Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100819**

ID профиля: **376860**

Вариант 18

Чистовик

№1.

$\{a_n\}$ - арифм. пр-я. $S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$\begin{cases} (a_1+6d)\cdot(a_1+11d) > S+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > S+20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < S+44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d - S > 20 - 66d^2 \\ a_1^2 + 17a_1d - S < 44 - 72d^2 \end{cases}$

Отсюда $44 - 72d^2 > 20 - 66d^2$; $6d^2 < 24$; $d^2 < 4$

т.к. $d > 0$ (возр. прогр-я), то $d = 1$ или $d = 2$

1) $d=1$: $\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 - 21 > 20 - 66 \\ a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 - 21 < 44 - 72 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$ $3\sqrt{2} \approx 4{,}23$; $-5-3\sqrt{2} \approx -9{,}23$

$-5+3\sqrt{2} \approx +0{,}77$

т.е. $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1; 0$

2) $d=2$: $\begin{cases} a_1^2 + 34a_1 - 7a_1 - 42 > 20 - 264 \\ a_1^2 + 34a_1 - 7a_1 - 42 < 44 - 288 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^2 + 27a_1 + 202 > 0 \\ a_1^2 + 27a_1 + 202 < 0 \end{cases}$ -

таких a_1 не сущ-ет.

Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1; 0.$

Чистовик.

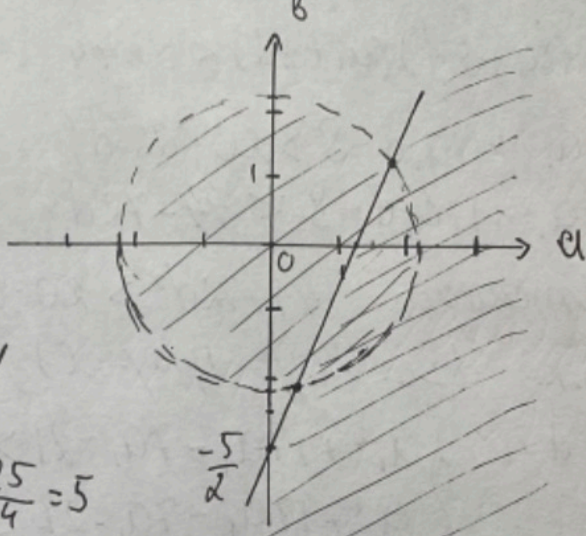
№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b;5) \quad (2)\end{cases}$$

(2): $a^2+b^2\le\min(4a-2b;5)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4a-2b\ge 5\\ a^2+b^2\le 5\end{cases} \quad ①\\ \begin{cases}4a-2b<5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases} \quad ②\end{array}\right.$$

①



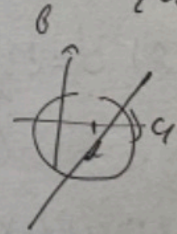
① Точки пер-я: $b=2a-\frac{5}{2}$ подст. в

$a^2+b^2=5$: $a^2+4a^2-2\cdot 2a\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}=5$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{25-5\cdot\frac{5}{4}}}{5}=\frac{5\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}}{5}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b=2a-\frac{5}{2}=2\pm\sqrt{3}-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$; $\cancel{a\in\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2};1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}$; $\cancel{b\in\left[-\frac{1}{2}-\sqrt{3};-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right]}$

② $a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5$; $(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$



точки пер-я: $\underbrace{b=2a-\frac{5}{2}}$ $\to$ в $(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

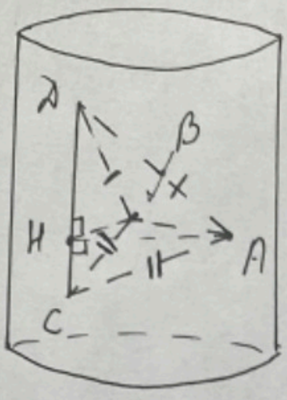
$a^2-4a+4+4a^2-2\cdot 2a\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\le 5$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0 \to a=\frac{5\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}}{5}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$

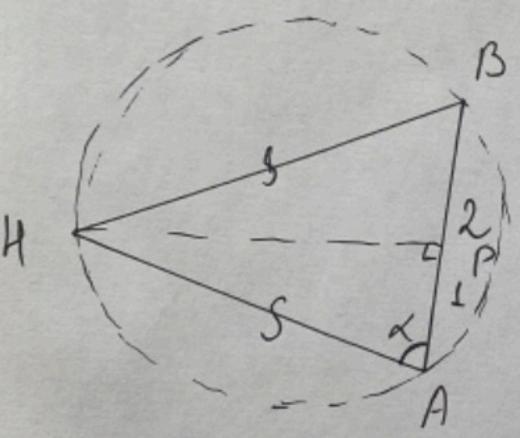
Чистовик

№2.

