Часть 1

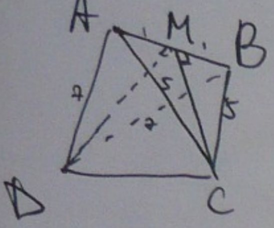
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100701**

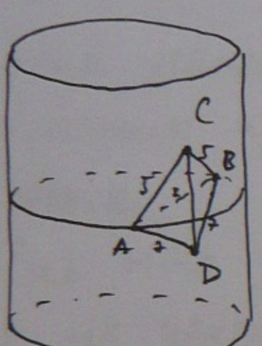
ID профиля: **184506**

Вариант 18

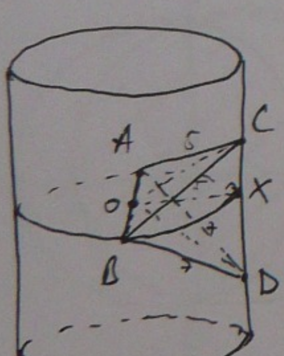
№2.



Проведем медианы CM и DM в $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ соответственно. Тогда $CM \perp AB$, $DM \perp AB$ (из равнобедренности). Значит $AB \perp (DMC)$, т.к. $AB \perp CM$ и $AB \perp DM$. $\Rightarrow$ $AB \perp CD$. Значит, если мы впишем тетраэдр в цилиндр, то ~~AB~~ CD будет параллельно оси, а AB, значит, перпендикулярно оси. Значит AB будет лежать в горизонтальном сечении цилиндра, т.е. будет хордой этого сечения-окружности.



Ясно, что хорда не может быть длиннее диаметра, и значит ~~максимальный~~ минимальный радиус цилиндра будет равен $\frac{2}{2} = 1$.
При этом C и D должны быть равноудалены от A и B. Нарисуем, как это могло быть:



Для удобства нарисуем так:

$AO = 1 \Rightarrow CO = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$

$\left.\begin{array}{l} OX = 1 \\ OC = 2\sqrt{6} \end{array}\right| \Rightarrow CX = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{23}$

~~OB~~ $AO = 1 \Rightarrow OD = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$

$\left.\begin{array}{l} OX = 1 \\ OD = 4\sqrt{3} \end{array}\right| \Rightarrow DX = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{47}$

$DC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

Здесь мы рассмотрели случай, когда C и D лежат по разные стороны от плоскости сечения. Рассмотрим случай, когда точки по одну сторону от плоскости сечения.

Продолжение на след. стр.

№1

Чистовик

Пусть $a_1 = a$, число, равное разности между двумя соседними членами прогрессии равно k. Тогда $S = 7a + (k + \ldots + 6k) = 7a + 21k$

$a_7 = a + 6k$

$a_{12} = a + 11k$

$a_9 = a + 8k$

$a_{10} = a + 9k$

$$(a+6k)(a+11k) > 7a + 21k + 20 \Rightarrow a^2 + 17ka + 66k^2 > 7a + 21k + 20$$

$$(a+8k)(a+9k) < 7a + 21k + 44 \Rightarrow a^2 + 17ka + 72k^2 < 7a + 21k + 44 \quad +$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{17ka} + 66k^2 + \cancel{7a} + \cancel{21k} + 44 > \cancel{a^2} + \cancel{17ka} + 72k^2 + \cancel{7a} + \cancel{21k} + 20$$

$$24 > 6k^2$$

$$4 > k^2$$

Т.к. $k > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$, то $k = 1$.

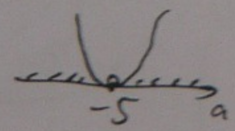
Еще должны выполняться неравенства:

$$a^2 + 17a + 66 > 7a + 41 \quad (1)$$

$$a^2 + 17a + 72 < 7a + 65 \quad (2)$$

(1): $a^2 + 10a + 25 > 0$

$(a+5)^2 > 0$

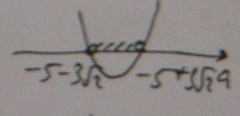


$a \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$

(2) $a^2 + 10a + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

$a_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$



$a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty) \\ a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2}) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Посмотрим, какие целые числа кроме -5 входят в $(-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$(3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow 4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow -4 > -3\sqrt{2} > -5 \Rightarrow -9 > -5 - 3\sqrt{2} > -10;$

$-1 < -5 + 3\sqrt{2} < 0$

Это значит, что a может равняться $-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$.

