Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100641**

ID профиля: **315386**

Вариант 18

Черновик

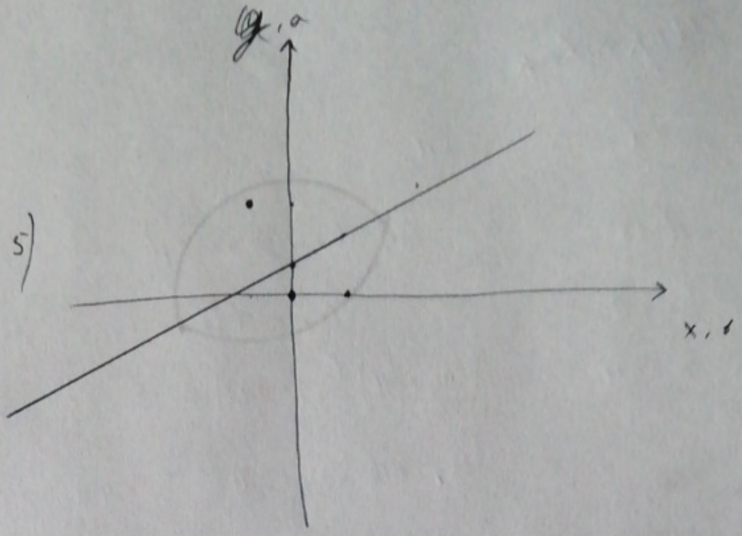
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

1) $4a-2b < 5$

$a^2+b^2-4a+2b \le 0$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$



$4y \quad a = 2x+5$

$y = \frac{x}{2}+\frac{5}{4}$

21100641 (U315386 M1303958)

Черновик

1. $a+d,\ a+2a, + \dots a+7d$

$S = 7a + d\cdot 28$

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20,$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_1 + 6d =$

$= 7\cdot a_1 + d(1+2+3+4+5+6) = 7a_1 + 21d$

$(a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \Rightarrow a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0$

$(a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 \Rightarrow a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 - 7a_1 - 21d - 44 < 0$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(17d-7) + (66d^2 - 21d - 20) > 0 \\ a_1^2 + a_1(17d-7) + (72d^2 - 21d - 44) < 0 \end{cases}$$

$66d^2 - 21d - 20 > 72d^2 - 21d - 44 \Rightarrow -6d^2 + 24 > 0$

$\Downarrow$

$d \in \{-2; -1; 1; 2\}$

$289d^2 - 1114d + 49 - 288d^2 + 84d + 176 > 0$

$d^2 - 154d + 225 > 0$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$d = 2$ – не подх.

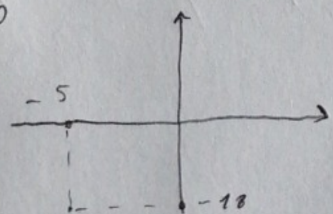
$d = -1,\ d = -2$ – не подх, т.к. поел – возрастающая. Поэтому $d = 1$

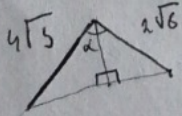
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \quad \Rightarrow a \neq -5$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

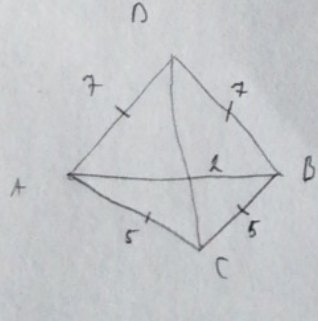
$\frac{-10}{2} = -5$

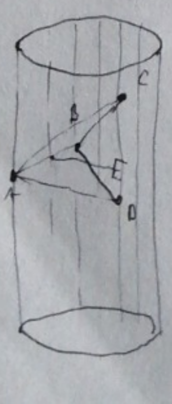
$25 - 50 + 7$





2.

