Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100859**

ID профиля: **823742**

Вариант 18

Чистовик [redacted] стр 1 Вариант 18.

№ 1

1) Найдем сумму первых 7 членов, обозначив $a_1 = a$ для удобства, а разность примем за d, причем $d > 0$, т.к. прогрессия возрастающая

2) $S = \frac{2a + (7-1)d}{2} \cdot 7 = 7a + 21d$

3) Для удобства выпишем a_7, a_9, a_{10}, a_{12}:
$a_7 = a + 6d$; $a_9 = a + 8d$; $a_{10} = a + 9d$, $a_{12} = a + 11d$

4) Выпишем систему из условия:

$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+6d)(a+11d) > 7a + 21d + 20 \\ (a+8d)(a+9d) < 7a + 21d + 44 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 17da + 66d^2 > 7a + 21d + 20 \\ a^2 + 17da + 72d^2 < 7a + 21d + 44 \end{cases} \Rightarrow$ из 2 вычтем 1

$\Rightarrow \begin{cases} 6d^2 < 24 \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 < 4 \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d > 0 \\ d < 2 \end{cases} \Rightarrow d = 1$, т.к. последв. состоит только из целых чисел

5) Подставим $d = 1$ в исходную систему

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 17a + 66 > 7a + 41 \\ a^2 + 17a + 72 < 7a + 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+5)^2 > 0 \\ a^2 + 10a + 7 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a \in R / \{-5\} \\ \begin{cases} a > -5 - 3\sqrt{2} \\ a < -5 + 3\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

б) Выпишем оценку для

$$\begin{cases} a > -5 - 3\sqrt{2} \\ a < -5 + 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5-3\sqrt{2} > -5-5 = -10 \\ -5-3\sqrt{2} < -5-4 = -9 \end{cases} \\ \begin{cases} -5+3\sqrt{2} > -5+4 = -1 \\ -5+3\sqrt{2} < -5+5 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

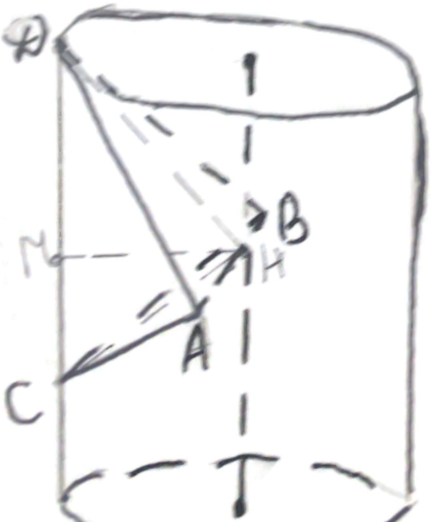
Объединяя получ

$$\Rightarrow \begin{cases} a \neq -5 \\ a > -10 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$$

Ответ: $a = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

№2



Дано: Цилиндр, тетраэдр ABCD,
$AB = 2$; $AC = CB = 5$; $AD = DB = 7$

Найти: CD

Решение

1) По условию R минимальный, тогда очевидно, что AB является наибольшей хордой в круговом сечении, ~~что~~ парал-ном сечению основания ⇒ AB явл. диаметром

2) CD парал-но оси цилиндра, а значит CD перпендикулярно основанию

3) Пояснение к пункту 1: если все вершины лежат на цилиндре, то хотя бы 1 отрезок явл хордой окр-ти и эта хорда, пусть k: $k \leq 2R$, очевидно, что из данных нам отрезков подходит только AB, тогда $R = \frac{1}{2} AB = 1$

Чистовик стр 3 Вариант 18

4) В равнобедренных треугольниках ABC и ADB проведем высоты, к стороне AB которые также явл. медианами, а значит пересекаются в середине AB, пусть в точке H, тогда точка H является центром окружности, плоскость которой парал-на основанию

5) $\triangle DBH$: $DH \perp AB$, $DB = 7$, $HB = r = 1$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $DH = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$