1

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

чернова

$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_9 a_{10} < S + 44$

$a_1 \quad \dots \quad \underbrace{a_7 \; a_8 \; a_9 \; a_{10} \; a_{11}}\; a_{12}$

$a_1 = a$

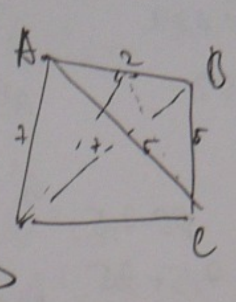
$a_7 = a + 6k$

$a_{12} = a + 11k$

$S = 7a + (k + \dots + 6k) = 7a + 21k$

$a_9 = a + 8k$

$a_{10} = a + 9k$

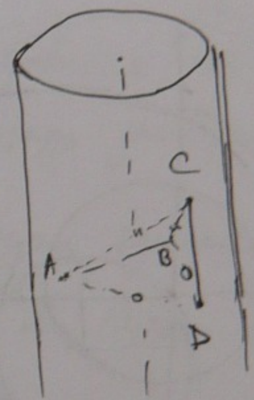


$(a+6k)(a+11k) > 7a + 21k + 20$

$(a+8k)(a+9k) < 7a + 21k + 44$

$a^2 + 17ka + 66k^2 > 7a + 21k + 20$

$a^2 + 17ka + 72k^2 < 7a + 21k + 44$



$66k^2 + 44 > 72k^2 + 20$

$24 > 6k^2$

$4 > k^2 \Rightarrow k = 1$

$72 - 65 = 7$

$a^2 + 17a + 66 > 7a + 41$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

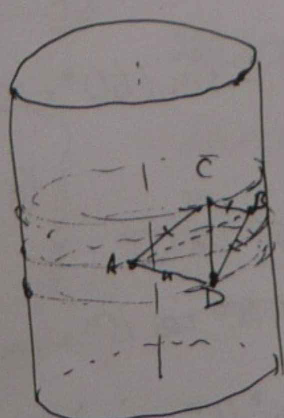
$a^2 + 17a + 72 < 7a + 65$

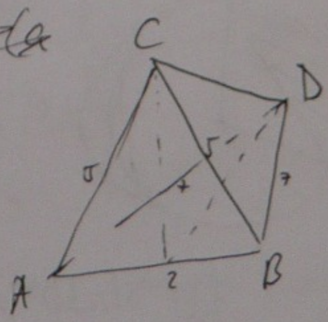
$\cancel{(a+2)(a}$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

$(a+5)^2 > 0$

$a \neq -5$



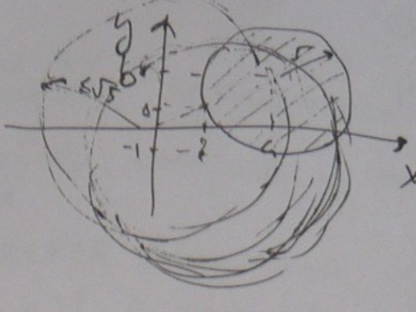


(2)

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

$-9\ -8\ -7\ -6\ -5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0 = -4\pi$



$0 \le 2$

$a^2+b^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$\cos 30^\circ = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1$

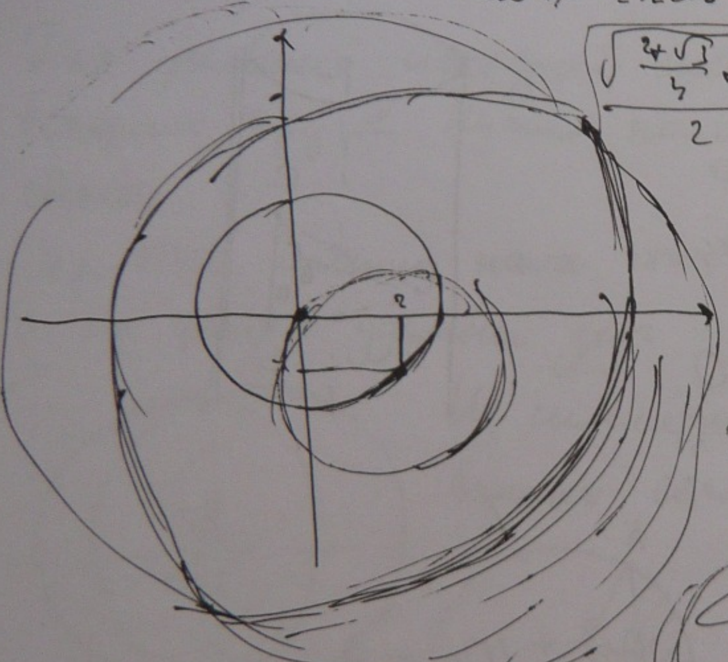
$\cos 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt3}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt3}{4}}$