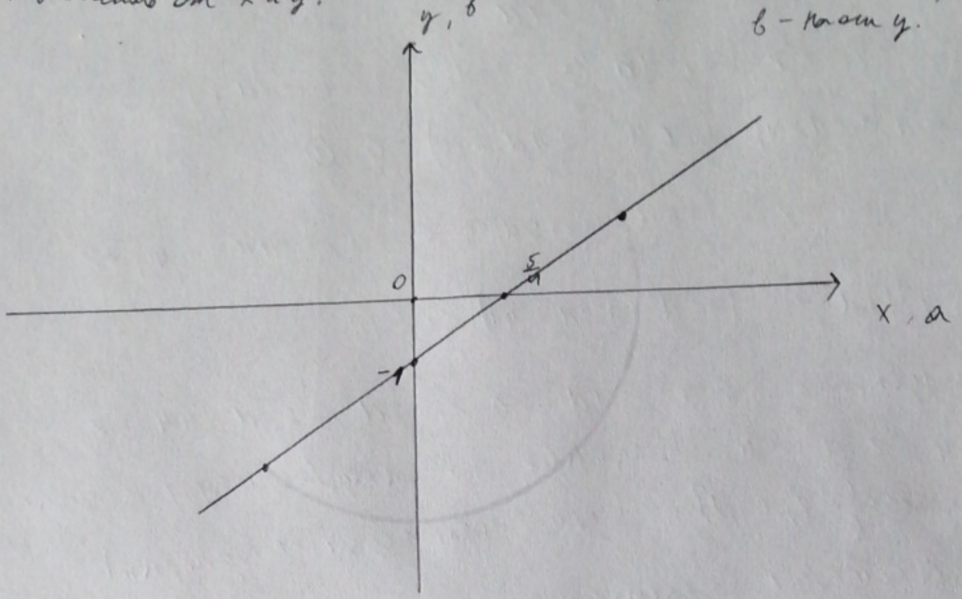




21100641 (U315386 M1303958)

~~Чистовик~~. Черновик

3. Заметим, что мы можем представлять пару чисел (a, b) на той же декартовой плоскости независимо от x и y. Пускай a – по оси x, b – по оси y.



Проведём прямую $4a - 5b = 5$ (или, иначе, $y = \frac{4}{5}x - 1$).
(a, b) (или иначе)

Для всех пар точек ниже этой прямой, $\min(4a-2b, 5) = 5$,
для всех точек выше этой прямой, $\min(4a-2b, 5) = 4a-2b$.

Рассмотрим оба случая:

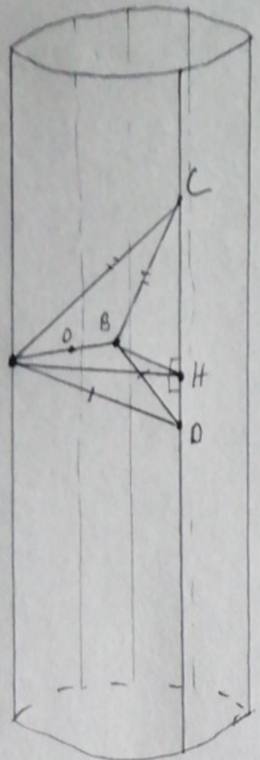
1) $a^2+b^2 \leq 5$. Этому неравенству удовлетворяют все точки внутри или на круге с центром в O и радиусом $\sqrt{5}$ – начертим это на плоскости.

2) $a^2-4a+b^2+2b \leq 0 \Rightarrow (a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$ – этому неравенству удовлетворяют все точки внутри круга с центром в точке $(2; -1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Проведём прямую $4a - 2b = 5$ (или $y = 2x - 2,5$

Черновик

2



Дано: $AB = 2$

$AD = BD = 7$

$AC = BC = 5$

$CD \parallel$ оси цилиндра

Пусть O — середина AB.

$AD = BD \Rightarrow D \in \alpha$ — плоскости проходящей через O и перпендикулярной AB.

$AC = BC \Rightarrow C \in \alpha$.