По усл., $DC \parallel OO_1$ (ось цилиндра) $\Rightarrow$ CD - образ.; По усл., $AD = DB$, $AC = BC$; CD - общ. $\Rightarrow \Delta CAD = \Delta CBD$ по 3м ст. Тогда если $AH \perp CD$ то и $BH \perp DC$ (т.к. осн-е высоты делит сторону в один. отном. в равных треуг.).



Т.к. $AH \perp CD$ и $BH \perp CD$, $\Rightarrow (BHA) \perp CD$ по призн. и т.к. CD - образ., $(AHB) \parallel$ пл-ти основания.



Пусть $CD = x$. Тогда $p(\Delta ACD) =$

$$= \frac{5+7+x}{2} = 6 + \frac{x}{2}. \quad S(\Delta ACD) =$$

$$= \sqrt{\left(6+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(6-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(36-\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x^2}{4}-1\right)} = \sqrt{-\frac{x^4}{16}+\frac{37x^2}{4}-36} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot AH \cdot CD = \frac{1}{2} AH \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{-\frac{x^4}{16}+\frac{37x^2}{4}-36}}{x} = \sqrt{-\frac{x^2}{4}+37-\frac{144}{x^2}} = \sqrt{\frac{-x^4+148x^2-576}{4x^2}}$$

В ΔAHB: $HP \perp AB$; т.к. $HB = HA$ (как высоты равных треуг. ΔACD и ΔBCD) $\Rightarrow \Delta HAB$ - р/б $\Rightarrow HP$ - выс. и мед $\Rightarrow$

$\Rightarrow AP = 1$. тогда $\cos\alpha = \frac{1}{AH}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{AH^2}} = \sqrt{1-\frac{4x^2}{-x^4+148x^2-576}} = \sqrt{\frac{-x^4+144x^2-576}{-x^4+148x^2-576}}$$

Чистовик.

№2 продолжение:

По обобщ. т. синусов в $\triangle ABH$: $2R = \dfrac{HB}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{-x^4+148x^2-576}\cdot\sqrt{-x^4+148x^2-576}}{2\cdot 2x\cdot\sqrt{-x^4+144x^2-576}} = \frac{-x^4+148x^2-576}{4x\sqrt{-x^4+144x^2-576}} =$$

$$\cancel{f(x) = \frac{-x^3+148x-\frac{576}{x}}{4\sqrt{-x^4+144x^2-576}}}, \quad \cancel{f'(x) = \left[\left(-x^3+148x-\frac{576}{x}\right)'\cdot 4\sqrt{-x^4+144x^2-576}\right.}$$

$$\cancel{\left.-\left(-x^3+148x-\frac{576}{x}\right)\cdot\left(4\sqrt{-x^4+144x^2-576}\right)'\right]\cdot\frac{1}{16(-x^4+144x^2-576)} = 0}$$

$$\cancel{\left(-3x^2+148-\frac{576}{x^2}\right)\cdot 4\sqrt{-x^4+144x^2-576} = \left(-x^3+148x-\frac{576}{x}\right)}.$$

$$= \frac{\sqrt{-x^4+144x^2-576}}{4x} + \frac{4x^2}{4x\sqrt{-x^4+144x^2-576}}$$

Пусть $t = \dfrac{\sqrt{-x^4+144x^2-576}}{x}$. Тогда $R = \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{t} \to \min$.

$$f(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{t}; \quad f'(t) = \frac{1}{4} + \frac{-1}{t^2} = 0 \Rightarrow t = \pm 2$$

$$t = \frac{\sqrt{-x^4+144x^2-576}}{x} = \pm 2. \quad \text{Т.к. } x > 0,\ t = 2$$

$$-x^4+144x^2-576 = 4x^2$$

$$x^4 - 140x^2 + 576 = 0$$

$$x^2 = 70 \pm \sqrt{70^2-576} = 70 \pm \sqrt{4324} = 70 \pm 4\sqrt{1081}$$

$70 + 4\sqrt{1081} \approx 198$ - не подх. по нер-ву треуг. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt{70-4\sqrt{1081}}$$

