Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100868**

ID профиля: **316477**

Вариант 18

Чистовик
Лист 1

№1

Пусть шаг прогрессии равен d, тогда

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 +$
$+ 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d = 7a_1 + 21d$

Последовательность возрастающая, а значит $d > 0$

Составим систему:

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 - 7a_1 - 21d - 44 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) > 0$, а $(2) < 0$ $\Rightarrow$ $(1) > (2)$:

$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 -$
$- 7a_1 - 21d - 44$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$ | т.к. $d > 0$, то значит $d = 1$

Чистовик
Лист 2

Подставим α в (1) и (2)

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1+66-7a_1-21-20>0 \\ a_1^2+17a_1+72-7a_1-21-44<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+5<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2>0 & (1) \\ a_1^2+10a_1+5<0 & (2) \end{cases}$$

(2):

$D = 100 - 5\cdot 4 = 80 = 4\cdot 4\cdot 5 = (4\sqrt{5})^2$

$a_{1(1,2)} = \dfrac{-10 \pm 4\sqrt{5}}{2}$

$a_1^2+10a_1+5 = \left(a_1 - \dfrac{-10+4\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_1 - \dfrac{-10-4\sqrt{5}}{2}\right)$

(1) выполняется при всех a_1, кроме -5

(2) выполняется при всех $\dfrac{-10-4\sqrt{5}}{2} < a_1 < \dfrac{-10+4\sqrt{5}}{2}$

$-10 < \dfrac{-10-4\sqrt{5}}{2} < -9 \qquad -1 < \dfrac{-10+4\sqrt{5}}{2} < 0$

Т.к. a_1 целое,

Значит для (2) подходят $a_1 = -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$, но -5 не подходит в (1)

Значит a_1 может быть только $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

чистовик лист 3

№2

CD параллельно оси цилиндра. Заметим, что CAB и DAB – равнобедренные треугольники. Также заметим, что $\triangle CAD = \triangle CBD$ по трём сторонам. Значит в цилиндре всё симметрично относительно плоскости (C, D, ось цилиндра), а значит AB перпендикулярна этой плоскости, а значит цилиндр с наименьшим радиусом будет тот, у которого AB – диаметр.

Введём координатную ось так, что ~~та чьто координат~~

$A = (0;0;0)$

$B = (2;0;0)$

$C = (1;1;x)$

$D = (1;1;h-x)$

Мы знаем, что $AC = 5$, значит:

$\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(0-h)^2} = 5$

$\sqrt{1+1+h^2} = 5$

$2+h^2 = 25$

$h^2 = 23$

$h = \sqrt{23}$

Также $AD = 7$, значит:

$\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(0-h+x)^2} = 7$

$\sqrt{1+1+h^2+x^2-2hx} = 7$

$23+x^2-2\sqrt{23}x+2 = 49$

$x^2-2\sqrt{23}x-24 = 0$

$D = 92+96 = 188 = 4\cdot 4\cdot 7 = (4\sqrt{7})^2$

$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{23}\pm 4\sqrt{7}}{2}$ | $x>0$, но $2\sqrt{23} < 4\sqrt{7}$, поэтому:

$x = \frac{2\sqrt{23}+4\sqrt{7}}{2} = \sqrt{23}+2\sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{23}+2\sqrt{7}$

21100868 (U316477 M1297349)

№3

Чистовик
Лист 5

Заметим, что второе выражение — части кругов, с ~~отсечённые~~ отсечёнными по прямой $4a-2b-5=0$

Если $4a-2b-5\geq 0$, то

$a^2+b^2\leq 5$

Если $4a-2b-5<0$, то

$a^2+b^2\leq 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2-2b+1\leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2\leq 5$

Если нарисовать ~~эти~~ это выражение на плоскости aO_b, то это будут части 2-х окружностей с радиусом $\sqrt{5}$, причём одна с центром в $(0;0)$, а вторая с центром в $(2;-1)$.