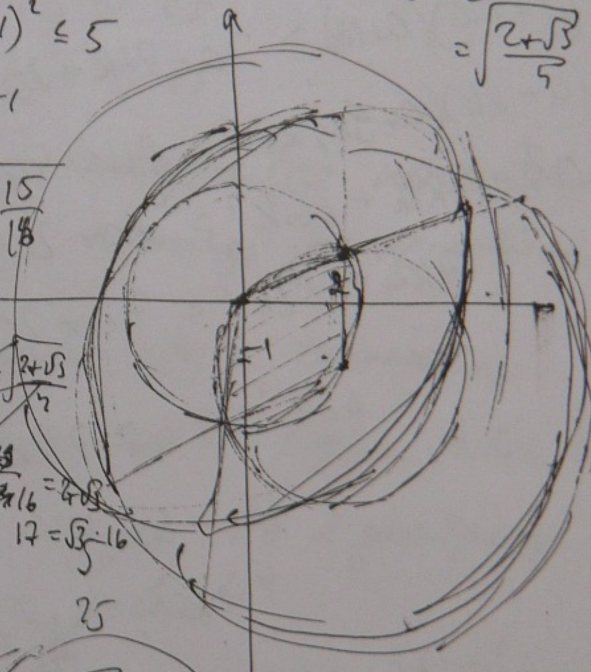
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ $90-7,5$

$82,5 = 7,5+75$

$\cos 15^\circ = 2\cos^2 7,5^\circ - 1$

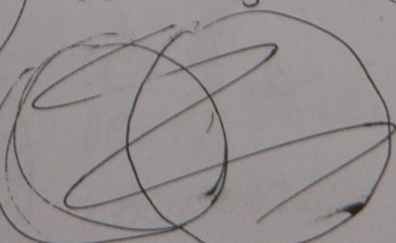
$\sqrt{\dfrac{\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{4}+1}{2}} = \sqrt{\dfrac{15}{16}}$

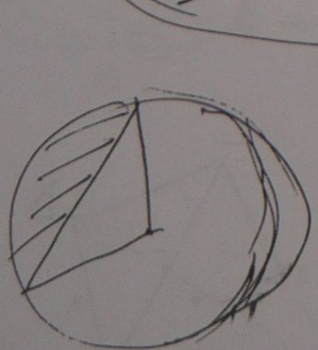


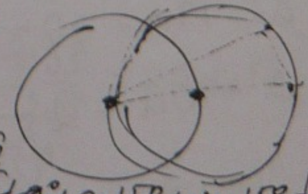


$2\sqrt5$

$20 \quad 25$







$\sin 75^\circ = \sin(60^\circ+15^\circ) = \frac{\sqrt3}{2}\cos 15^\circ + \sin 15^\circ \frac{1}{2} =$

$=$

$2\sqrt2 \quad 7 \quad \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

$\frac{1}{4} = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 15^\circ \sqrt{1-\sin^2 15^\circ}$

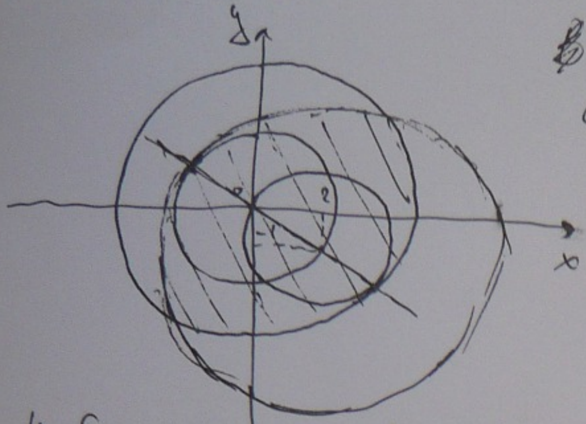
$\sin(45^\circ+30^\circ) =$

$\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\right) = \frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$