$\Downarrow$

$DC \in \alpha \Rightarrow AB \perp CD$.

Пусть H — основание высоты в треугольниках ACD и BCD (оно у них общее ~~т.к. они равны по трём сторонам~~ из симметрии)

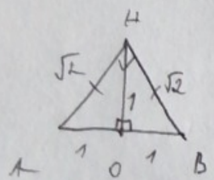
Ясно, что плоскость треугольника ABH ~~перп~~ перпендикулярна CD ($AH \perp CD$, $BH \perp CD$).

Значит окружность (ее плоскость), описанная вокруг него параллельна плоскости основания, значит её радиус и есть радиус цилиндра.

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$ (в треуг-ке ABH). Ясно, что R минимален, когда $\sin\angle AHB = 1$, т.е. $\angle AHB = 90^\circ$, $R = \frac{AB}{2} = 1$.

Отсюда найдём CD:

~~Имеем~~ $AH = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



$AC = 5$; $HC = \cancel{\sqrt{25+2}}\ \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$HD = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$.

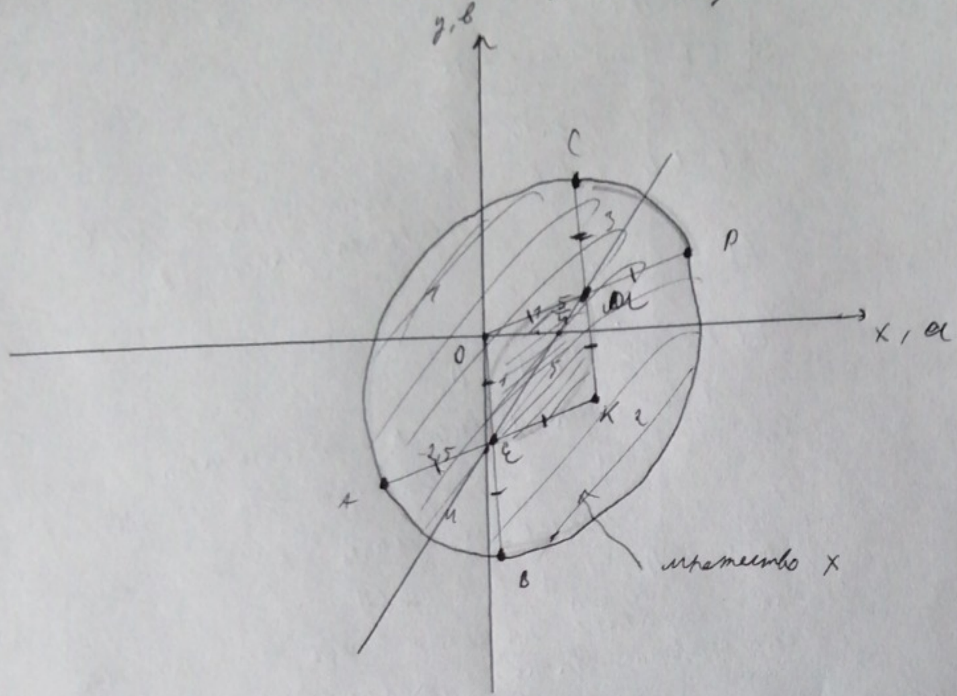
~~Так~~ Таким образом CD определяется однозначно: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$.

Ответ: $\sqrt{23} + \sqrt{47}$

21100641 (U315386 M1303958)

Черновик.

3. Заметим, что мы можем представить пару чисел (a, b) на той же декартовой плоскости параллельно осям x, y. Пусть a – по оси x, b – по оси y.



Проведём прямую $4a - 2b = 5$ (иначе – $y = 2x - 2,5$)

Для всех точек плоскости правее этой прямой, $\min(4a-2b, 5) = 5$, для всех, что левее: $\min(4a-2b, 5) = 4a-2b$.

