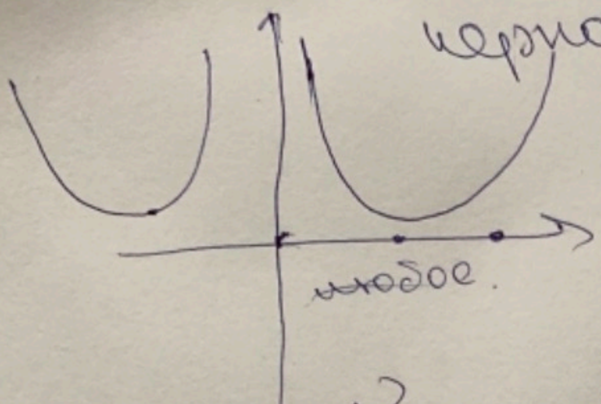
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100658**

ID профиля: **873168**

Вариант 18



черновик.

$17d - 7 > 0$

$17d > 7$

$d > \frac{7}{17}$

$D < 0$

$\frac{70+49}{119}$

$D = 289d^2 - 238d + 49 - 264 + 80 =$

$= 25d^2 - 238d + 129 < 0$

$66 \cdot 4$

$240+24$

264

$25 \cdot 4 =$

$=$

$= 100$

$x_в = \frac{-b}{2a}$

$a_1^2 + a_1(17(0;2)) +$

$a_1^2 + 10a_1 + 46$

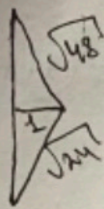
при $D = 1$.

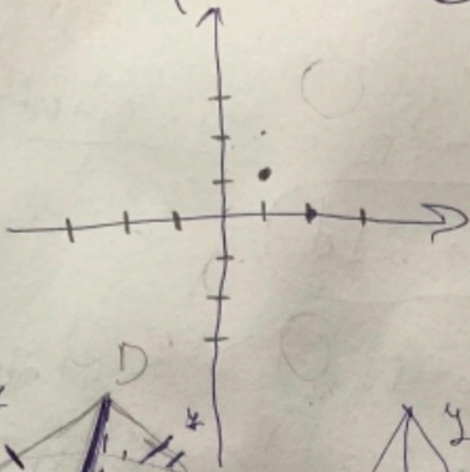
$D<0 \Rightarrow a \in (-\infty; 0)$

$D = 10$

№3.

черновик (2)





$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

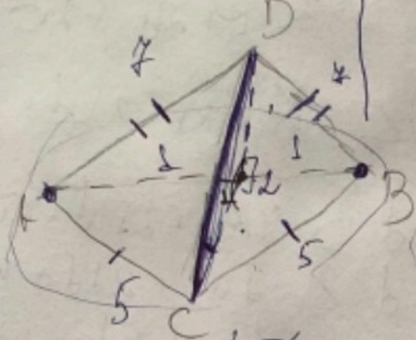
$a^2+b^2 \le \min(4a-2b\cancel{+}1)$

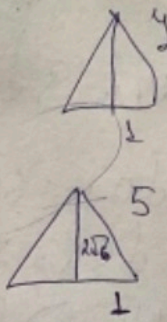
$a^2+b^2 \le \min(4a-2b-1)$

$a^2+b^2 \le 4a-2b-1$

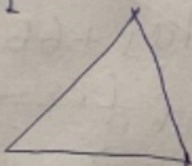
$(a-2)^2+(b+1)^2 \le \cancel{5}\,4$

$+4 \quad +1 \quad -5$





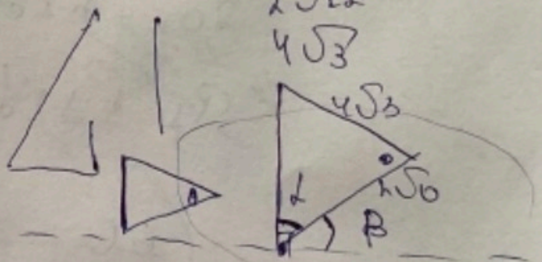
$tg\,\alpha = \frac{\cancel{4}^{2}\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$