$\frac{1}{16} = \sin^2 15^\circ - \sin^4 15^\circ$

Чистовик

13 продолжение



На рисунке изображены все по 2 окружности, каждый из которых круга является решением систем

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\end{cases}$$

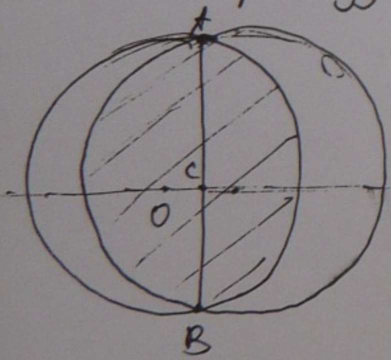
и

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5.\end{cases}$$

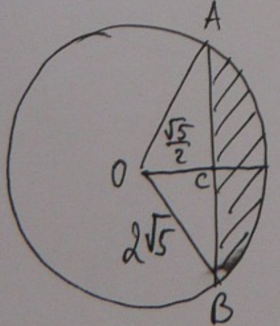
У больших кругов радиусы $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

Для решения исходной системы понадобится пересечение больших кругов. Нужно посчитать площадь заштрихованной области.

Для этого можно понять, что большие круги одинаковы, а их центры удалены друг от друга на $\sqrt{5}$. Радиусы равны $2\sqrt{5}$.



Из симметрии следует, что 2 заштрихованных сегмента равны.



$$\left.\begin{aligned}OC&=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ OB&=2\sqrt{5}\end{aligned}\right| \Rightarrow CB=\sqrt{20-\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$\angle BOC=\arcsin\frac{\frac{5}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cancel{360}\ 2\pi \sim \pi(2\sqrt{5})^2$$

$$2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\sim\frac{2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\pi(2\sqrt{5})^2}{2\pi}=$$

$$=20\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$$ – площадь сектора

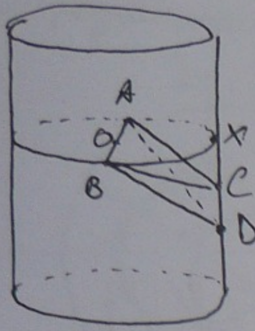
Посчитаем площадь ΔAOB: $S_{\Delta AOB}=OC\cdot CB=\frac{5\sqrt{15}}{4}$

$$S=20\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{5\sqrt{15}}{4}$$

$$2S=40\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{5\sqrt{15}}{2}.$$

Ответ: $40\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{5\sqrt{15}}{2}$.

Чистовик



Здесь можно проделать все те же рассчеты и получить $CX = \sqrt{23}$, $DX = \sqrt{47}$. Только в этом случае DC будет находиться как разность: $DC = DX - CX = \sqrt{47} - \sqrt{23}$. Других случаев нет.

Ответ: $DC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$ или $DC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$.

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 & (1) \\ a^2+b^2 \le 4a-2b & (2) \\ a^2+b^2 \le 5 & (3) \end{cases}$$

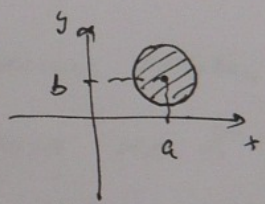
(Я специально пишу вместо min(..) обычные нер-ва, т.к. $\begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$)

(2) $a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2a + 1 \le 5$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5$

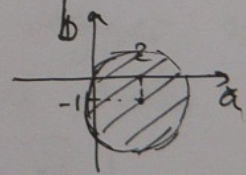
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 & (1) \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 & (2) \\ a^2+b^2 \le 5 & (3) \end{cases}$$

(1):



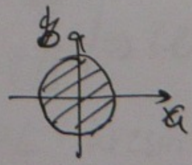
$r = \sqrt{5}$

(2):



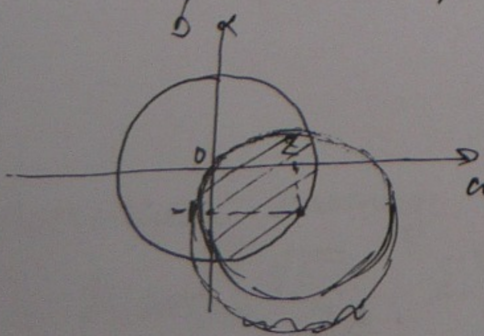
$r = \sqrt{5}$

(3):



$r = \sqrt{5}$

Для того, чтобы a и b существовали, нужно, чтобы одновременно выполнялись нер-ва (2) и (3). Для этого нужно совместить картинки (2) и (3):



Заштрихованная область показывает, в каких могут быть a и b. Координаты a и b будут центрами кругов, которые появляются в уравнении (1).