Чистовик

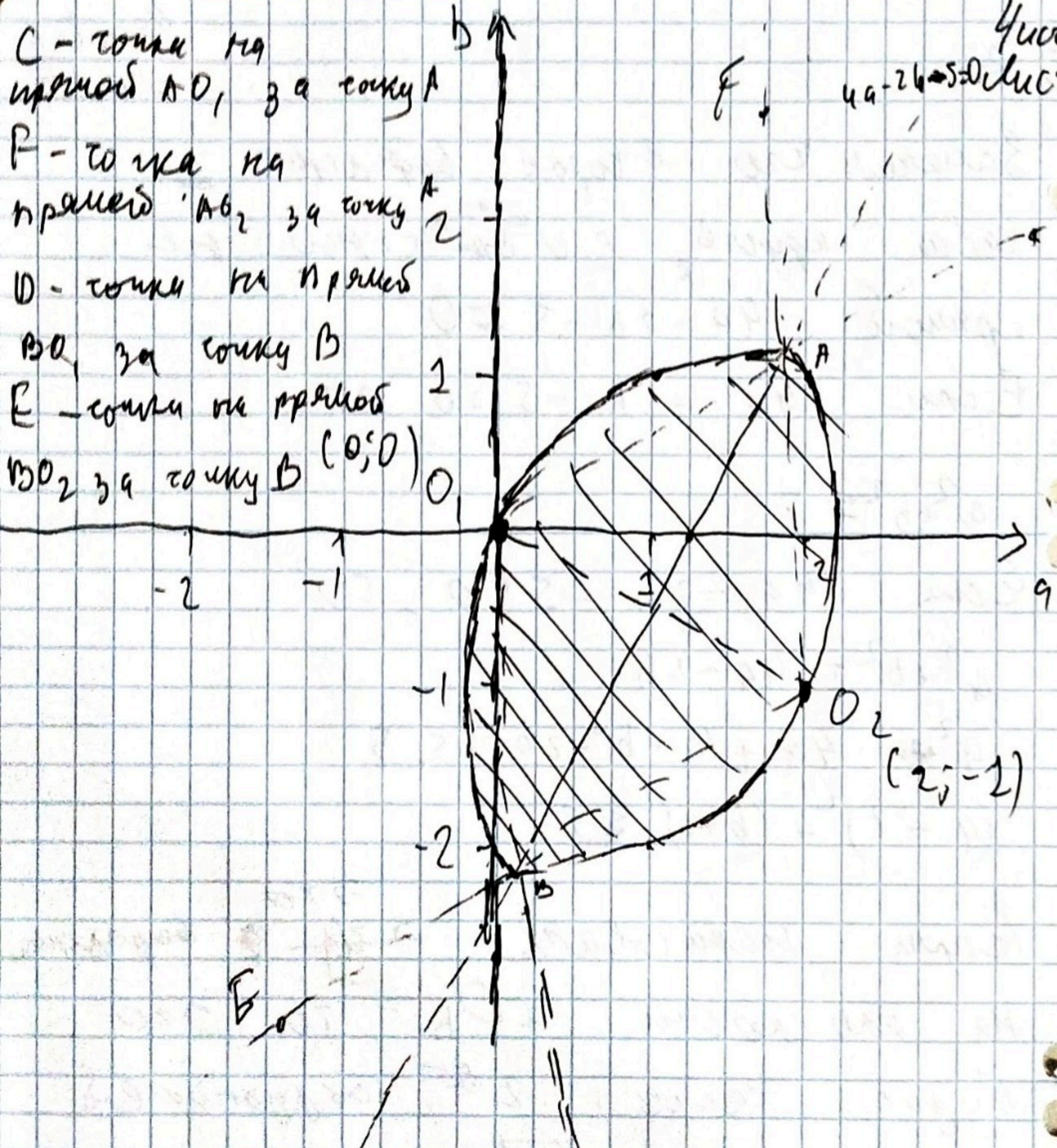
Лист 6

C – точки на прямой AO_1 за точку A

F – точка на прямой AO_2 за точку A

D – точки на прямой BO_1 за точку B

E – точки на прямой BO_2 за точку B



Заметим, что O_1 лежит на окружности вокруг O_2 и наоборот, а значит

$O_1O_2 = \sqrt{5}$, а значит $O_1O_2 = O_1A = O_2A \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_1AO_2 = 60^\circ$

Частовик
Лист 7

Аналогично для угла $\angle O_1BO_2$

~~$O_1A = O_2A = O_2B = O_1B \Rightarrow O_1AO_2B$ –~~

Заметим, что $O_1O_2 \perp AB$ (тангенс угла наклона O_1O_2 равен $-\frac{1}{2}$, а AB – 2)

Также $O_1A = O_2A = O_2B = O_1B \Rightarrow O_1AO_2B$ – ромб и $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 360^\circ - \angle O_1AO_2 - \angle O_1BO_2 = 120^\circ$

Заметим, что первое выражение из условия – круг с радиусом $\sqrt{5}$ и центром в точке $(x; y)$. Он должен иметь пересечение (касание) с той фигурой, которая нарисована на графике. Площадь множества центров этого круга являются искомой площадью