24 $\quad 2\sqrt{6} \quad$ 12

$2\sqrt{12}$

$4\sqrt{3}$



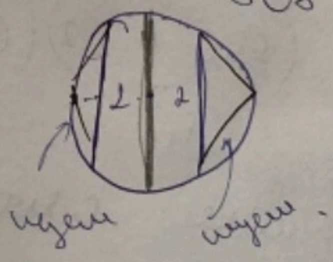
$\beta = 90 - arctg\,\sqrt{2}$

$\sin\alpha = \frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{6}_{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$24+48=72.$

$3\sqrt{8}=6\sqrt{2}.$

$a_1^2 - 7a_1 + \cancel{8} - 20 \ge 0.$



$D = 49 + 80 = 129.$

$\vee$

$d \in (0;2).$

$a \ne 0.$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 \ge 0$

неуд.

$72-65.$

$a \ge 5$

Черновик (1)

(5).

$a_1 = a_1 \quad a_2 = a_1 + d \ldots$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$$

$$S = 7a_1 + 21d$$

$$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + \cancel{2d} + 20$$

$$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < \cancel{8}\, 7a_1 + 21d + 44$$

$$a_1^2 + 11da_1 + 6da_1 + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$$

$$a_1^2 + 9da_1 + 8da_1 + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$$

$$7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 9da_1 + 8da_1 + 72d^2$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{11da_1} + \cancel{6da_1} + 66d^2 > \cancel{a_1^2} + \cancel{9da_1} + \cancel{8da_1} + 72d^2$$

$$\cancel{66d^2 > 72d^2}$$

$$\cancel{(66 - 72)d^2 > 0}$$

$$24 - 6d^2 > 0 \Rightarrow 4 - d^2 > 0$$

$d = \pm 2$; -2, 2

$$(a_1 + 12)(a_1 + 22) > 7a_1 + 42 + 20$$

a_1^2

Дале смотреть, чтоб был $D \geq 0$ в 1-ом случае и во 2-ом.

$$\begin{cases} y = a_1^2 + a_1(17d - 7) + 66d^2 - 20 \geq 0 \\ y = a_1^2 + a_1(17d - 7) + 72d^2 + 44 < 0 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2 - 7a_1 +}$ $\quad x_в = \frac{7}{2} = 3{,}5$

$$a_1^2 \cancel{7} - 7a_1 - 20 \geq 0.$$

$a \in (0; +\infty)$

Задача 3 Черновик. 5

(1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2\cdot b, 5) \end{cases}$

(1) => очевидно, что (1) - все точки, ~~принадлеж~~ лежащие на или внутри окружности с центром $(a; b)$ и радиусом $\sqrt{5}$

(2) - преобразуем:

$$\cancel{a^2+b^2 \le \min(4a-2b-1)} \Rightarrow$$

$$\cancel{a^2+b^2 \le -1+\min(4a-2b)}$$

$$\cancel{a^2+b^2 \le -1+2\min(2a-2b)}$$

$$a^2+b^2 \le 5 \text{ или } a^2+b^2 \le 4a-2b$$

$\Updownarrow$ ~~также окружность~~ $\Downarrow$ a^2

Задача 2. черновик 4

По условию, нужен меньший радиус => ~~R~~ D = 2.

~~В таком случае CD принимает 2 различных значения.~~

В таком случае CD принимает только одно значение т.к. AB = D окружности, или D основания цилиндра. Т.к. D = 2, то R = 1. =>

~~т.к. пл-ть основания ⊥ CD, то Ch~~

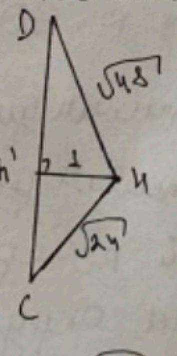
Точка H – центр окружности, плоскость которой ∥ плоскости основания, и т.к. AB = D = 2; AH = HB = 1, т.к. H – середина AB. =>

Hh' – высота проведенная из H к стороне CD равна R, т.к. CD ⊥ плоскости основания и AB ∥ плоскости основания. => $Hh' = R = 1$.