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100701**

ID профиля: **184506**

Вариант 18

7) $3, 3, 3^{15}, 5, 5^{18}, 5^{18}$

8) $3, 3^{15}, 3^{15}, 5, 5^{18}, 5^{18}$

$$\begin{array}{r} {}^{1\,3\,6} \\ 7488 \\ 288 \\ 234 \\ +\ 288 \\ 234 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 8568 \end{array}$$

Ответ: 8568.

Чистовик

$$\frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 2} = 9$$

$$\frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 2} = 9$$

Решение №6:

а) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ▫$OATC$ – вписанный и вписан он в окружность, описанную около $\triangle OAC$.

$\angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha$

$\Rightarrow \angle PAC = 2\alpha \Rightarrow \angle PBA + \angle PAB = 2\alpha \Rightarrow \angle PAB = \alpha$

Значит $\angle PBA = \angle PAB = \alpha \Rightarrow PB = PA$

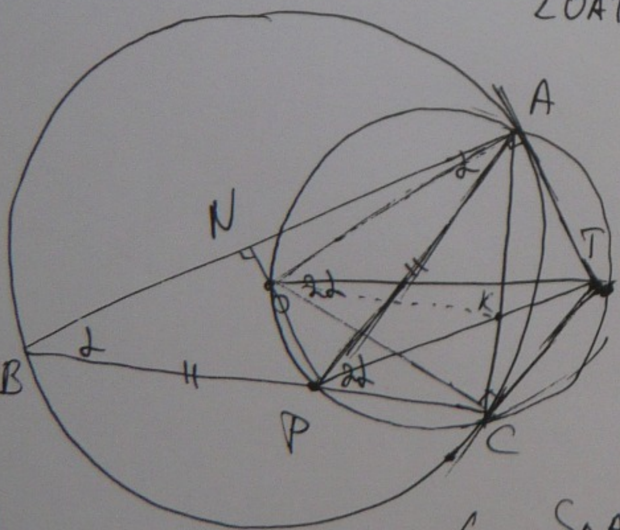
$OA = OC$

$OT = OT$

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle OAT = \triangle OCT \Rightarrow \angle AOT =$

$= \angle TOC = \angle APT = \angle TPC = \alpha.$

№6.



PK в $\triangle APC$ – биссектриса $\Rightarrow$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC}.$$

$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{AK}{KC}$$ (т.к. высота одинакова)

$$\frac{6}{5} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle APC}}$$ (т.к. высота одинакова)

$$S_{\triangle APC} = 6+5 = 11 \Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{6}{5}\cdot 11 = \frac{66}{5} = 13,2$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} = 13,2 + 11 = 24,2.$$

б) $PN \perp AB$. $BN = NA$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} = \frac{PN}{NA} \Rightarrow NA = 2PN$

$NA \cdot PN = S_{\triangle ABP} = 13,2$ $\Big| \Rightarrow 2PN^2 = 13,6 \Rightarrow PN = \sqrt{6,6} \Rightarrow NA = 2\sqrt{6,6}$

$\Downarrow$

$AB = 4\sqrt{6,6}$

4

$PA = \sqrt{AN^2 + PN^2} = \sqrt{5\cdot 6,6}$

№6 продолжение
по т. косинусов:

Чистовик

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA\cdot PC\cdot\cos 2\alpha$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5} \Rightarrow PC = \frac{5}{6}PA \Rightarrow PC^2 = \frac{25}{36}PA^2 \Rightarrow PC^2 = \frac{25}{36}\cdot 5\cdot 6{,}6$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \quad | : \cos^2\alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$AC^2 = 5\cdot 6{,}6 + \frac{25}{36}\cdot 5\cdot 6{,}6 - \cancel{2}\cdot 5\cdot 6{,}6\cdot\frac{5}{\cancel{6}}\cdot\frac{3}{\cancel{5}} = \frac{25}{36}\cdot 5\cdot 6{,}6$$

$$AC = \frac{5}{6}\sqrt{5\cdot 6{,}6}$$

Ответ: а) 24,2 ; б) $AC = \frac{5}{6}\sqrt{5\cdot 6{,}6}$

Черновик

$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=15 = 3\cdot 5 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$