1.) $a^2+b^2 \leq 5$. Этому неравенству удовлетворяют все пары (a, b) внутри круга с центром в O и радиусом $\sqrt{5}$

1.) $a^2+b^2 \leq 4a-2b \Rightarrow (a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$. Этому неравенству удовлетворяют точки внутри круга с центром $(2; -1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Получились некие сегменты 2 кругов. (обе окружности пересекают построенную прямую в тех же точках)

Условие $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$ ~~означает, что~~ вырисовывает множество кругов с центрами в каких-то точках $(x; y)$ радиуса $\sqrt{5}$. Нужно для выполнения системы, чтобы эти круги пересекали получившуюся фигуру.

Итоговое множество $(x; y)$ лежит внутри суммы сегментов 1, 2, 3, 4, 5. (объединения)

$S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$

Все отрезки на рисунке равны из построений.

Важно: фигура ABCD – не овал и не наложение двух кругов, сегменты ABE и CDM – часть окружностей с центрами в E и M и радиусами $AE = EB = CM = MD$

Далее нужно по отдельности искать площади секций и потом сложить их, (но я не успевала)

Чистовик

1. $S = a_1 + a_1 + d + \dots + a_1 + 6d$, где d – разность прогрессии

$S = 7a_1 + (d + 2d + \dots + 6d) = 7a_1 + 21d$

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \Rightarrow (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + a_1(17d - 7) + (66d^2 - 21d - 20) > 0$ ①

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \Rightarrow (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + a_1(17d - 7) + (72d^2 - 21d - 44) < 0$ ②

Из ① и ② следует, что $66d^2 - 21d - 20 > 72d^2 - 21d - 44 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6d^2 < 24 \Rightarrow d^2 < 4$. Учитывая, что последовательность целочисленная,

$d \in \{-1; 0; 1\}$. (ноль в любом случае не подходит)

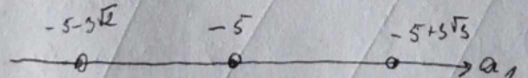
Т.к. последовательность возрастающая, подходит только $d = 1$.

Т.е. ① и ② можно переписать как $a_1^2 + a_1 \cdot 10 + 25 > 0$ и

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

Из первого следует, что $a_1 \neq -5$.

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$



Осталось перебрать подходящие целочисленные a_1.

$3\sqrt{2} \approx 3 \cdot 1{,}4 < 5$

$\vee$

4.

Т.е. подходят $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100641**

ID профиля: **315386**

Вариант 18

1.) наліпки нем в a, b, c

2.) пройти нем в a, b, c

Чернивик

$a = a_1 \cdot a_2$

$b = a_1 \cdot b_1$

$c = a_1$

$a = 15 \cdot k$

$b = 15 \cdot m$

$c = 15 \cdot n$

$15 \cdot k \cdot m \cdot n = 3^{15} 5^{18}$

$k \cdot m \cdot n = 3^{14} \cdot 5^{17}$

k, m, n ~~взаємно прості~~

$k : 14 \cdot 17$

1.) $2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)} 6x+14 = 2\log_{6x-14} x-1$

$(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3$

$x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{3} + 3$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{6}$

$x = 3$

$a \qquad b \qquad c$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14), \ \log_{6x-14}(x-1)^2, \ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2 \cdot \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x+14), \quad 2 \cdot \log_{6x-14} x-1, \quad \log_{x-1} \frac{x}{3}+3$

1.) $abc = 4$

$a = b$

$c = a-1$

$a^2 \cdot (a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \hline a^3 - 2a^2 & a^2 + a + 2 \\ a^2 - 4 & \\ a^2 - 2a & \\ 2a - 4 & \\ 2a - 4 & \\ 0 & \end{array}$$