6) $\triangle ACH$: $AC = 5$; $CH \perp AB$, $AH = R = 1 \Rightarrow$

по т. Пифагора $CH = \sqrt{5^2 - 1} = \sqrt{24}$

7) Проведем радиус, HM, перпендикулярный $DC \Rightarrow MH = R = 1$

8) $\triangle DMH$: $DM \perp MH$, $DH = \sqrt{48}$, $HM = 1$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $DM = \sqrt{48 - 1^2} = \sqrt{47}$

9) $\triangle CMH$: $CM \perp MH$, $CH = \sqrt{24}$, $HM = 1$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $CM = \sqrt{24 - 1^2} = \sqrt{23}$

$\Rightarrow DC = DM + DH = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{23} + \sqrt{47}$

Чистовик стр 4 Вариант 18

№ 3.

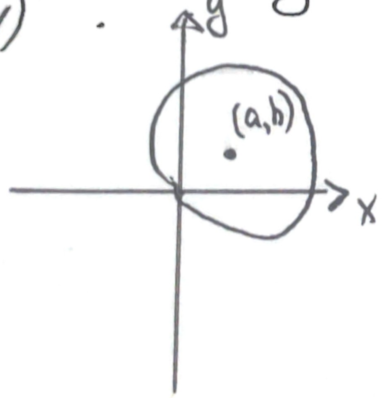
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,\,5)\end{cases}$$

Система имеет вид

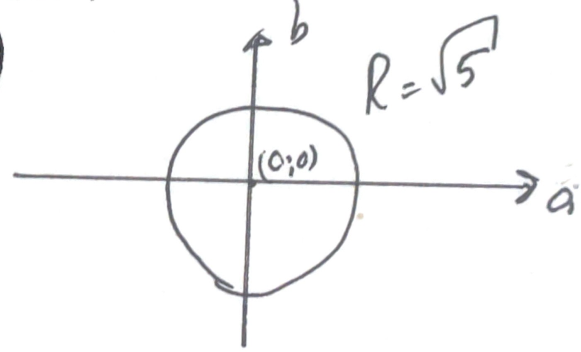
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (1)\\ a^2+b^2\le 5 & (2)\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5 & (3)\end{cases}$$

Начертим приблизительные графики каждого из выражений:

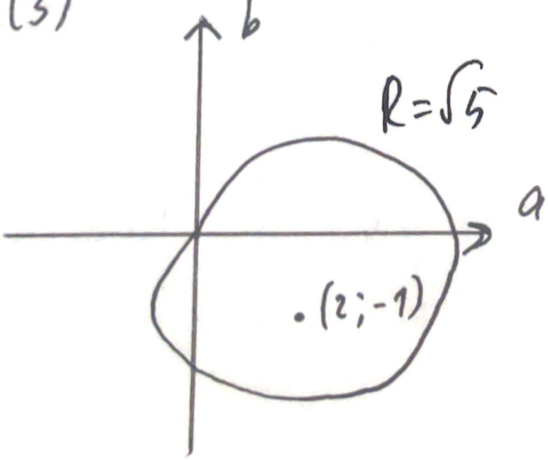
(1)



(2)



(3)



Окружности пересекаются в секторе с углом 120°

=> Площадь всей окр-ти $\pi R^2 = 5\pi$

Площадь сектора 120° = $\frac{1}{3} S_{кр} = \frac{5\pi}{3}$

площадь двух таких $\frac{10\pi}{3}$

Для каждой точки мы можем из этого сектора провести r радиуса $\sqrt{5}$ => $(S=5\pi)$

$$\Rightarrow S_M = 2\cdot S + \frac{10\pi}{3} = 2\cdot 5\pi + \frac{10\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{40\pi}{3}$.

