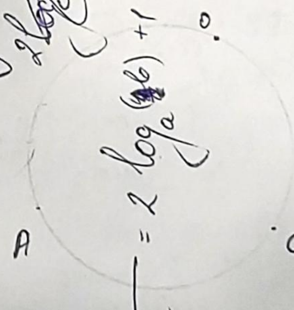
$2\log_c a - 1 = 2\log_a b$

$2\log_c a = \log_b c$

$2\log_c a = \frac{1}{\log_c b}$

$2\log_c a \cdot \log_c b = 1$

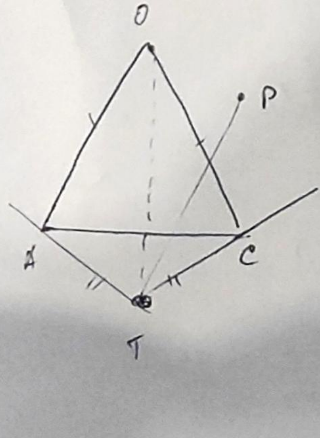


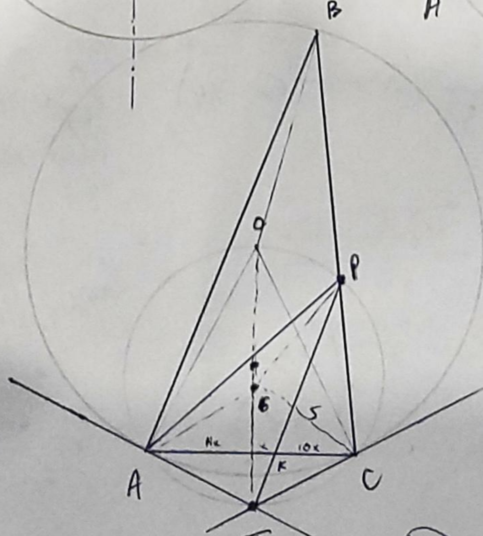


$\frac{2}{\log_a c} = 2\log_a(ab) + 1$

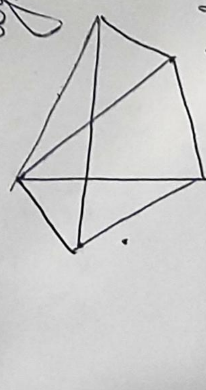
$2 = 2\log_a b \cdot \log_a c + \log_a c$

$ab = c$





4



Черновик

ab

21 14

7 42

$15x$ $15y$ $15z$

x, y, z

$15x$ $15y$ $15z$ $15^{15} \cdot (125)$

a б c

$y_1^{m_1}$ $x_2^{m_2}$

$a = 3^{x_1} \cdot 5^{x_2}$ $b = 3^{y_1} \cdot 5^{y_2}$ $c = 3^{z_1} \cdot 5^{z_2}$

$\min(x_1; y_1; z_1) = 1$ 1 15

$\min(x_2; y_2; z_2) = 1$ 1 18

$\max(x_1; y_1; z_1) = 15$

$\max(x_2; y_2; z_2) = 18$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(\cancel{6x+14}\ 6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$6x-14>0$

$6x-14\neq 1$

$x\neq 1$

$x>1$

$x\neq 2$

$\frac{x}{3}+3>0$

$\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases}$

$\frac{1}{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}} = 2\log_{6x-14}(x-1)$