$a = 2$

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$

$x + 9 = 18x - 42$

~~$17x = -33$ — не підх~~

$x \neq 1, \ x > -9$

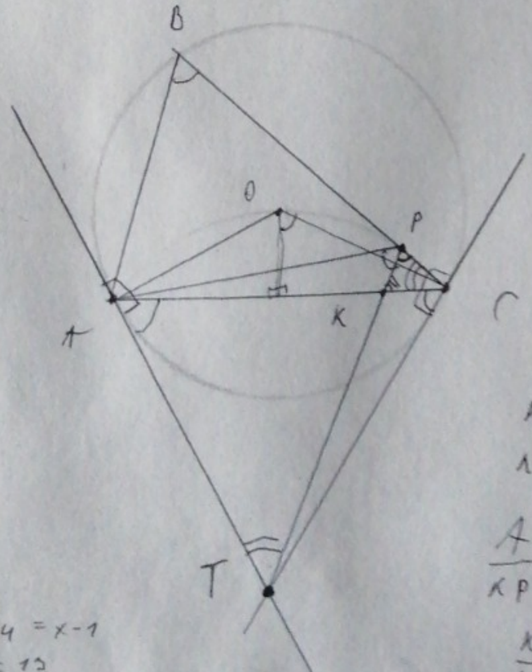
$x > 1$

$x > \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$6x - 14 \neq 1$

$x \neq 2{,}5$

$x > \frac{7}{3}$



$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle CPK} = 5$

$\frac{AK}{CK} = \frac{6}{5}$

$h \cdot AK = 12$

$h \cdot KC = 10$

$h \cdot AC = 22$

$\frac{h}{H} = \frac{5}{6}$

$\frac{22}{AC \cdot H} = \frac{5}{6}$

$\frac{AK}{KP} = \frac{TK}{KC}$

$\frac{KC}{AC} = \frac{5}{6}$

$\frac{S_{PAC}}{S_{BAC}} = \frac{25}{36}$

$S_{ABC} = \frac{5 \cdot 36}{25} = 72$

2.) $abc = 4$

$a = c$ — не підх

$b = a - 1$

3.) $abc = 4$

$b = c$

$a = b - 1$

$b = 2$

$6x - 14 = x - 1$

$5x = 13$

$x = 2{,}6$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

21100641 (U315386 M1303959)

Чистовик

Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} |6x-14| = a$, $\log_{6x-14} (x-1)^2 = b$, $\log_{x-1} \left(\frac{x}{3}+3\right) = c$

во первых из-за ограничений $x > \frac{7}{3}$ и $x \neq 2{,}5$.

Далее заметим, что $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot c = 1$, т.е. $a \cdot b \cdot c = 4$

По условию нас интересуют варианты: $a = b$, $c = a-1$ — 1
$a = c$, $b = a-1$ — 2
$b = c$, $a = b-1$. — 3

т.е. числа $a\,b\,c$ распределяются как $2 \cdot 2 \cdot 1$ в каком-то порядке.

Система $\begin{cases} abc = 4 \\ a = b \\ c = a-1 \end{cases}$ имеет единственное решение: $2 = a = b$

Рассмотрим случаи: $a = 2 \Rightarrow \frac{x}{3} + 3 = 6x - 14 \Rightarrow 17x = 42 + 3 = 51$, $x = 3$
тогда $b = 1$ и $c = 2$
реализуется 2

~~$b=2$ — не возм~~

$b = 2 \Rightarrow 6x - 14 = x - 1$, $5x = 13$, $x = 2{,}6$ — не подходит, т.к. тогда c будет больше 2.

Итого один вариант: $a = b = 2$, $c = 1$. Тогда $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Чистовик

1. $a = 15k$
$b = 15m$ — из условия
$c = 15n$ $\qquad$ k, m, n — взаимно просты (но не попарно!)

$15 \cdot k \cdot m \cdot n = НОК(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$k \cdot m \cdot n = 3^{14} \cdot 5^{17}$

Условие взаимной простоты означает, что ~~в~~ тройки может быть только в двух из трёх чисел, как и пятёрка.

Отсюда варианты:

тройки нет в

пятёрки нет →

Таблица а)

	a	b	c
a	·	·	·
b	·	·	·
c	·	·	

Для каждого варианта верно следующее: если у одного из чисел степень тройки/пятёрки: k, то степень тройки/пятёрки второго числа определена однозначно.