$AH = HB = \frac{AB}{2} = 1$ => т.к. DH ⊥ AB, то $DH = \cancel{\sqrt{49-1}} = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

$AH = HB = 1$ => т.к. CH ⊥ AB, то $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{24}$

Высота Hh' лежит в плоскости CD, т.к. H ∈ этой плоскости и h' ∈ пл-ти, т.к. h' ∈ CD. =>



$\Rightarrow Dh' = \sqrt{DH^2 - h'H^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47} \Rightarrow$

$Ch = \sqrt{CH^2 - Hh'} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

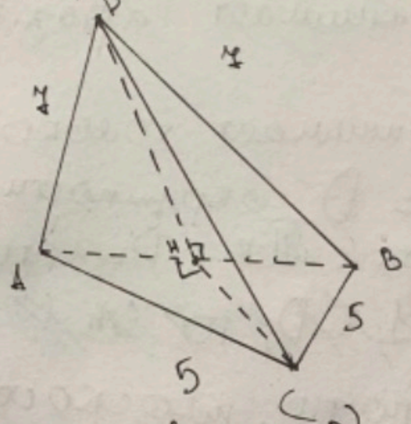
$DC = CH + Ch' = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Ответ: $DC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Вариант 1

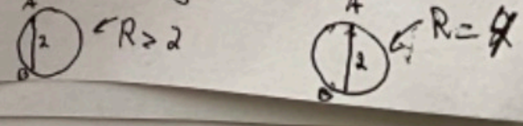
Чистовик 3 Вариант 18.

Задача 2.



Проведем DH (высоту из D), т.к. ΔADB - равнобедр, то H - середина AB.
Проведем CH' (высоту из C), т.к. ΔACB - равнобедренный $\Rightarrow$ H' - тоже середина $AB \Rightarrow H'$ - это H.
т.к. $DH \perp AB$; $CH \perp AB$, то пл-ть $(CDH) \perp AB \Rightarrow$
$CD \perp AB$.

т.к. ребро CD параллельно оси цилиндра, ~~то CD~~ и точки CD (т.к. вершины) лежат на боковой поверхности цилиндра, то CD - часть образующей цилиндра $\Rightarrow$ любая точка CD лежит на боковой поверхности цилиндра. А тогда, т.к. ~~CD ⊥~~ $CD \parallel$ оси цилиндра, то $CD \perp$ основаниям цилиндра, а т.к. $CD \perp AB$, то $AB \parallel$ основаниям цилиндра, т.к. т. A и B принадлежат боковой поверхности цилиндра, то AB - ~~отрезок~~ хорда окружности, радиус которой равен радиусу цилиндра, т.к. $AB \parallel$ основаниям цилиндра. $\Rightarrow$ т.к. AB хорда и $AB = 2$, то ~~R~~ D ~~цилиндра~~ окружности ~~АА~~ и D оснований цилиндра не может быть меньше 2, иначе AB - не хорда $\Rightarrow$ ~~$R_ц \leq 2$~~ ~~$R_ц$~~ $D_ц \geq 2$.



Вариант 18.

...новик 3

Задача 1. Черновик 2

$$\begin{cases} (3) \Rightarrow a_1^2 + (17d - 7)a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \\ (4) \Rightarrow a_1^2 + (17d - 7)a_1 + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \end{cases}$$

Заметим, что при $d = 1$.

$(3) \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow (a+5)^2 > 0 \Rightarrow a > -5$

~~$(4) \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$~~

Осталось рассмотреть ~~при каких d~~, при условии, что $d \in (0;2)$, какие a_1 существуют. Для этого можно рассмотреть (1) и (2), как графики $y(a_1)$, где d отвечает за расположение вдоль Ox и Oy.

Черновик (1)   Вариант 18.

Задача 1.