Разделим плоскость на 4 зоны:
Та, которая лежит внутри угла $\angle O_1D$ и под прямой $4a - 2b - 5 = 0$ (зона #1), та, которая лежит внутри

[illegible]
внутри угла EO_2F и под прямой $4a-2b-5=0$
(зоне #2), та, которая лежит внутри угла
FAC (зона #3) и та, которая лежит
внутри угла bBF (зона #4)

Заметим, что в зоне #1 центры
круга из $1^{\text{го}}$ выражения лежат
не дальше, чем $\sqrt{5}$ от части
окружности под прямой, а значит
не дальше $2\sqrt{5}$ от O_1
Получается, что ~~площадь~~ нужная площадь в
зоне #1 $= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 - S_{O_1AB} =$
$= \frac{120}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot O_1A \cdot O_1B \cdot \sin 120 =$
$= \frac{20\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$. Такая же площадь в
зоне #2

В зоне #3 нужная площадь является
той частью круга с центром в A и
радиусом $\sqrt{5}$, которая лежит в $\angle FAC$,
т.е. $\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = \frac{1}{6}\pi \cdot 5 = \frac{5}{6}\pi$. В зоне #4
Такая же площадь

Чистовик
Лист 9

Сложим все площади:

$$\frac{20\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{20\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi =$$

$$= \frac{90}{6}\pi - \frac{15\sqrt{3}}{6} = \frac{90\pi - 15\sqrt{3}}{6} = \frac{30\pi - 5\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{30\pi - 5\sqrt{3}}{2}$

Черновик $d>0$

$S=7a_1+\frac{7\cdot6}{2}d$

$a_7\cdot a_{12}>7a_1+21d+20$

$(a_1+6d)\cdot(a_1+11d)>7a_1+21d+20$

$a_1^2+17da_1+66d^2-7a_1-21d-20>0$

$(a_1+8d)(a_1+9d)<7a_1+21d+44$

$a_1^2+17da_1+72d^2-7a_1-21d-44<0$

$\cancel{72d^2}$

$72d^2-44<66d-20$

$$\begin{array}{r} -66 \\ 41 \\ \hline 25 \end{array}$$

$6d^2-24<0$

$$\begin{array}{r} -72 \\ 65 \\ \hline 5 \end{array}$$

65

$d^2<4$

$d=1$ ~~или 2~~

$a_1^2+17a_1+66-7a_1-21-20>0$

$a_1^2+17a_1+72-7a_1-21-44<0$

21100868 (U316477 M1297349)

$\begin{cases} a_1^2 + 10a + 25 \geq 0 \\ a_1^2 + 10a + 5 < 0 \end{cases}$ всегда крайне