Черновик

$$S=\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)\cdot 7=7a_1+21d$$

$a_7=a_1+6d$

$a_9=a_1+8d$

$a_{10}=a_1+9d$

$a_{12}=a_1+11d$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d)>7a_1+21d+20\\(a_1+8d)(a_1+9d)<7a+21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+17da+66d^2>7a+21d+20\\a^2+17da+72d^2<7a+21d+44\end{cases}$$

$6d^2<24$

$d^2<4$

$$\begin{cases}d>0\\d<2\end{cases}$$

$\Rightarrow d=1$

т.к. состоит из целых чисел

$\Rightarrow a^2+17a+66>7a+41$

$a^2+17a+72<7a+65$

$$\begin{cases}a^2+10a+25>0\\a^2+10a+7<0\end{cases}\qquad (a+5)^2>0$$

$D=25-7=18$

$=9\cdot 2=3\sqrt{2}$

$a_{12}=-5\pm 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}>3$

$3\sqrt{2}>4$

$3\sqrt{2}<5$

$\Rightarrow$

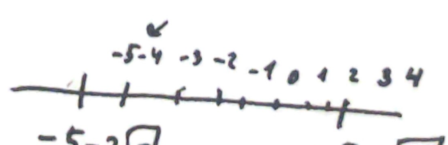
$3\sqrt{2}>4$

$3\sqrt{2}<5$

↑ оценка нужна

$\Rightarrow -5+3\sqrt{2}>-5+4$ $\quad > -1$

$-5+3\sqrt{2}<-5+5$ $\quad < 0$



$-9; -8; -7; -6; \cancel{-5}; -4; -3; -2; -1$

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases} \qquad a,b\in R$$

Обозначим выражения за I, II, III соотв.

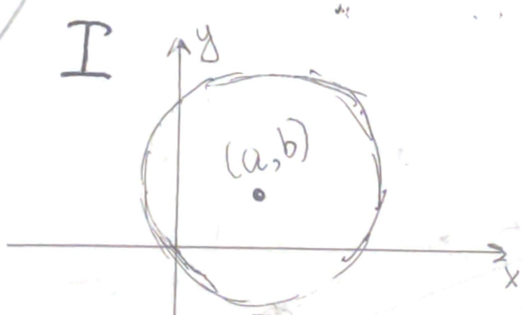
⇒ Начертим графики каждого выражения (приблиз)

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\text{I}\\ \text{II}\\ \text{III}\end{array}\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5\end{cases}$$