$S = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $n = 7$; $a_n = a_1+(n-1)d = a_1+6d$

$S = \frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)7 = 7a_1+21d$

$a_7 = a_1+6d$ $a_{12} = a_1+(12-1)d = a_1+11d$

$a_9 = a_1+(9-1)d = a_1+8d$ $a_{10} = a_1+(10-1)d = a_1+9d.$

Тогда:

$a_7\cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d)$ $a_9\cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d)$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 & (1) \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (3) \quad a_1^2+17da_1+66d^2 > 7a_1+21d+20$$
$$(2) \Rightarrow (4) \quad 7a_1+21d+44 > a_1^2+17a_1d+72d^2$$

Складываем (3) и (4), т.к. знаки одинаковые то ~~это рав~~ ничего не нарушим.

$$7a_1+21d+44+a_1^2+17da_1+66d^2 > a_1^2+17a_1d+72d^2+7a_1+21d+\cancel{44}+20$$

$$44\,\cancel{24}+66d^2 > 72d^2+20 \Rightarrow 24-6d^2>0 \Rightarrow$$

$4-d^2>0$ $4-d^2=0 \Rightarrow d=\pm 2$ $-$ $+$ -2 -2

$d \in (-2;2)$, но т.к. арифметическая прогрессия возрастающая, то $d>0 \Rightarrow \begin{cases} 4-d^2>0 \\ d>0 \end{cases} \Rightarrow d\in(0;2)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100658**

ID профиля: **873168**

Вариант 18

Чистовик №5 Вариант 18.

Задача 6.

$S_{\triangle AKP}=6$; $S_{\triangle CPK}=5$; $S_{\triangle AKP}=\dfrac{AK\cdot KP\cdot \sin\angle AKP}{2}$

$S_{\triangle CPK}=\dfrac{KP\cdot KC\cdot \sin(180-\angle AKP)}{2}$, т.к.

$\sin(\angle AKP)=\sin(180-\angle AKP)$ $(\sin\alpha=\sin(180-\alpha))$,

то $\dfrac{S_{\triangle AKP}}{S_{\triangle CPK}}=\dfrac{6}{5}=\dfrac{AK\cdot KP\cdot \sin(\angle AKP)\cdot 2}{2\cdot KP\cdot KC\cdot \sin(180-\angle AKP)}=\dfrac{AK}{KC}\Rightarrow$

$AK=6x$ $KC=5x$ $\Rightarrow AC=11x$

Пусть $\angle B=\angle\alpha$, тогда $\angle AOC=2\alpha$ (как центральный)

$\angle ATC=180-2\alpha$, т.к. $AOCT$ – вписанный четырехугольник.

$AT=TC$, как касат-ые из одной точки;

$AO=OC$, как радиусы.

$S_{APC}=11$.

$\dfrac{S_{APB}}{S_{PCA}}=\dfrac{AP\cdot PB\cdot \sin(\angle APB)\cdot 2}{2\cdot AP\cdot PC\cdot \sin(180-\angle APB)}=\dfrac{PB}{PC}$

$AB\parallel PK$ ~~(т.к. $\triangle KPC\sim\triangle$~~ $\Rightarrow$ $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow$

$S_{APB}=\dfrac{6}{5}\cdot S_{PCA}=\dfrac{6\cdot 11}{5}\Rightarrow S_{ABC}=S_{PCA}+S_{ABP}$

$S_{ABC}=\dfrac{6\cdot 11}{5}+11$ Ответ: $S_{ABC}=\dfrac{121}{5}$

Чистовик 1 Вариант 18.

~~Задача~~. Задача 4.

НОД$(a,b,c)=15 \Rightarrow a=15\cdot k$; $b=15\cdot m$; $c=15n$,

где k, m, n могут иметь попарно один делитель, но k, m, n втроем не могут иметь одинаковый делитель, кроме 1, иначе их НОД >15.

Из НОК следует, что 3^{15} и 5^{18} будут "распределяться" по k, m, n, при этом в a, b, c учесть $15 \Rightarrow$ распределятся 3^{14} и 5^{17}. Для пары 3^{14} можно распределить $7\cdot 2+1=15$ способами, а 5^{17}: $9\cdot 2=18$ способами. Эти

~~3^m~~

3^z; 3^y; 5^m; 5^b можно распределить:

$3\cdot 2\cdot 2\cdot 1=12$ способами, т.к., например для $k=3\cdot 2$ варианта выбора, для $m=2\cdot 1$, для $n=1$.

Также в a, b, c могут фигурировать цифры $2; 4; 6; 7; 8 \Rightarrow$ их можно распределить $5\cdot 5\cdot 1=25$ способами, т.к., например, для $k=5$ способов, для $m=5$ ~~цифра~~ способов для $n=1 \Rightarrow$

Всего: $18\cdot 15\cdot 25$ способов

Ответ: $18\cdot 15\cdot 25$

21100658 (U873168 M1299422)

Чистовик 2 Вариант 18.