черновик

$a_1 = 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9$

$100 - 100 = 0$

~~100~~ -

$\sqrt{5} \approx 2,23$

$1 - 10 + 5$

$4 - 20 + 5 \quad a = 5$

$9 - 30 + 5$

$16 - 40 + 5$

$25 - 50 + 5$

$36 - 60 + 5$

$49 - 70 + 5$

$64 - 80 + 5$

$81 - 90 + 5$

$100 - 100 + 5$

$2,23 \cdot 2,23$

$a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 \leq 5$

$(a-2)^2 + (b+1)^2$

≈ 3

$\times \begin{array}{r} 2,23 \\ 2,23 \end{array}$

669

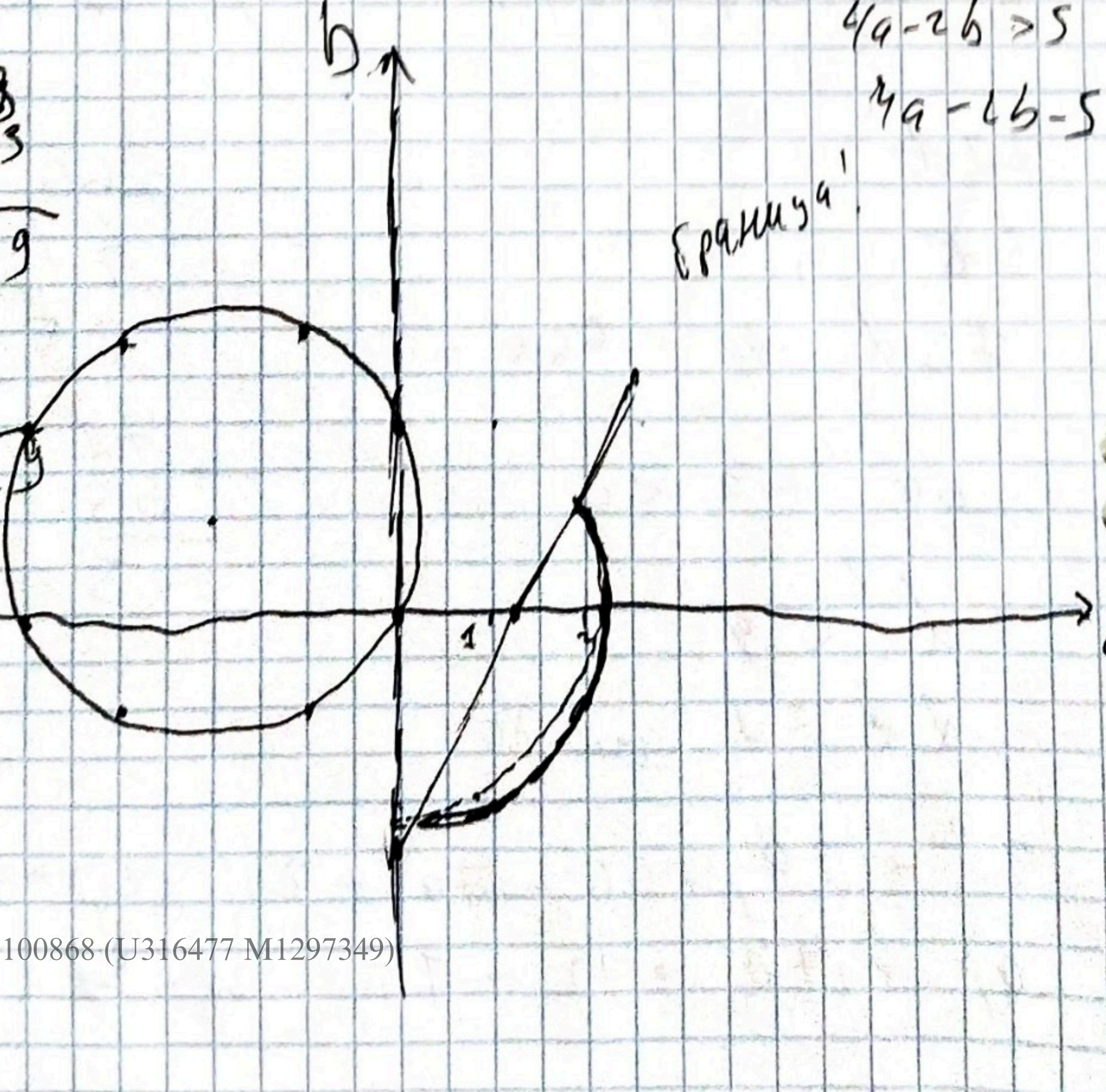
446

446

4,9729

$4a - 2b > 5$

$4a - 2b - 5 > 0$



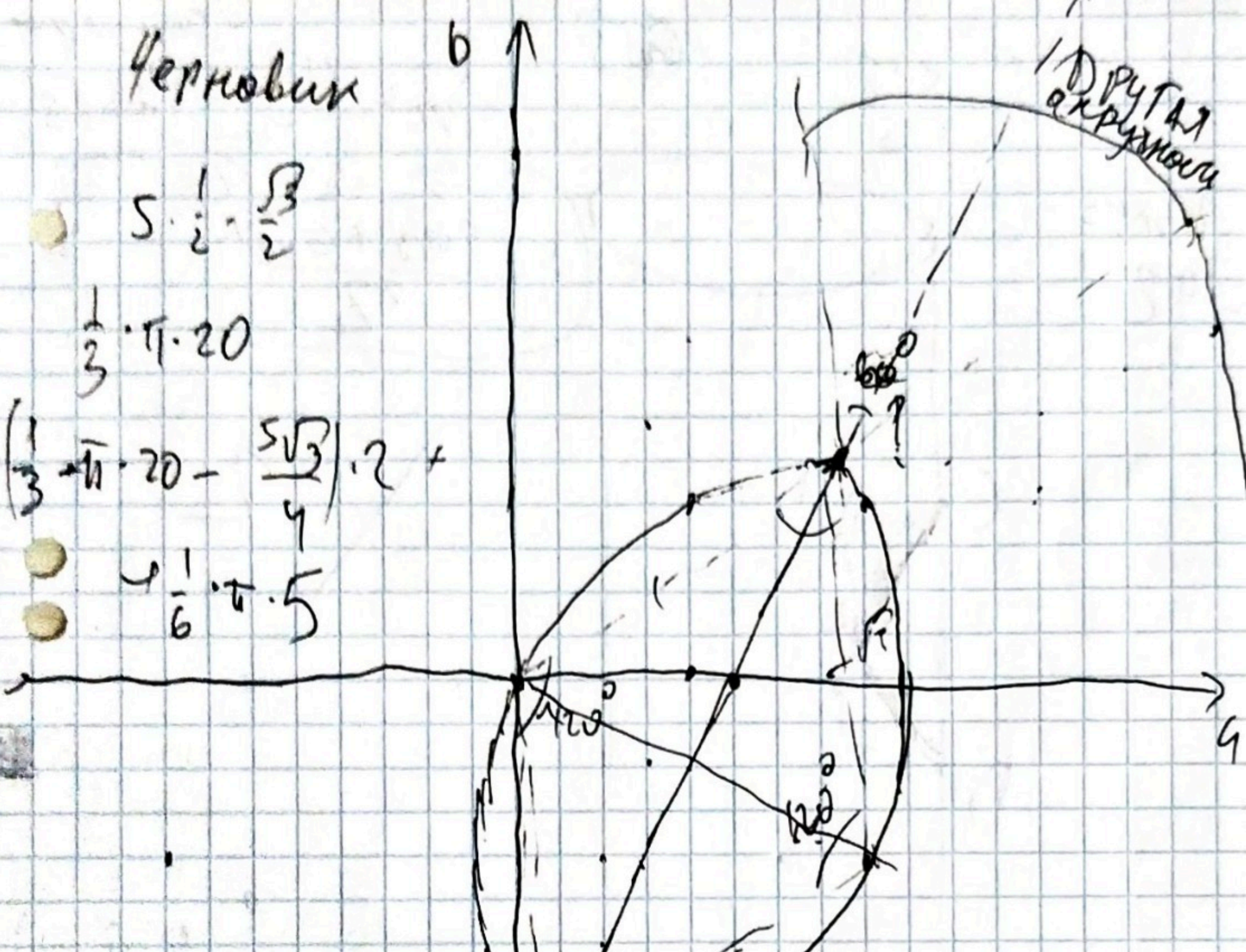
Черновик

$5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20$

$\left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20 - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 2 +$