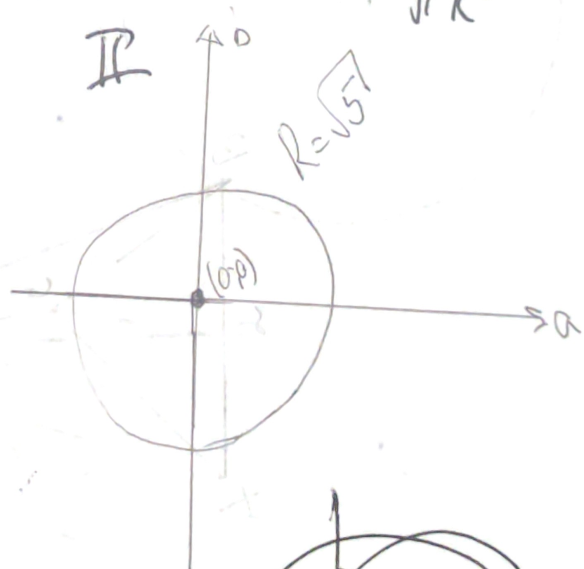
пересек 120°

πR^2

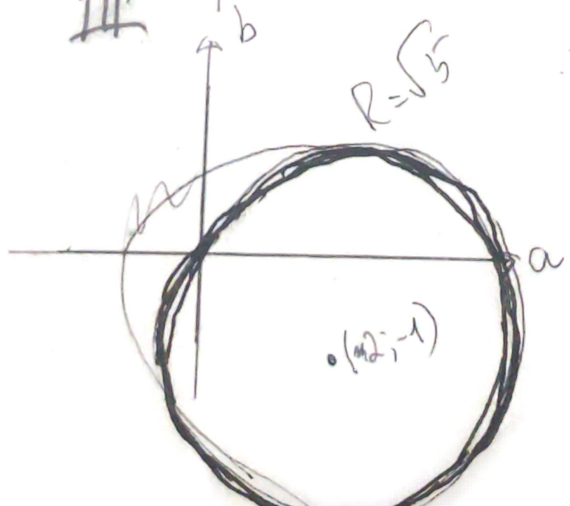
I

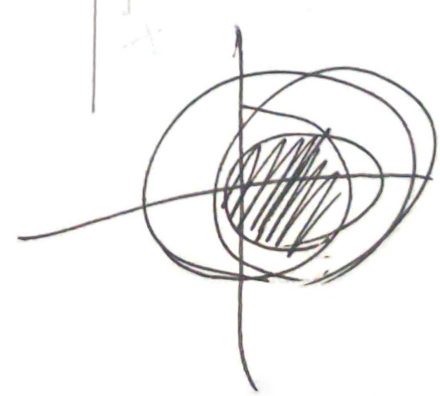


II

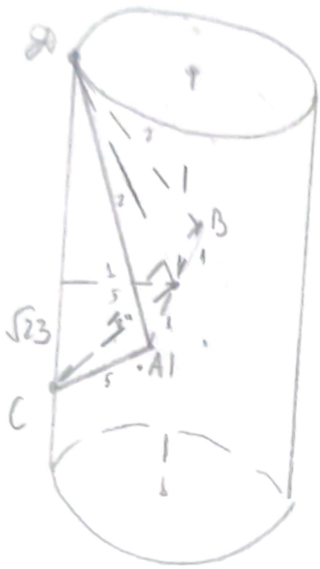


III





II



$\sqrt{23}+\sqrt{47}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100859**

ID профиля: **823742**

Вариант 18

Чистовик Вариант 18 часть 2 стр 1

№ 4

$НОД(a;b;c) = 15 = 3^1 \cdot 5^1$

$НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

1) Если есть НОД = 15, то есть множитель $3^1 \cdot 5^1 = 1$
Если НОК $= 3^{15} \cdot 5^{18}$, то есть множитель $3^{15} \cdot 5^{18}$, т.к. иначе не будут получаться такие НОД и НОК.

2) Тогда из п. 1 следует, что a, b, c имеют вид $3^x \cdot 5^y$, где $x \in [1;15]$ и $y \in [1;18]$

3) т.к. ищутся упорядоченные тройки, то ~~каждая~~ каждое число может иметь 3 позиции $\Rightarrow$ $3! = 6$ вариантов расположения для каждой неупорядоченной тройки.

4) Сначала рассмотрим степени тройки
Не нарушая общности пусть числа имеют вид (их множители - тройки) $3^1; 3^t; 3^{15}$.
Вариантов комбинаций для $t \in [2;14] = 13$
Случай $t = 1$ или $t = 15$ рассмотрим отдельно
Тогда для $t \in [2;14]$: $13 \cdot 6 = 78$ вариантов.
если $t = 1$, то возможна только 3 варианта расположения чисел $3^1; 3^1; 3^{15}$
аналогично для $t = 15$ $\Rightarrow$ всего для троек
$78 + 3 + 3 = 84$ варианта.

Чистовик Вариант 18 часть 2 стр 2

5) Аналогично рассмотрим для 5-ок,

также в $3! = 6$ вариантов расположения для неупорядоченной тройки

числа, не нарушая общности имеют вид $5^1; 5^p; 5^{18}$, тогда для $p \in [2;17] = 16 \cdot 6 = 96$ вариантов

если $p=1$ или $p=18$ аналогично тройкам добавляется ~~всег~~ еще 3 варианта.

$\Rightarrow$ для пятерок всего $96+3+3=102$ варианта

6) Всего вариантов $102 \cdot 84 = 8568$

Ответ: 8568.