Ответ: $\sqrt{70-4\sqrt{1081}}$

Черновик

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$ $\quad a_i \in \mathbb{Z}$ $\quad S = 7a_1 + 21$

$> 7a_1 + 41$

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \quad a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$17 - 21 - 20 + 66$

$$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$$

$66 + 17 = 83 \quad 83 - 41 = 42$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20$

$(a_1 + 8d) \cdot (a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$72 - 66 = 6 \quad 44 - 20 = 24$

$a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

$17 + 21 = 38 - 20 = 18 + 66 = 84$

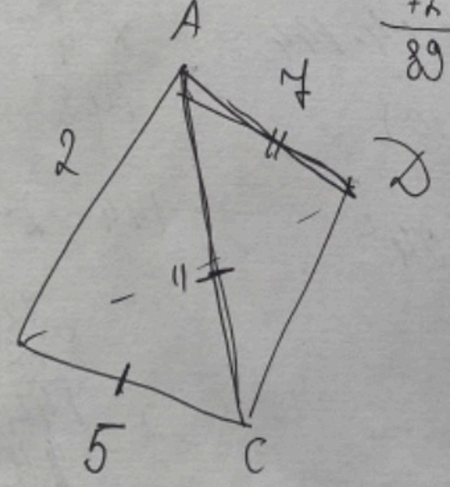
$38 + 72 = 110 - 44 = 66$

$72 + 17 - 21 - 44$

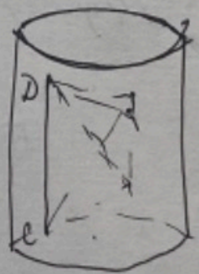
$17 \underbrace{- 21 - 20} + \underbrace{66} =$

$66 - 41 = 25 + 17 = 42$

$17 + 72 = 89 \quad 89 - 65 = 24$



$49 -$



$6 \cdot 7$

$49 - 4 \cdot 42$

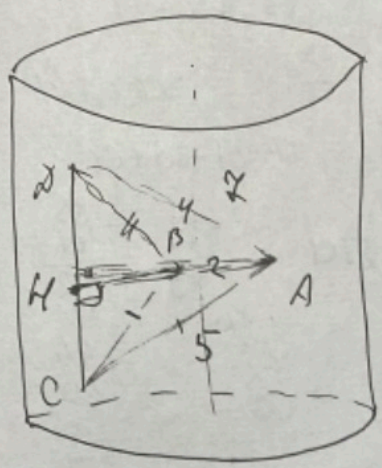
$6 \cdot 4$

$49 - 4 \cdot 24$

21100819 (U376860 M1296639)

Чернетка

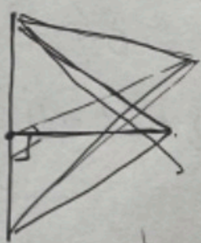
r - min ? CD - ?



$$\frac{36x^2}{4} - 36 - \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4}$$

$\triangle ADC = \triangle BDC$

$(2a - \frac{3}{2})$



$576 \mid 4$

$576 = 144 \cdot 4$

$\cancel{x^2} = D = 144^2 + 4 \cdot 4 \cdot 144 =$

$= 144 \cdot (144 + 16)$

$576 = 24^2$

$144 = 2 \cdot 72$

$36 \times 4 = 144$

$37 \times 4 = 148$

$144 \times 4 = 576$

72×72: 144, $+\ 46$, 160

32×4: 128, $+\ 70$, 198

$1 = \frac{7}{7} + \frac{7}{7}$ $r = 7$

$\frac{7}{1} + 1$ $\frac{7}{1} + \frac{4}{7}$

$1 = 7$ $= \frac{7}{7} + 7$

$-x^4 + 144x^2 - 576$

$31 \times 31 = 961$

$32 \times 32 = 1024$

$39 \times 39 = 1521$

$4900 - 576 = 4324$

$4324 \mid 4 = 1081$

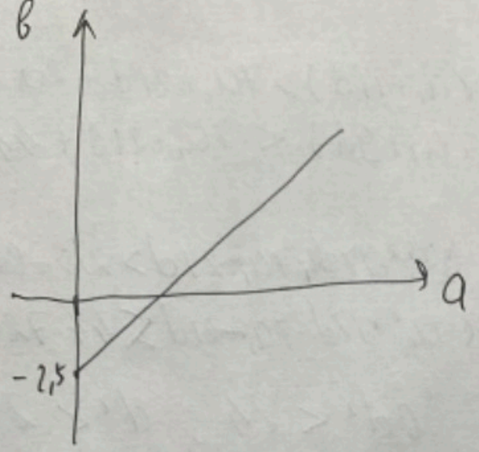
$37 \times 4 = 148$

$144 \times 4 = 576$

21100819 (U376860 M1296639)