Задача 5.

пусть $\sqrt{\frac{x}{3}+3}=a$ $6x-14=b$ $x-1=c$, тогда $\log_a b$, $\log_b c^2$, $\log_c a^2$, перемножим все три логарифма, получим:

$\log_a b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a^2 = \log_a a^2 \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c b =$

$= 2 \cdot \log_b b \cdot \log_c c^2 = 4.$

Пусть некоторое значение которому равны два логарифма равно a, тогда 3-ий логарифм $= a-1 \Rightarrow a \cdot a \cdot (a-1)=4 \Rightarrow$

$a^3-a^2-4=0$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

$\Rightarrow (a-2)(a^2+a+2)=0$

Вывод: $\Rightarrow$ $a^2+a+2=0$ $D<0 \Rightarrow$

$a=2 \Rightarrow$ если логарифмы равны между собой, то они обязательно равны 2-ум, тогда 3-ий log равен $2-1=1$. Тогда рассмотрим случай, когда каждый из логарифмов равен 2 и найдем искомые корни.

① Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$, тогда

$\frac{x}{3}+3=6x-14 \Rightarrow x+9=18x-\cancel{14}^{42} \Rightarrow x=3$

Проверяем: $x=3 \Rightarrow \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{\sqrt{4}}4=2$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_4(4)=1.$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\log_2 4=2 \Rightarrow$

$2 \cdot 2 \cdot 1=4$ - верно $\Rightarrow$ $x=3$ - удовлетворяет.

21100658 (U873168 M1299422)

(2) Задача 5 Чистовик (3) Вариант 18.

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2 \Rightarrow (6x-14)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow$

$(6x-14)^2 - (x-1)^2 = 0$

$(5x-13)(7x-15) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{13}{5} \quad x_2 = \frac{15}{7}$

Заметим, что при $x_1 = \frac{13}{5}$ или $x_2 = \frac{15}{7}$.

$\log_{(6x-14)}(x-1)^2$ равен 2.

(3) Тогда рассмотрим, при каких значениях x ведь если x_1 и x_2 удовлетвор, то, когда (3) найти 1-ый $\log = 2$ вылезут эти x_1 или x_2 корни

(3) $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{x}{3}+3 \Rightarrow$

$x^2 - \cancel{2x+1} = \cancel{\frac{x}{3}+3} \quad 3x^2 - 6x + 3 = x + 9 \Rightarrow$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$ из огран.

$D = 49 + 72 = 121 \quad \sqrt{D} = 11$

$x_3 = \frac{7+11}{2\cdot 3} = 3 \quad x_4 = \frac{7-11}{2\cdot 3} < 0 \Rightarrow$ неудовлет, потому, что $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x > 1$, а $\frac{7-11}{6} < 0 \Rightarrow$ неуд.

Заметим, что

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2$, только при $x_1 = \frac{13}{5}$ или при $x_2 = \frac{15}{7}$, но ни $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, ни $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$ при данных значениях 2 не равны (т.к. для первого, чтоб такое было $x=3$, а для второго, либо $x_3 = 3$, либо $x_4 = \frac{7-11}{6}$, который неуд).

Тогда либо данные корни $(x_1$ и $x_2)$ не удовлетворяют, либо $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2+1 = 3$,

тогда $3^2 \cdot 2$ должно быть равно 4, чего не может быть $\Rightarrow x_1$ и x_2 — неудовлетвор.

$x_3 = 3$ мы уже нашли в 1-ом случае.

а x_4 не удовлетворяет области огр., он $< 1 \Rightarrow$ корень только $x = 3$

Ответ: $x = 3$

ча 5 Чистовик 3 Вариант 18.

8.