Чистовик Вариант 18 часть 2, стр 3

№2.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14),\ \log_{6x-14}(x-1)^2,\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

ОДЗ $x > 2\frac{1}{3}$

$x \neq 2,5$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \cdot \log_{6x-14}(x-1)^2 \cdot \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 4$$

Пускай $\frac{x}{3}+3 = a$, $6x-14=b$, $x-1=c$

$\Rightarrow$ не нарушая общности $a=b$,

$c=a-1$

1) $a^2 b = 4$ $\quad a^2(a+1)=4 \Rightarrow a=2$

$a=c+1$

тогда
$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2=2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ 1) $\frac{x}{3}+3=6x-14 \Rightarrow x=3$

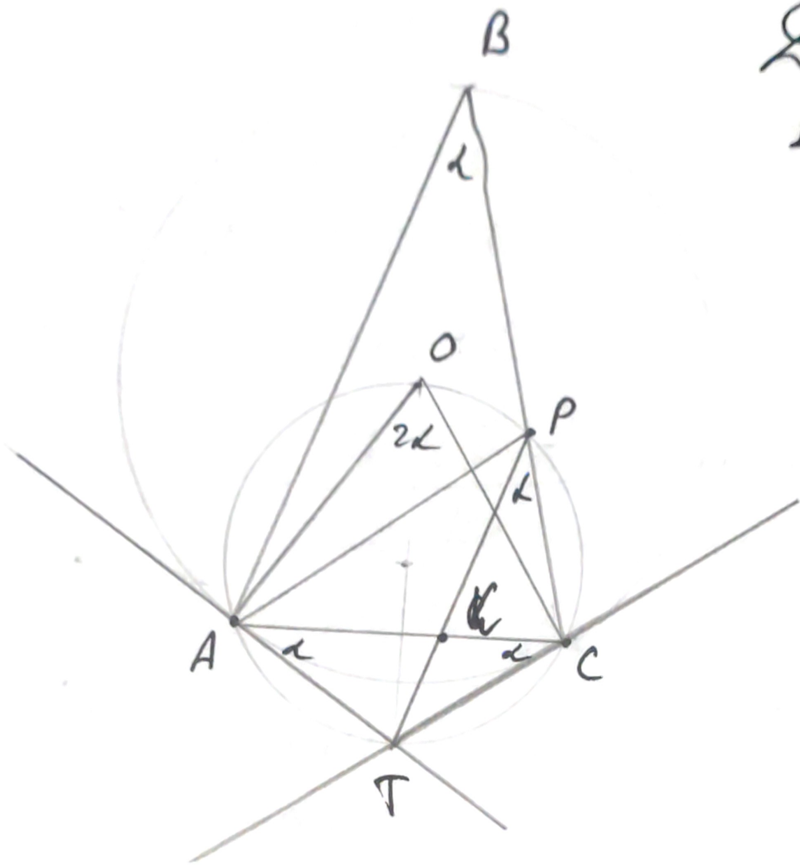
2) $(x-1)^2=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=3$

3) $6x-14=x-1 \Rightarrow x=2,6$

Проверим $x=3$, он подходит, будет значение у log 2 1 2

$\Rightarrow$ Ответ: $x=3$

Чистовик вариант 18 часть 2 стр 4



Дано: $\triangle ABC$,
~~ΔAB~~ $AC \cap TP = (\cdot)K$,
$S_{APK} = 6$
$S_{CPK} = 5$, $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

Найти: S_{ABC}
AC

Решение

1) $AT = TC$, как касат к одной окр-ти.
2) $\angle OCT = \angle OAT = 90°$ т.к. OC и AO - перпендик к касательным
=> сумма углов 180 => четырехуг $AOCT$ - вписан в окр-ть =>
т.к. $\triangle ATC$ = равноб из п. 1, то пусть $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$, как углы при основании
=> $\angle ATC = 180 - 2\alpha$ => $\angle AOC = 180 - \angle ATC = 2\alpha$
по св-ву впис. четырех уг.
тогда $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$, как впис, =>
=> $\angle ABC = \alpha$.

Чистовик вар 18 часть 2 стр 5

3) $\angle CAT = \angle TPC = \alpha$, как опирающ. на 1 дугу $\Rightarrow \angle TPC = \angle ABC$

$\Rightarrow$ т.к. это соотв углы, то $AB \parallel TP$.

$\Rightarrow \angle$ $\angle BAC = \angle PKC$, как соотв.