$\exists : a, b : \quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b; 5) \end{cases}$ черновик

$4a - 2b = 5$



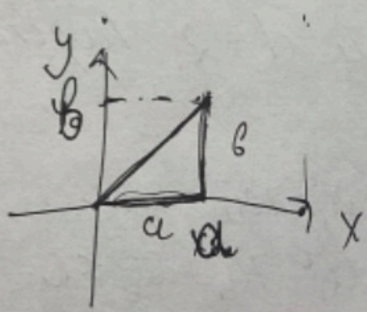
$2b = 4a - 5$

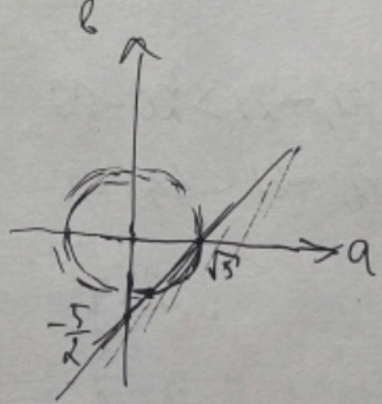
$b = 2a - \frac{5}{2}$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 5 \\ 4a - 2b > 5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 72 \\ -\ 44 \\ \hline 28 \\ -\ 21 \\ \hline 7 \end{array}$$

$\begin{cases} 4a - 2b \ge 5 \\ a^2 + b^2 \le 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4a - 2b < 5 \\ a^2 + b^2 \le 4a - 2b \end{cases}$





$2b \le 4a - 5$

$b \le 2a - \frac{5}{2}$

$a^2 + b^2 \le 4a - 2b$

$a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 \le 5$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5$

$\sqrt{5} \vee 2{,}5$

$5 \vee$

$25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 45 \\ \hline 125 \\ 60 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$$

$2b \le 4a - 5$

$b \le 2a - \frac{5}{2} = 0$

$\frac{25}{4} - \frac{10}{4}$

$$\begin{array}{r} 4900 \\ -\ 576 \\ \hline 4324 \end{array}$$

1081

$a = \frac{5}{4}$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array}$$

~~Чистовик.~~ Черновик

№1.

$\{a_n\}$ - арифм. пр-я. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot$

$\cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$; $\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 - 7a_1 - 21d > 20 - 66d^2 \\ a_1^2 + 17d - 7a_1 - 21d < 44 - 72d^2 \end{cases}$

отсюда $44 - 72d^2 > 20 - 66d^2$; $6d^2 < 24$; $d^2 < 2^2$

т.к. $d > 0$ (пр-я возраст.), $d = 1$ или $d = 2$. Подставим в систему

1) $d = 1$: $\begin{cases} a_1^2 + 17 - 7a_1 - 21 > 20 - 66 \\ a_1^2 + 17 - 7a_1 - 21 < 44 - 72 \end{cases}$ ~~$\begin{cases} a_1^2 - 7a_1 + 84 > 0 \\ a_1^2 - 7a_1 + 66 < 0 \end{cases}$~~

$\begin{cases} a_1^2 - 7a_1 + 42 > 0 \\ a_1^2 - 7a_1 + 24 < 0 \end{cases}$

$264 - 62 = 202$

$66 - 21 = 45$; $45 - 20 = 25$

$72 - 21 = 51$; $51 - 44 = 7$

$17 \times 2 = 34$

$288 - 86 = 202$

$25 - 7$; $25 - 7 = 18$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{18} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$1,41 \times 3 = 4,23$