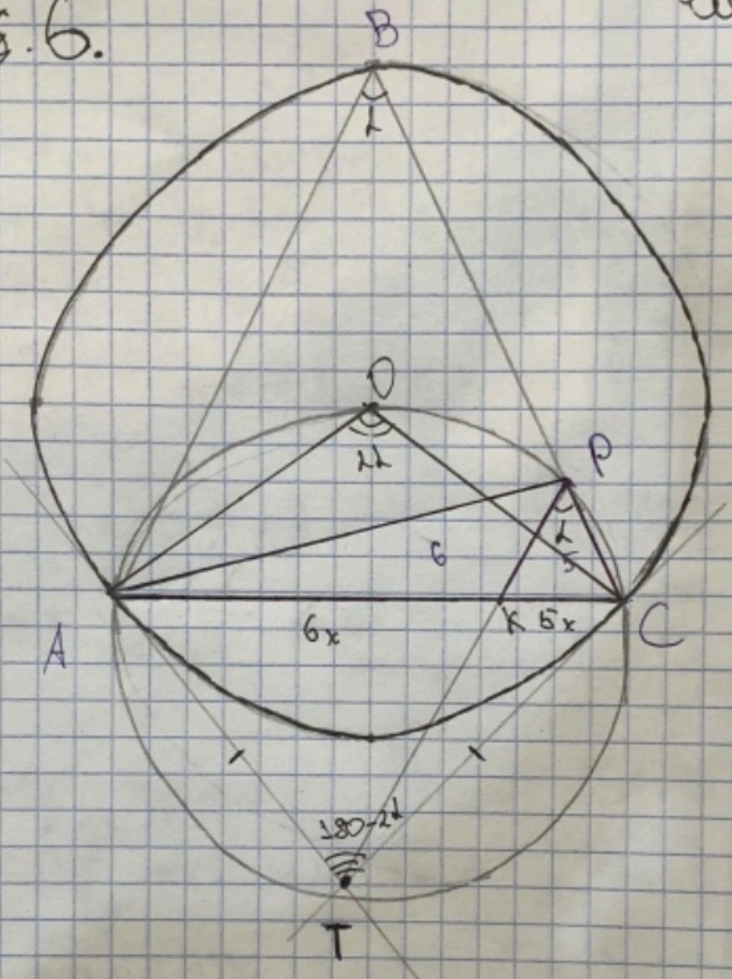
$14 (x-1)^2 = 2 \Rightarrow (6x-14)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow$

$)^2 - (x-1)^2 = 0$

Чистовик 4

Вариант 18

Задача $\cancel{5}$.6.



21100658 (U873168 M1299422)

8.6.

$\log_a b \quad \log_b c^2 \quad \log_c a^2$

1) $\log_a b = \log_b c^2$, то

$\log_a b = \dfrac{\log_a c^2}{\log_a b} \Rightarrow \log_a^2 b = 2\log_a c$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b}$ $\quad 1 = \log_b c^2 \cdot \log_b a$

2) $\log_b c^2 = \log_c a^2$ $\quad 1 \; 1 \; 2.$

$\log_b c = \log_c a = \dfrac{\log_b a}{\log_b c} \Rightarrow$

$\log_b^2 c = \log_b a$ $\quad 17x = 51$

3) $\log_a b = \log_c a^2 = 2\log_c a \Rightarrow$

$\log_a b \cdot \log_a c = 2.$ $\quad 17x = 33$

$(\log_c a^2 - 1) = \log_c a^2 - \log_c c = \log_c \frac{a^2}{c}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$

$x = 3.$

$\log_2 4 \quad \log_4 4 \quad \log_2 4$

$2 \quad 1 \quad 2$

$\log_{\sqrt{3}} \frac{4}{3} \quad 10 \quad \log_{10} 9 \quad \log_9 3\frac{4}{3}$

Задача 8.6.

$\log_a b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a^2 =$

$= \log_a a^2 \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c b^2 = 4$

$a^2(a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	

$(a-2)(a + a + 2) = 0$

$D < 0 \Rightarrow$

черновик.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ $\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$x \neq \cancel{1}$