4) $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK \cdot KP \cdot 0{,}5 \cdot \sin(AKP)}{KC \cdot KP \cdot 0{,}5 \cdot \sin(180 - \angle AKP} = \frac{AK}{KC} =$

$= \frac{6}{5} \Rightarrow$ пусть $AK = 6x$, $KC = 5x$

$\Rightarrow$ из пункта 5 следует, что $\triangle ABC \sim \triangle PKC$ по 2 углам

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{11\cancel{x}}{5\cancel{x}}\right)^2$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{11^2}{5^2} \cdot S_{PKC} = \frac{121}{25} \cdot 5 = \frac{121}{5}.$

б))

Ответ: $\frac{121}{5}.$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$$

$6x > 14$

$x \neq -6$

$x > \frac{14}{6}$

$x \neq \frac{15}{6}$

$x \neq 1$

$$\cancel{2}\log_{\frac{x}{3}+3} 6x-14 = \cancel{2}\log_{6x-14}|(x-1)|$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3} 6x-14 = \frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)}$$

$$\cancel{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{x-1}(6x-14) = 1}$$

~~log~~

$\frac{x}{3}+3 = a$, $6x-14 = b$

$x-1 = c$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{a}} b,\ \log_b c^2,\ \log_c a$$

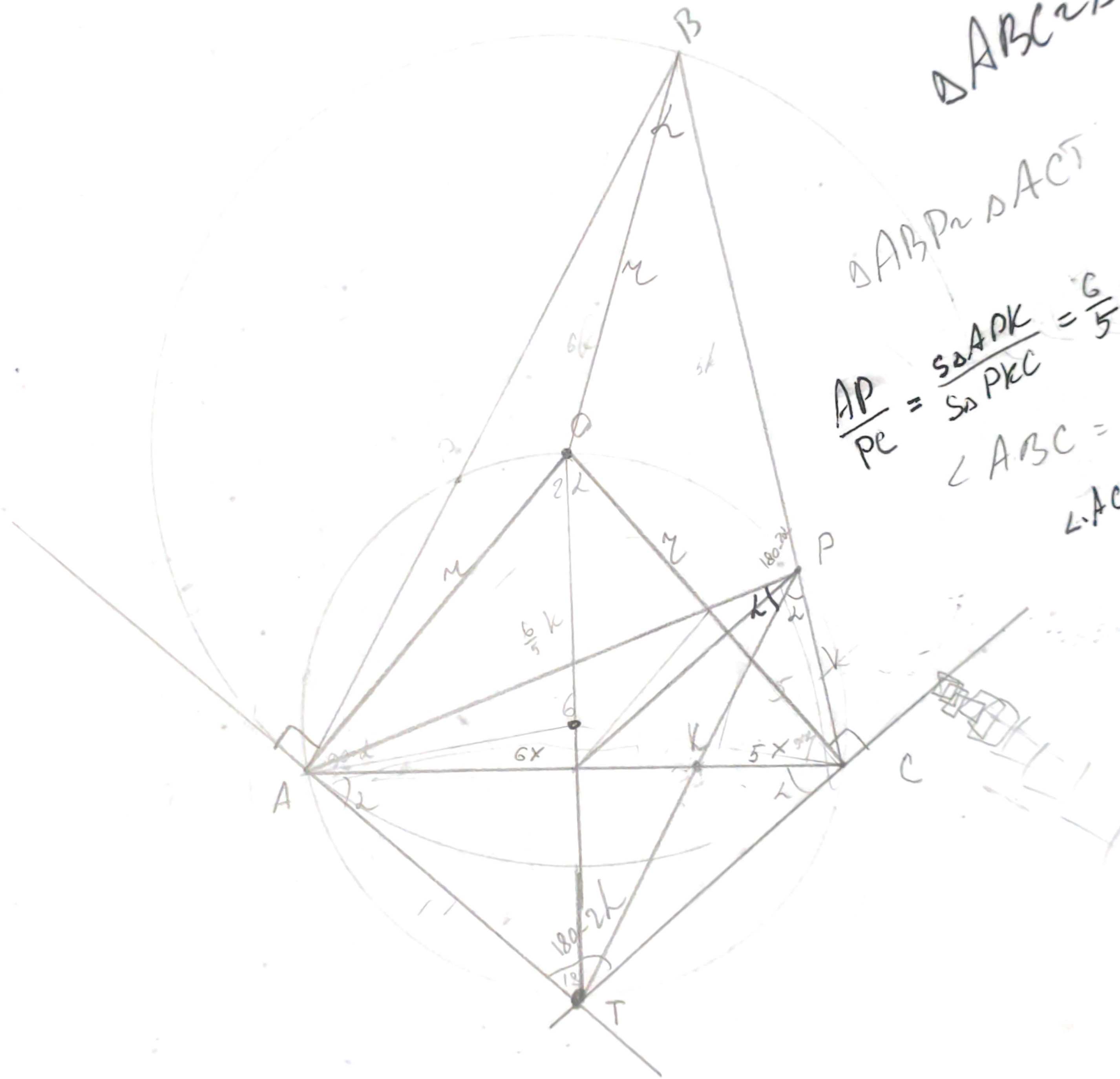
~~2log~~

$$\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>a \\ b\neq 1 \\ c\neq 1 \\ c>0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2}\log_{a^{\frac{1}{2}}} b = \cancel{2}\log_b |c| \\ \log_c a = \log_a b - 1 \end{cases}$$

$$\cancel{\log_a b = \frac{1}{\log_{|c|} b}}$$

$$\cancel{\log_b a = \log_b c}$$

~~log~~



$\triangle ABC \sim \triangle KPC$

$\triangle ABP \sim \triangle ACT$ $\quad \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{6}{5}$

$\angle ABC = \alpha$

$\angle AC = \frac{1}{2}\alpha$

№ 4.

$НОД(a,b,c) = 15 = 3^1 \cdot 5^1$
$НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