$5,00 - 4,23 = 0,77$

$66 \times 4 = 264$

$72 \times 4 = 288$

$34 - 7 = 27$

21100819 (U376860 M1296639)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

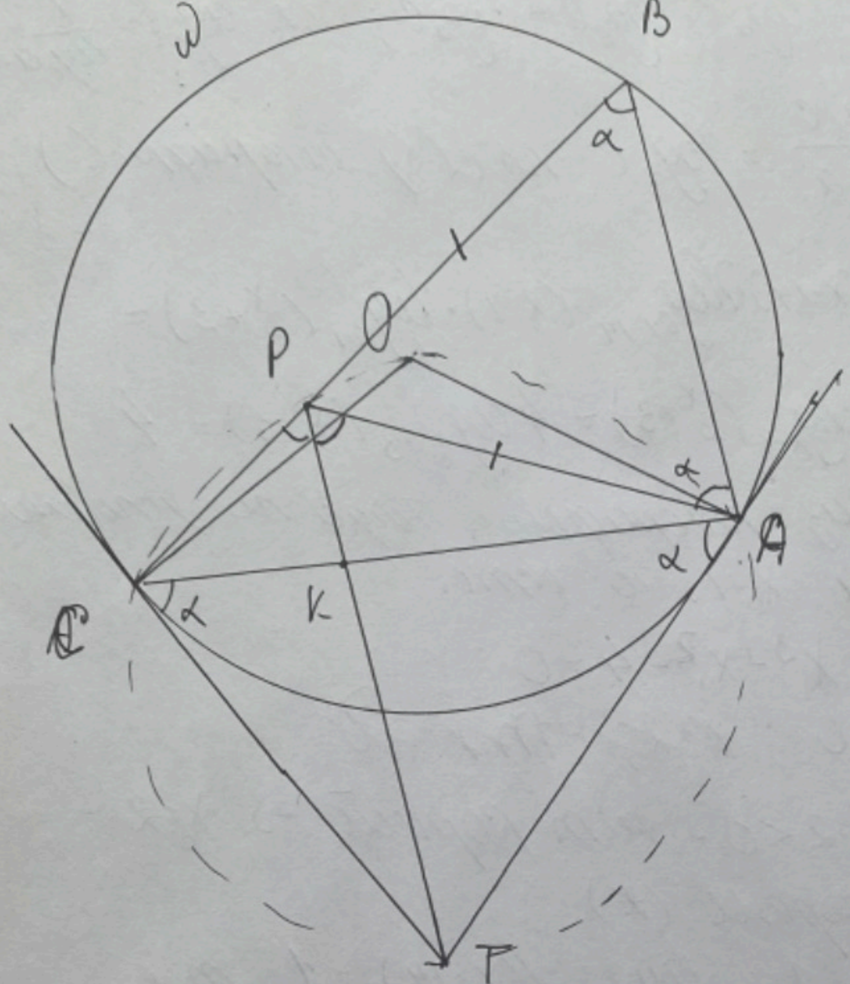
Шифр: **21100819**

ID профиля: **376860**

Вариант 18

Чистовик.

№6.



Дано:

окр. ω, впис. $\triangle ABC$

O – ц. ω; ω_2 – опис.

окр. $\triangle AOC$; $\omega_2 \cap BC = P$

CT; AT – касат. к ω

$PT \cap AC = K$

$S(\triangle APK) = 6$; $S(\triangle CPK) = 5$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

Найти: $S(\triangle ABC)$ – ?

AC – ?

Решение:

1) $OC \perp CT$, $OA \perp AT$ (т.к. OA, OC – рад.) $\Rightarrow$ $OATC$ – впис. чет. по призн. $P = \omega_2 \cap BC \Rightarrow P \in \omega_2$ тогда $\angle CPA = \angle COA$ как впис. в ω_2; но тогда $P \in$ окр. опис. около чет. $OATC$ по призн., т.е. T, C, P, O, A лежат на одной окр. ω_2

2) AT, CT – касат. $\Rightarrow$ $\angle CAT = \angle TCA = \frac{\smile CA}{2} = \angle CBA$ (по св-ву касат.) $= \alpha$ (в ω). Для ω_2: $\angle CPT = \angle CAT = \alpha$; $\angle TCA = \angle TPA = \alpha$ как впис., т.е. PK – бис. $\triangle CPA$.

Шестовик.

№6 продолжение

3) $\angle CPA = 2\alpha = \angle PBA + \angle PAB$ (как внешний) $= \alpha + \angle PAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAB = \alpha$ т. е. $\triangle PAB$ - р/б по призн.

У $\triangle BAP$ и $\triangle CPA$ общ. выс. к $BC \Rightarrow \dfrac{S(\triangle BPA)}{S(\triangle CPA)} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{PA}{PC}$

4) т.к. у $\triangle PCK$ и $\triangle PKA$ общ. выс., $\dfrac{S(\triangle CPK)}{S(\triangle PKA)} = \dfrac{CK}{KA} = \dfrac{5}{6}$

т.к. PK - бис., $\dfrac{PC}{CK} = \dfrac{PA}{KA}$ по св-ву $\Rightarrow \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{KA}{CK} = \dfrac{6}{5} =$

$= \dfrac{S(\triangle BPA)}{S(\triangle CPA)}$ из п. 3 $\Rightarrow S(\triangle BPA) = \dfrac{6}{5} S(\triangle CPA) =$

$\dfrac{6}{5} \cdot (S(\triangle CPK) + S(\triangle PKA)) = \dfrac{6 \cdot 11}{5} = \dfrac{66}{5}$.