$a = 3^{a}\cdot 5^{d}$

$b = 3^{b}\cdot 5^{e}$

$c = 3^{c}\cdot 5^{f}$

$\max(a,b,c)=15$

$\max(d,e,f)=18$

$3^{15}\cdot 5^{1..18}$

15 вариантов

18 вариантов

$a, 2b, 2c$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = -//- = a$

$\log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 2\log_{(6x-14)}(x-1) = b$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2\log_{(x-1)}\sqrt{\frac{x}{3}+3} = c$

$2b=2c=k$

$\cancel{\frac{k^2}{4}(k-1)=k}$

$\frac{1}{ab}=c$

$abc=1$

$x^2(1-x)=1$

$x^2-x^3-1=0$

$x^3-x^2+1=0$

$2b=2c \Rightarrow b=c=a=1 \quad \frac{1}{a} = \log_{(6x-14)}\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

$6x-14 = x-1 =$

$= \sqrt{\frac{x}{3}+3}$

$a=2b=2c+1$

$b=\frac{a}{2}$

$c=\frac{a-1}{2}$

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}$

$a\,\frac{a}{2}\,\frac{a-1}{2}=1$

$a^3-a^2=4$

$\frac{8}{5} = \sqrt{\frac{13+45}{15}}$

$\frac{64}{25} = \frac{58}{15}$

$\cancel{\frac{64}{5} = \frac{58}{5}}$

$\cancel{a^{x+y}=b^{y}}$

$\cancel{a^{y^x}=c^x}$

$\frac{x}{3} \to b$

$a=2$

$b=1$

$c=\frac{1}{2}$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$2b=a$

$2c=a-1=2b-1$

$a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a-1}{2}=1$

$a^3-a^2-4=0$

21100701 (U184506 M1301262)

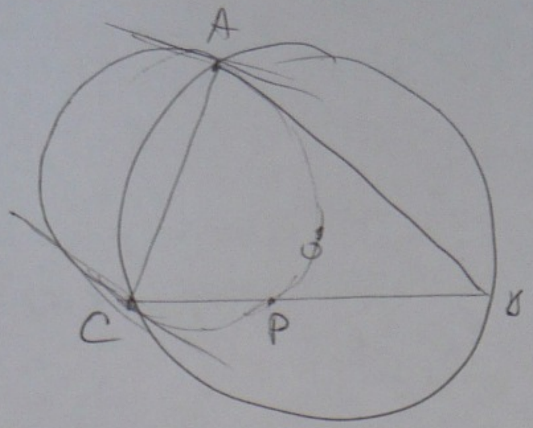
черновик

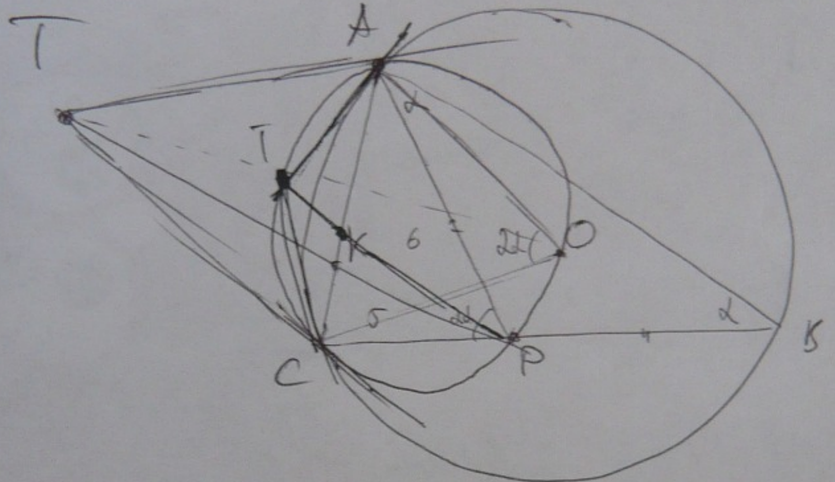
$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=15 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