=> Из нод следует, что есть множитель $3^1; 5^1$
Из НОК следует, что есть множитель $5^{18} \cdot 3^{15}$
Числа a, b, c имеют вид ~~5~~ $3^x \cdot 5^y$,
где $x \in [1;15]$; $y \in [1;18]$

1) ~~Рассм~~ ~~~~ Рассмотрим на расположение степеней троек ~~~~ среди a;b;c, у нас есть $3^1; 3^{15}; 3^x$
Вариантов расположения $3! = 6$
В одном варианте кол-ва комбинаций для x
$x \in [2;14] = 13$.
Если $x = 1$, либо $x = 15$, то рассмотрим такие комб отдельно.
$x \in [2;14]$: $13 \cdot 6 = 78$ вариантов.
$x = 1$ => $3^1; 3^1; 3^{15}$ – 3 варианта
$x = 15$ – аналогично => всего $78 + 6 = 84$

2) Для 5-ок аналогично $6!$ $y \in [2;17] = 16$
=> $6 \cdot 16 = 96$. $y = 1$ 3 $y = 18$ 3
=> $96 + 6 = 102$ $102 \cdot 84 = 8568$

$$\begin{array}{r} \times\ 102 \\ 84 \\ \hline 408 \\ +816\ \\ \hline 8568 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 102 \\ 84 \\ \hline 408 \\ 816\ \\ \hline 8568 \end{array}$$

$\log_{\sqrt{a}} b,\ \log_b c^2,\ \log_c a$ $\quad \cancel{3}\ \cancel{1}\quad 2\quad 1\quad 2$

$x=3$

$$\begin{cases} 2\log_a b = 2\log_b c \\ \log_c a = 2\log_a b - 1 \\ \log_c a = 2\log c - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_a b = \log_b c \\ 1+\log_c a = 2\log_a b \\ 1+\log_c a = 2\log_b c \end{cases}$$

$\Rightarrow \log_b a = \log_b c = \underline{1}$

$\cancel{\log}\ \log_c ac = 2\log_a b$

$\log_c ac = 2\log_b c$

$\cancel{\log_2 4 - \log_2 8 = 6}$

$\cancel{4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5}$

$\cancel{2\log_a bc = \log}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14) = \log_{x-1} \left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \dfrac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) \cdot \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) = \dfrac{1}{2}$