5) $\angle ABC = \alpha \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow tg^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{4}{5}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$; $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \dfrac{3}{5}$

6) Пусть $CP = 5x$. Тогда $AP = 6x$ (т.к. $CP : AP = 5:6$)

$S(\triangle CPA) = \dfrac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \cdot \sin 2\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot 5x \cdot 6x \cdot \dfrac{4}{5} = 11 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$

тогда $CP = 5x = 5\sqrt{\dfrac{11}{12}}$; $AP = 6x = 6\sqrt{\dfrac{11}{12}}$.

7) По т. Косинусов в $\triangle CPA$: $CA^2 = CP^2 + PA^2 - 2CP \cdot PA \cdot \cos 2\alpha =$

$= 25 \cdot \dfrac{11}{12} + 36 \cdot \dfrac{11}{12} - 2 \cdot 5\sqrt{\dfrac{11}{12}} \cdot 6\sqrt{\dfrac{11}{12}} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{11}{12}(25 + 36 - 36) = \dfrac{25 \cdot 11}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow CA = 5\sqrt{\dfrac{11}{12}}$

Ответ: $S(\triangle ABC) = \dfrac{66}{5}$; $CA = 5\sqrt{\dfrac{11}{12}}$.

Чистовик.

№2.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

~~По св-ву~~ <u>Лемма</u> ⌈ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$; т.к. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,

$\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c$ (по св-ву логарифмов.) ⌋

тогда $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)\cdot \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) =$

$= 4\cdot \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)\cdot \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = 4\log_{\frac{x}{3}+3}(\frac{x}{3}+3) = 4.$

Пусть x_0 - один из логарифмов. тогда по условию другие два: x_0 и x_0-1. то есть:

$x_0^2\cdot(x_0-1) = 4$; $x_0^3 - x_0^2 - 4 = 0$

(*) $(x_0-2)(x_0^2+x_0+2) = 0$; ~~$x_0=2$, ...~~

$x_0^2+x_0+2=0$: $D = 1-4\cdot 2 < 0$ - нет корней $\Rightarrow x_0=2$ - единственный корень (*).

1) $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2$; $\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1$ т.е.

$\frac{x}{3}+3 = 6x-14 \quad |\cdot 3$; $x+9 = 18x-42$; $x = \frac{51}{17} = 3$

$\log_{\sqrt{1+3}}(6\cdot 3-14) = \log_2 4 = 2$; $\log_{6\cdot 3-14}(3-1)^2 = \log_4 4 = 1$

$\log_{3-1}(\frac{3}{3}+3) = \log_2 4 = 2 \Rightarrow x=3$ подходит.

2) $2\log_{6x-14}(x-1) = 2$; $\log_{6x-14}(x-1) = 1$ т.е. $6x-14 = x-1$

$5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$; $\log_{\frac{13\cdot 6}{5}-14}(\frac{13}{5}-1)^2 = \log_{\frac{8}{5}}(\frac{8}{5})^2 = 2$

$\log_{\sqrt{\frac{13}{5\cdot 3}+3}}(6\cdot\frac{13}{5}-14) = \log_{\sqrt{\frac{58}{15}}}(\frac{8}{5}) \neq 1; 2$ или $3 \Rightarrow$ не подх.

Чистовик.

№2 продолжение.

3) $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$ т.е. $\frac{x}{3}+3=(x-1)^2$:

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3 \ |\cdot 3$; $3x^2-6x+3=x+9$

$3x^2-7x-6=0$; $x=\frac{7\pm\sqrt{49+4\cdot 18}}{6}=\frac{7\pm 11}{6}=3;\ -\frac{2}{3}$

3 подх. из п. 1); $-\frac{2}{3}$ не подх т.к. $-1-\frac{2}{3}<0$ – не входит в область опр-я.