$a = 3^m \cdot 5^x$

$b = 3^n \cdot 5^y$

$c = 3^k \cdot 5^z$





$3\cdot 5^{18}$

$3,\ 3^{15},\ 5,\ 5^{18}$

$3 \quad 5$

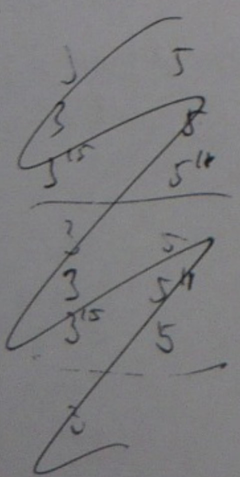
$3^x \quad 5^y$

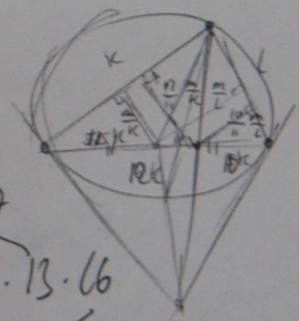
$3^{15} \quad 5^{18}$

x от 2 до 14

y от 2 до 17

$3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 13\cdot 16$





$\underbrace{9\cdot 4\cdot 13}\cdot 16$ — 117, 64

$\dfrac{\dfrac{12}{11}\dfrac{m}{k}}{\dfrac{10}{11}\dfrac{m}{l}} = \dfrac{12}{10}\dfrac{l}{k}$

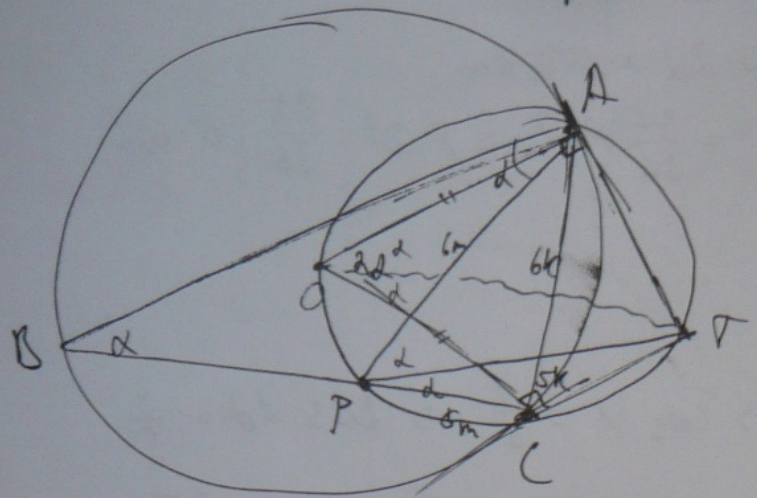
$13\times 9 = 117$

18×13: 54, 18, 234

16×18: 128, 16, 288

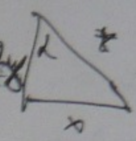
117×64: 468, 702, 7488

Черновик



$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$



$\frac{x}{y} = 0{,}5$

$x = \frac{1}{2}y$

$\frac{13{,}2}{2} = 6{,}6$

$x \cdot y = 13{,}2$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x^2 = \sqrt{6{,}6}$

$y = 2\sqrt{6{,}6}$

$x = \sqrt{6{,}6}$

$y = 2\sqrt{6{,}6}$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5\cdot 6{,}6} = AP = BP$

$PC = \frac{5}{6}\sqrt{5\cdot 6{,}6}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$AP^2 + CP^2 - 2AP\cdot CP\cdot\cos\alpha = AC^2$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$5\cdot 6{,}6 + \frac{5^2}{6^2}\,5\cdot 6{,}6 - 2\cdot\frac{5}{6}\cdot 5\cdot 6{,}6\cdot\cos\alpha$

$\frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$5\cdot 6{,}6\left(1 + \frac{5^2}{6^2} - 2\cdot\frac{5}{6}\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = AC^2$

$\frac{61\sqrt{5}}{36\sqrt{5}} - \frac{20\cdot 12}{3\sqrt{5}\cdot 12} = \frac{61\sqrt{5}-12}{36\sqrt{5}} \cdot \frac{5\cdot 66}{10} = \frac{11(61\sqrt{5}-12)}{12\sqrt{5}}$

$= \frac{11\cdot 61}{12} - \frac{11}{\sqrt{5}}$

3

Чистовик

№2.5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=a$

$\log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 2\log_{(6x-14)}(x-1) = 2b$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2\log_{(x-1)}\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 2c$

$\frac{1}{a} = \log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

$\frac{1}{ab} = \frac{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x}{3}+3}}{\log_{6x-14}(x-1)} = \log_{(x-1)}\sqrt{\frac{x}{3}+3} = c \Rightarrow abc=1.$

1) Пусть $2b=2c=a+1$

Тогда, если $b=c>1$, то $2b=2c>2 \Rightarrow a+1>2 \Rightarrow a>1 \Rightarrow$ $a,b,c>1 \Rightarrow abc>1$. Противоречие.