$4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5$



ЧЕРНОВИК

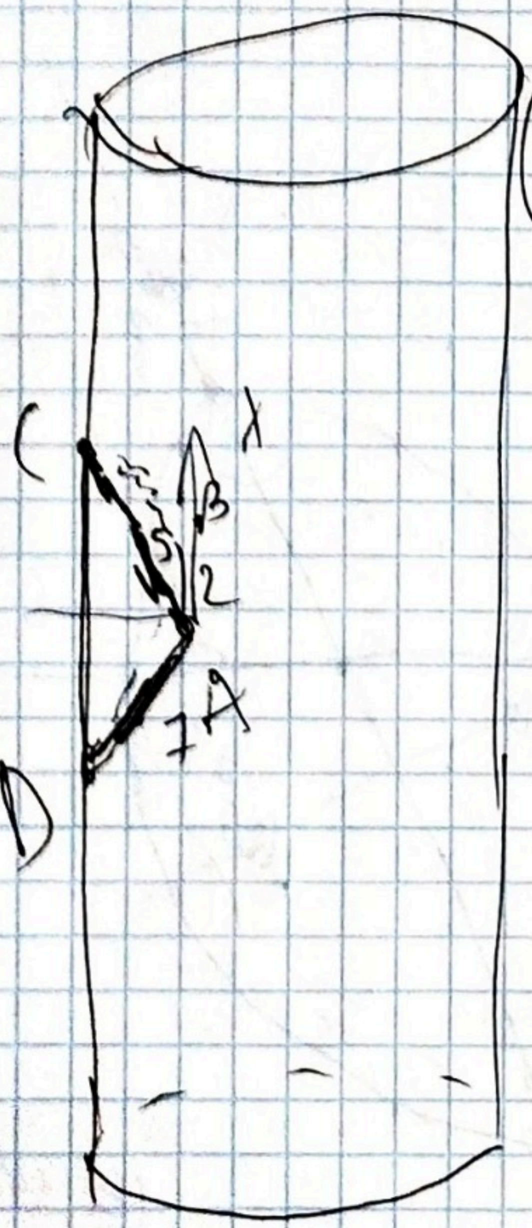
$2 < CD < 12$

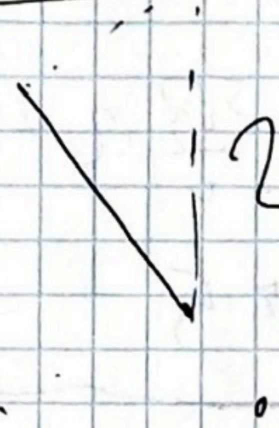
$46\sqrt{5}$

$x_{1/2} = \frac{2\sqrt{23} \pm \cancel{\sqrt{180}} \pm 6\sqrt{5}}{2}$

$23 \cdot 4 =$
$= 92$

$x = \frac{2\sqrt{23} + 6\sqrt{5}}{2}$





$0; 0; 0)$

$A = (0; 0; 0)$

$B = (2; 0; 0)$

$C = (1; 1; h)$

$D = (1; 1; h - x)$

$\cancel{\sqrt{1+1+h^2}}$

$\sqrt{1+1+h^2} = 5$

$h = \sqrt{23}$

$\sqrt{1+1+(h-x)^2} = 7$

$(h-x)^2 = 45$

$23 - 2\sqrt{23}x + x^2 = 45$

$x^2 - 2\sqrt{23}x - 22 = 0$

$92 + 88 = 180$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100868**

ID профиля: **316477**

Вариант 18

Чистовик

Лист 1

№ 7

Т.к. все числа делятся на 15, то если мы $3^{15} \cdot 5^{18}$ поделим на 15, мы получим ~~3 множ простых множителей~~ 14 троек и 17 пятёрок. Их нужно ~~разби~~ разносить по числам a, b и c так, что ~~во всех $3^{ёх}$ сразу не т 3 ни трой~~ в каком-то ~~одном~~ числе не было троек и в каком-то числе не было пятёрок (возможно эти числа совпадают).

~~Разделим~~ Кол-во таких делений будет:

$$\underbrace{(3 \cdot 13 + 3)}_{\text{деление троек}} \underbrace{(3 \cdot 16 + 3)}_{\text{деление пятёрок}} = 2142$$

тройки в $2^{ух}$ числах; Все тройки в одном числе; пятёрки ~~тройки~~ в $2^{ух}$ числах; Все пятёрки в одном числе

Ответ: 2142

№ 5

Чистовик
Лист 2

~~Заметим, что логарифм — монотонно уменьшающаяся функция, также заметим, что равенство 2^{ух} логарифмов достигается~~

Допустим, у нас $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) =$

$= \log_{6x-14}(x-1)^2 = t$ и тогда и $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = t-1$, тогда:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^t = (6x-14) & (1) \\ (6x-14)^t = (x-1)^2 & (2) \\ (x-1)^{t-1} = \left(\frac{x}{3}+3\right) & (3) \end{cases}$$

(1) $6x-14 = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t}{2}}$

(2) $x-1 = (6x-14)^{\frac{t}{2}} = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t^2}{4}}$

(3) $\frac{x}{3}+3 = (x-1)^{t-1} = \left(\left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t^2}{4}}\right)^{t-1} =$

$= \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t^2}{4}(t-1)} \Rightarrow \frac{t^2}{4}(t-1) = 1$

Чистовик
Лист 3

$$\frac{t^2}{4}(t-1)=1$$

$$t^2(t-1)=4$$

$$t^3-t^2-4=0$$

$$(t-2)(t^2+t+2)=0$$

$t^2+t+2>0$ Всегда, значит $t=2$, тогда

(2) $x-1=6x-14$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}$

(1) $6x-14=\frac{x}{3}+3$

$\frac{17}{3}x=17$

$x=3\neq\frac{13}{5}$

Не совпадает, значит $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\neq$

$\neq\log_{6x-14}(x-1)^2$

Допустим, у нас $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=$

$=\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=t$, а $\log_{6x-14}(x-1)^2=t-1$, тогда:

Чистовик
лист 4

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^t = (6x-14) & (1) \\ (6x-14)^{t-1} = (x-1)^2 & (2) \\ (x-1)^t = \frac{x}{3}+3 & (3) \end{cases}$$

(1) $6x-14 = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t}{2}}$

(2) $x-1 = (6x-14)^{\frac{t}{2}-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)}$

(3) $\frac{x}{3}+3 = (x-1)^t = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{t\cdot\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow t\cdot\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1,$

$\frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{4} - 1 = 0$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

такое же уравнение получалось в предыдущем случае, $\Rightarrow t=2$

(3) $(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3$

$x^2 - 2x + 1 - \frac{x}{3} - 3 = 0$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

$D = 49 + 3\cdot 6\cdot 4 = 121 = 11^2$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{2 \cdot 3}$

Чистовик
лист 5

$x_1 = 3$

$x_2 = -\frac{2}{3}$ ✗ т.к. $x - 1 > 0$, иначе основание логарифма меньше нуля

(1)

$6x - 14 = \left(\frac{x}{3} + 3\right)^1$ Подставим $x = 3$

$18 - 14 = \frac{3}{3} + 3$

$4 = 4$ ✓

(2)

$(x - 1) = (6x - 14)^{\frac{1}{2}}$ Подставим $x = 3$

$3 - 1 = \sqrt{18 - 14}$

$2 = \sqrt{4}$ ✓

Получается, $x = 3$ подходит.