Ответ: $x=3$.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15=3\cdot 5 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

т.к. в $НОК(a;b;c)$ есть только 3 и 5 в различных степенях

~~тогда $a\cdot b\cdot c = НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c)=3^{16}\cdot 5^{19}$~~,

и ~~a, b, c~~ числа можно представить в виде

$a=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$; $b=3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$; $c=3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$ т.к. 3 и 5 – единств. делители a, b, c. (из опр-я НОК-а)

$a=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$
$b=3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$
$c=3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$

$\Rightarrow$ тогда $НОД(a;b;c)=3^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}$, а $НОК(a;b;c)=3^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}$.

тогда одно из чисел $\alpha_1;\beta_1;\gamma_1$ равно 1 и одно 15, а третье принимает одно из зн-ий от 1 до 15 включительно. Если одно из чисел 1 или 15 всего вариантов: (1;1;15); (1;15;1); (15;1;1); (1;15;15); (15;1;15); (15;15;1) – шесть. Теперь никакие два числа не равны друг другу. Пусть $\alpha_1 = 1$; $\beta_1 = 15$; γ_1 - принимает 13 зн-ий, т.е. всего 13 возможных вариантов. т.к. α_1; β_1; γ_1 можно переставлять и всего таких перестановок 6, суммарно для 3 получится $6 \cdot 13 + 6 =$ $= 84$ варианта (с учетом равных чисел.) Точно такие же рассуждение можно провести для 5 и чисел α_2; β_2; γ_2. В итоге для 5 вариантов получится $6 \cdot 16 + 6 = 102$. так как каждой тройке $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ можно сопоставить любую тройку $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$, варианты между собой перемножаются: $84 \cdot 102 = 8568$ троек $(a; b; c)$ подходят под реш-е системы.

Ответ: 8568.

№4 продолжение

Чистовик!

Черновик

$2R = \frac{AC}{\sin\angle}$ R - ?

$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{5} \cdot 6 \cdot \frac{4}{\cancel{5}} x^2 = 12x^2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4 & x-2 \\ \hline -\ x^3 - 2x^2 & x^2 + x + 2 \\ \hline x^2 - 4 & \\ -\ x^2 - 2x & \\ \hline 2x - 4 & \end{array}$$

$D = -1 \pm \sqrt{1}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14)$; $\log_{6x-14} (x-1)^2$; $\log_{x-1} (\frac{x}{3}+3)$

$2\log_{\frac{x}{3}+3} (6x-14) \cdot 2\log_{6x-14} (x-1) \cdot \log_{x-1} (\frac{x}{3}+3) = 4$

$x^2 \cdot (x-1) = 4$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$18 \cdot 4 = 72$, $72 + 49 = 121$

$8 - 4 - 4$

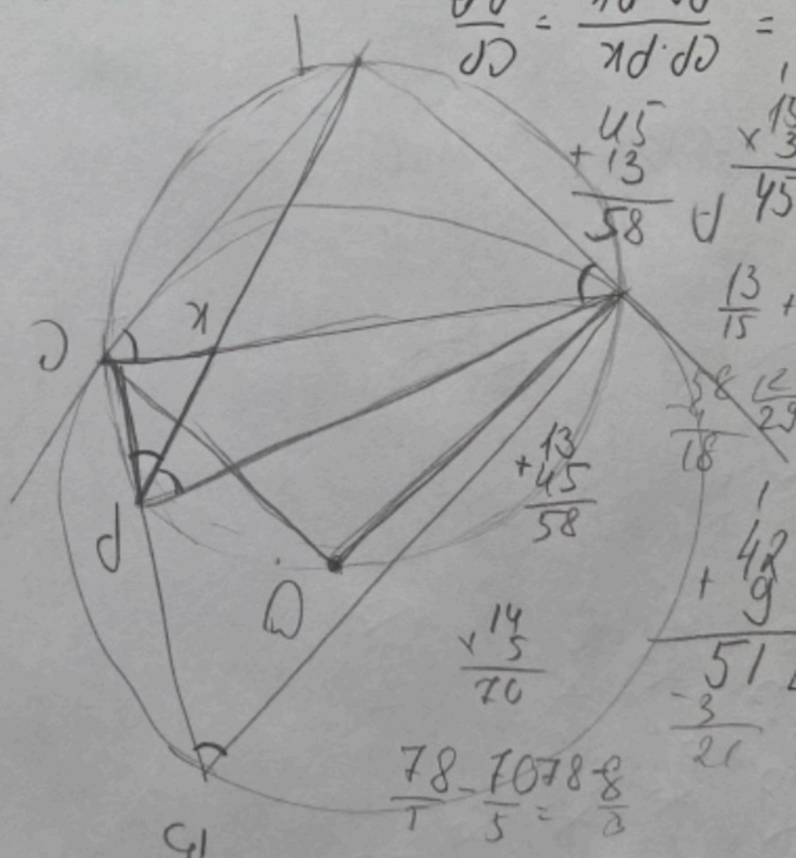
$11 + 7 = 18$

$11 - 7 = 4$

$\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\cancel{\log_c b}}{\log_c a} \cdot \frac{\log_c c}{\cancel{\log_c b}} = \log_a c$