Если же $b=c<1$, то $2b=2c<2 \Rightarrow a+1<2 \Rightarrow a<1 \Rightarrow$ $a,b,c<1 \Rightarrow abc<1$. Противоречие.

Значит $a=b=c=1$.

Тогда $\sqrt{\frac{x}{3}+3} = (6x-14) = x-1$

$6x-14=x-1$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}$

$\sqrt{\frac{13}{15}+3} = \frac{13}{5}-1 = \frac{8}{5}$ (проверяем)

$\frac{13}{15}+3 = \frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$

$\frac{28}{15} = \frac{14}{25}$. $\frac{28}{15}>1$, $\frac{14}{25}<1 \Rightarrow$ неверно. Противоречие.

2) Пусть $2b=a=2c+1 \Rightarrow b=\frac{a}{2}$, $c=\frac{a-1}{2}$

$a\frac{a}{2}\frac{a-1}{2}=1$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

Чистовик

№5 продолжение

$a^2+a+2=0$

$D=1-8<0 \Rightarrow$ корней нет.

Значит единственный корень: $a=2$.

$a=2,\ b=1,\ c=0{,}5.$

$abc=2\cdot1\cdot0{,}5=1.$

$\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^2=6x-14=x-1$

~~6x-14=x-1~~ $6x-14=x-1$

~~x-1=x/3~~

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}=2{,}6$

$\frac{13}{15}+3=\frac{13}{5}-1 \quad |\cdot15$ Проверка:

$13+45=39-15$

$58=24$ Неверно. Противоречие.

3) Пусть $2c=a=2b+1 \Rightarrow b=\frac{a-1}{2},\ c=\frac{a}{2}$

$a\frac{a}{2}\ \frac{a-1}{2}=1$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a=2,\ c=1,\ b=0{,}5$

$abc=2\cdot0{,}5\cdot1=1.$

$\frac{x}{3}+3=6x-14=(x-1)^2$

$\frac{x}{3}+3=6x-14 \quad |\cdot3$

$x+9=18x-42$

$17x=51$

$x=3$

Проверка:

$4=\frac{3}{3}+3=(3-1)^2=4$

Верно!

Ответ: при $x=3$

2

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=15=3\cdot5 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$$

Это значит, что в каждое число a, b, c должны входить числа 3 и 5 в разложение на простые множители, при этом хотя бы 1 число должно иметь 3 ровно в первой степени и хотя бы 1 число 5 ровно в первой степени. =>

Второе условие говорит о том, что хотя бы 1 число должно иметь ~~ровно~~ 3 ровно в 15 степени, хотя бы 1 ~~5~~ число 5 ровно в 18 степени. Остальные степени могут быть от ~~2 до 14~~ 1 до 15 (3) и от 1 до 18 (5). 2

Тогда мы должны распределить $3, 3^x, 3^{15}, 5, 5^y, 5^{18}$ по числам a, b и c. Для простоты x от 2 до 14, y от 2 до 17. Равенство x и y 1, 15 и 18 мы рассмотрим позже

Кол-во вариантов выбрать a, b, c составит:

$3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot13\cdot16=7488.$

Еще есть случаи: 1

1) $3, 3, 3^{15}, 5, 5^y, 5^{18}$

Здесь кол-во вариантов будет: $\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot16}{2}=288$ (делим на 2, т.к. каждый набор посчитан 2 раза) 4)

2) $3, 3^x, 3^{15}, 5, 5, 5^{18}$. $\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot13}{2}=234$

3) $3, 3^{15}, 3^{15}, 5, 5^y, 5^{18}$ $\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot16}{2}=288$

4) $3, 3^x, 3^{15}, 5, 5^{18}, 5^{18}$ $\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot13}{2}=234$

5) $3, 3, 3^{15}, 5, 5, 5^{18}$ $\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{2\cdot2}=9$

3

6) $3, 3^{15}, 3^{15}, 5, 5, 5^{18}$ $\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{2\cdot2}=9$