Допустим, $\log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3} + 3\right) = t$ и

$\log_{\frac{x}{3}-3}(6x - 14) = t - 1$, тогда:

Чистовик
лист 6

$$\begin{cases} (6x-14)^t = (x-1)^2 & (1) \\ (x-1)^t = \frac{x}{3}+3 & (2) \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3}^{\,t-1} = (6x-14) & (3) \end{cases}$$

(1) $(x-1) = (6x-14)^{\frac{t}{2}}$

(2) $\frac{x}{3}+3 = (x-1)^t = (6x-14)^{\frac{t^2}{2}}$

(3) $6x-14 = \sqrt{\frac{x}{3}+3}^{\,t-1} = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{t}{2}-\frac{1}{2}} =$

$= \left(\frac{x}{3}+3\right) (6x-14)^{\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1$

$=$

$\frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{4} - 1 = 0$

Такое же уравнение получалось в предыдущ случае $\Rightarrow t=2$

(2) $(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3$. Такое же уравнение получалось в предыдущем случае $\Rightarrow x=3$, который подходил в предыдущий случаб, а значит он сюда не подойдет.

Ответ: 3

Частовик
лист 7

0 6

$$\frac{S_{ABK}}{S_{CBK}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{6}{5}$$

21100868 (U316477 M1297350)

Черновик

№1.

$\times\begin{array}{r}51\\42\\\hline 102\\204\end{array}$

$5\cdot3$

7

12

4

$49+72=$

$121=11^2$

8

24

$4\cdot24=96$

$12\cdot8=96$

a b c

87

$42\times5\cancel{7}$

3 5

$(3\cdot 21 \; 13-3)\cdot$

$\cdot(3\cdot 18-3)$

$c\to a$

$c\to b$

$a\to b$ $\quad -1$ $\quad -1$

$a\to c$

$b\to a$

$b\to c$ $\quad -1$

$2\cdot3^2$

36 8 $36\cdot8\cdot15$

$2^1\cdot3^2\cdot5^1$

$2\cdot5\cdot3\;30$

3 2 2 -3 $\cdot5$

2

$36\cdot240=$

$\cancel{\times\begin{array}{r}240\\36\end{array}}$

$t^3-t^2+0t-4\;|\;t-2$

$-\;t^3-2t^2 \qquad t^2+t+2$

t^2-0t

$-\;t^2-2t$

$2t-4$

$2{,}42$

черновик

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$

$2^{x} = 3 \qquad 3^{y} = 4$

$\log_6 100 \cdot \log_{100} 1000000$

$\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\frac{\log_a b}{\log_b c} - ? = \cancel{\log_c c - ?}$

$\cancel{2\log_c a} \; ?$

$\log_{10} 2 \qquad 0{,}4$

$\log_2 4 \qquad = 2$

$\frac{\log_{10} 2}{\log_2 4} = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2 = \log_4 2$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)$$

$\log_2 \cancel{18-19=2}$ $\frac{x}{2}$

$\log_{\cancel{4}} 4 = \log_4 2$ x

$= \log_2 4$

$32x$

$34-12x$

$\cancel{\log_3 22}$

$\cancel{\log}_{22}$ $x = 3$

$\frac{x}{3}$ $\frac{9}{2}$

$((2^3)^3)^3$

$\frac{9}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

$(8)^3$

512

$\cancel{\frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}}$

64

$\cancel{256}$

$\cancel{48}$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^t = 6x-14$

$(6x-14)^t = x-1$

$(x-1)^{2t-1} = \frac{x}{3}+3$??