$\frac{\log_c c}{\log_c a} = \log_a c$ осн-е с;

$\log_a b$ $\frac{\log_c b}{\log_c a}$



$\frac{CP}{PA} = \frac{CP \cdot PK}{PA \cdot PK} =$

$45 + 13 = 58$

$\frac{13}{15} + 3$

$\frac{15}{3} \cdot 3 = 45$

$\frac{58}{18}$ $\frac{12}{29}$

$13 + 45 = 58$

$42 + 9 = 51$, $51 : 3 = 17$

$\frac{14}{5} \cdot 5 = 70$

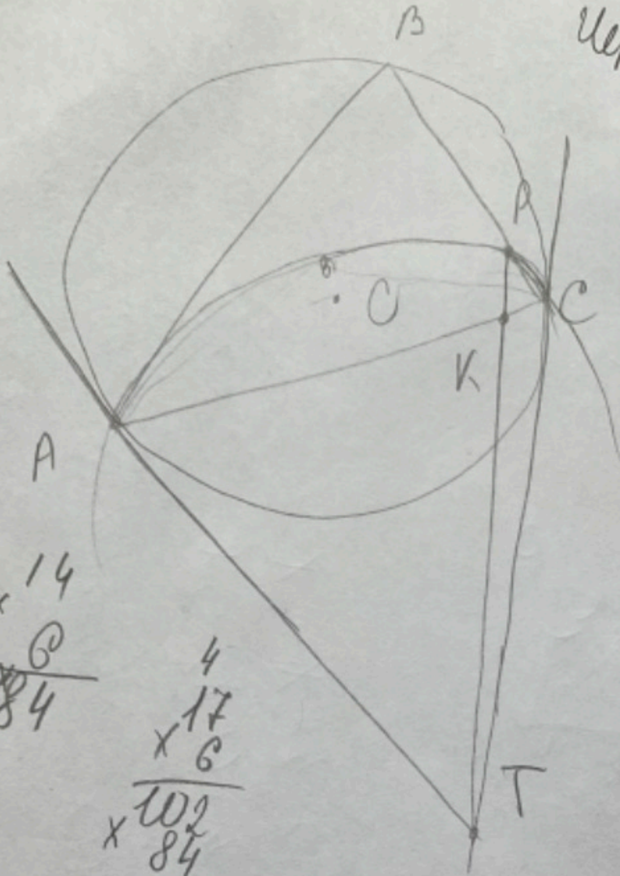
$\frac{78}{1} - \frac{70}{5} = \frac{78 \cdot 8}{8}$

$\frac{S(\triangle BPA)}{S(\triangle CPA)} = \frac{BP}{PC} =$

$S\triangle$ $\frac{S(\triangle BPA)}{S(\triangle KPA)} = \frac{PA \cdot BA}{AP \cdot PK} = \frac{BA}{PK} = \frac{6}{x}$ $2OA = \frac{AC}{\sin\angle B}$

21100819 (U376860 M1296640)

Черновик



НОД(a;b;c) = 15 = 3·5 (a;b;c)

НОК(a;b;c) = $3^{15}\cdot 5^{18}$ (a;c;b)

$a = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot x_3^{\alpha_3}\ldots$ (b;c;a)

$b = x_1^{\beta_1}\cdot x_2^{\beta_2}\cdot x_3^{\beta_3}$ (b;a;c)

$c = x_1^{\gamma_1}\cdot x_2^{\gamma_2}\ldots$ (c;a;b)

$a\cdot b\cdot c$ = НОД (c;b;a)

$$\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 6 \\ \hline 102 \\ \times\ 84 \\ \hline 408 \\ +\ 816 \\ \hline 8568 \end{array}$$

S(ΔAPK) = 6; S(ΔCPK) = 5

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

AK·KC = PK·KT

S(ΔABC) = AP·PC·sin∠

(1;15;x) — 13

(1;x;15) — 13