$x > \cancel{8}$

$x>1$

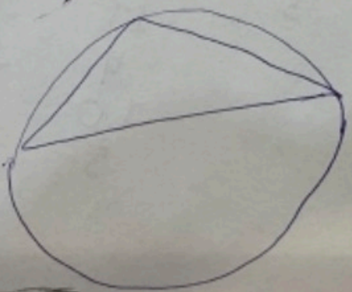
$6x>14$

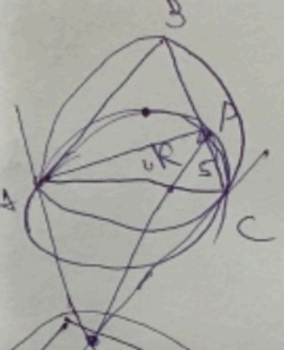
$x > \frac{14}{6}$ $x \neq -9$

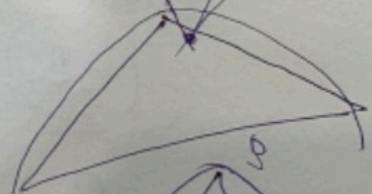
$\log_a b$ $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \Rightarrow$

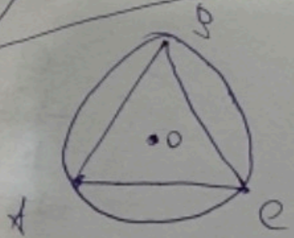
$\log_{6x-14}$

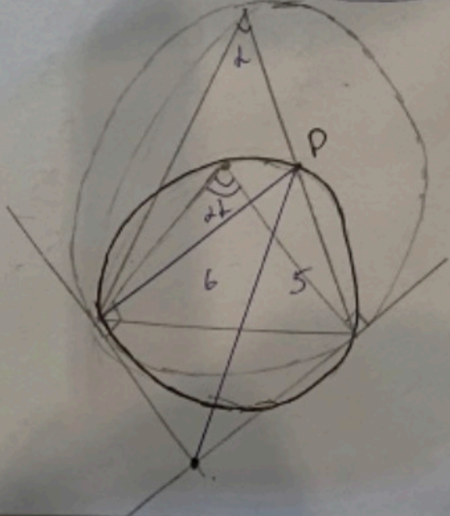
$\log_a b$ $\log_b c^2$ $\log_c a^2$

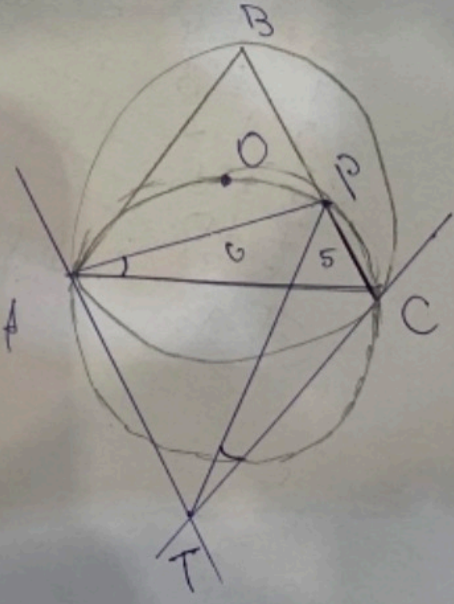












НОД. все делятся не более, чем на 15.

$a = 15 \cdot k$ $b = 15 \cdot m$ $c = 15n$

Все кратны,

$3^{15} \cdot 5^{18}$ $a = 3 \cdot 5 \cdot k$ $b = 3 \cdot 5 \cdot m$ $c = 3 \cdot 5 \cdot n$

2 3 3 5 = 15b
3 5 3 = 15b
5 3 3 = 15b
5 5 3 =
5 3 5
3 5 5

335, то 15 · 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$3^{14} \cdot 5^{17}$

$3^{14} \cdot 5^{17}$

$3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1$

18

$3^n \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot 5^z$

0 17
~~17 0~~
1 16
~~16 1~~
2 15
3 14
4 13
5 12
6 11
7 10
8 9
9 9

3 · 5 3 35.

3 · 3вар

18

~~1 13~~
0 14
14 0
1 13
13 1
2 12
12 2
3 11
11 3
4 10
10 4
5 9
9 5
6 8
8 6
7 7

3 · 2 · 2 · 1.

12 = 12

14 + 1.

10 · 9 · 5.

33

~~35 3 35~~
~~3 35 35~~
~~35 5 3~~
10 53 · 93 · 55
3 53 5
3 5 53
53 5 3
5 53 3
5 3 53

21100658 (U873168 M1299422)