$((6x-14)^t)^{2t-1}$ $\left(\left(\left(\frac{x}{3}+3\right)^t\right)^t\right)^{2t-1} = \frac{x}{3}+3$

21100868 (U316477 M1297350)

Черновик

$$\left(\frac{x}{3}+3\right)^{t^2(2t-1)} = \frac{x}{3}+3$$

$\times\frac{14}{19}$

$280-14=266$

$306-266$

$$t^2(2t-1)=1$$

$$t^2=\frac{1}{2t-1}$$

$t=1$

~~$(6x-14)=$~~

~~$t^2(2t-1)=1$~~

$$2t^3-t^2-1=0$$

$$2\left(t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$2(t-1)\left(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=0$$

$t^3+0t^2-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2} \mid t-1$

t^3-t^2

$t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}t^2$

t^2-t

$\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

$t^3-\frac{1}{2}t^2+0t-\frac{1}{2} \mid t-1$

t^3-t^2

$t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}t^2-0t$

$$\frac{x}{3}+3=6x-14$$

$$\frac{306-14\cdot 19}{19}=\frac{51-19}{19}\ ?$$

$$17x=\frac{19}{3}x$$

$$\frac{266}{19}$$

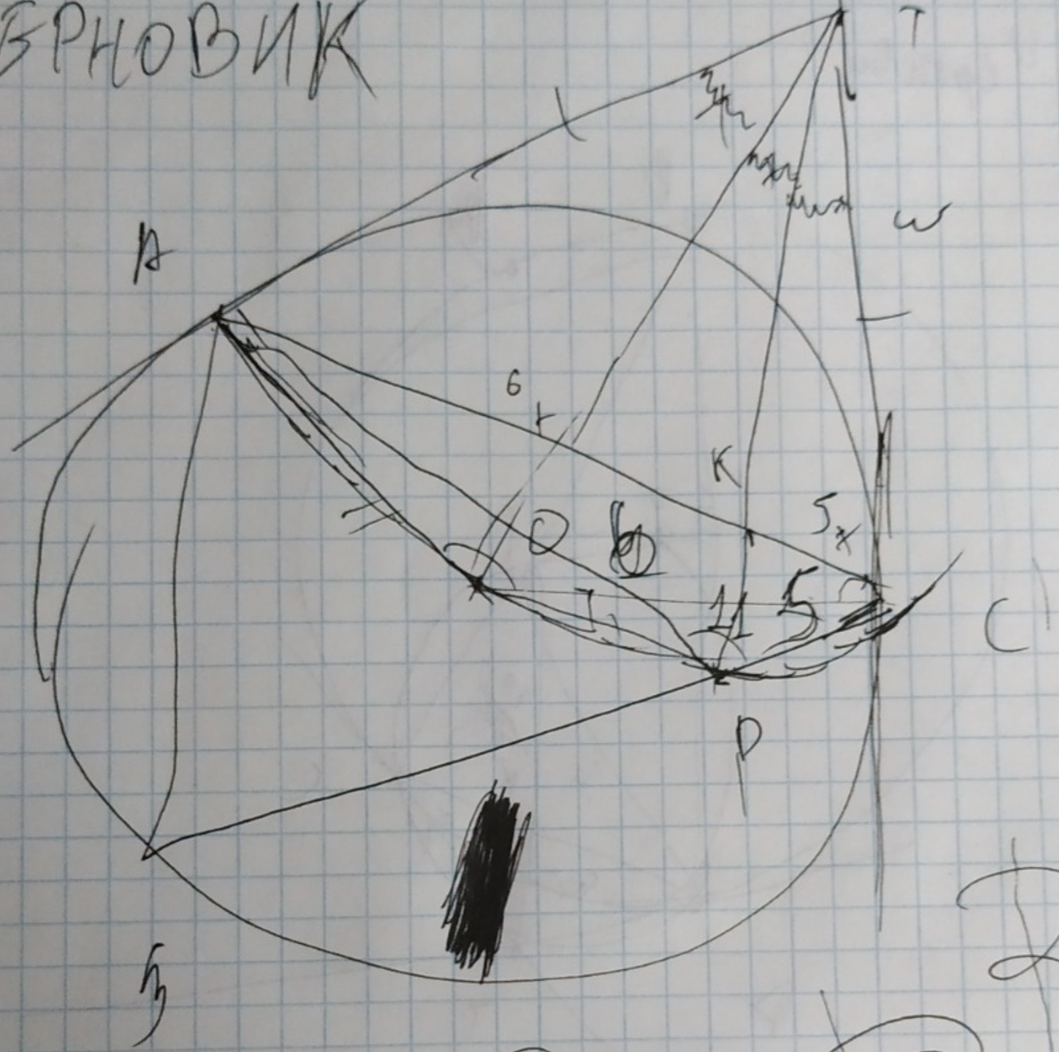
$$x=\frac{51}{19}$$

$$6x-14=x-1$$

$$6\cdot\frac{51}{19}-14=\frac{51}{19}-1\ -?$$

21100868 (U316477 M1297350)

ЧЕРНОВИК



Черновик