Значит для каждого из вариантов можно составить $14 \cdot 17$ ~~вариантов~~ чисел, удовлетворяющих условию.

Заметим, что также ~~все~~ числа не могут быть равны, т.к.:
есть 2 варианта: в одном из чисел нет ни троек ни пятёрок, тогда в остальных ~~все~~ пятёрок нечётное кол-во а числа не равны;
второй: ни одно из чисел k, m, n — не единица. тогда в одном нет троек а в другом есть, а среди них других в одном нет пятёрок. опять нет равных. Это же верно для чисел a, b, c по очевидным причинам.

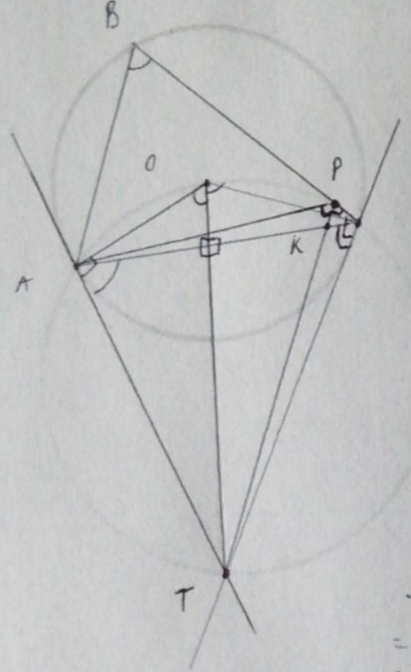
Поэтому смело можем сказать, что вариантов расстановки степеней
$14 \cdot 17 \cdot 9 = 2142$ варианта (каждая из клеток таблицы а) равнозначна, а также их варианты не пересекаются)

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times\ 17 \\ \hline 882 \\ 126\ \ \\ \hline 2142 \end{array}$$

Чистовик

Дано: $S_{\triangle PKC}=5$

$S_{\triangle APK}=6$



а) Найти: S_{ABC}.

Заметим, что $AOCT$ – вписанный, т.к. $\angle OAT+\angle OCT=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$AOPC$ также вписанный по условию.

Значит точки $AOPCT$ лежат на одной окружности.

Далее: $\angle ABC=\angle ACT$, т.к CT – касательная. Также $\angle TCA=\angle TAC$ (т.к. касательные из одной точки равны).

$\angle ATP=\angle ACP=\angle ACB$, т.к. опираются на одну дугу в окружности.

Теперь имеем $\angle PTA+\angle TAC+\angle BAC=$
$=\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=180^\circ$

Значит $AB \parallel TP$ (при секущей AT)

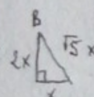
Поэтому $\triangle ABC \sim \triangle KPC$

~~Пусть h – высота в △PKC из P, H – высота в △ABC из B.~~

$\cancel{\frac{H}{h}=\frac{AC}{KC}}$ Треугольники подобны по коэффициенту $\frac{5}{11}$ (т.к. $\frac{S_{\triangle PKC}}{S_{\triangle APK}}=\frac{5}{6}$, а h – их общая высота, то $\frac{AK}{KC}=\frac{6}{5}$, $\frac{KC}{AC}=\frac{5}{11}$) Значит

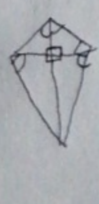
$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}}=\frac{121}{25} \Rightarrow S_{ABC}=24{,}2.$

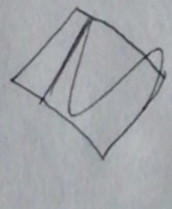
$tg\,\angle B=\frac{1}{2}$



$\frac{AT}{R}=\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{AC}{2R}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left(\frac{AC}{2}\right)^2=$ ~~$\frac{AC}{2}$ AC~~ Можно попробовать найти AC из четырёхуг-ка $AOCT$.





21100641 (U315386 M1303959)