Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100588**

ID профиля: **309637**

Вариант 18

Чистовик

№1. Пусть d – разность арифметической прогрессии, $d>0$ (по условию). Тогда $S = a_1+a_2+\ldots+a_7 = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 =$
$= \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$ (1). $a_7=a_1+6d$, $a_{12}=a_1+11d$, $a_9=a_1+8d$,
$a_{10}=a_1+9d$, поэтому, по условию:

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+6d)\cdot(a_1+11d) > S+20 \\ (a_1+8d)\cdot(a_1+9d) < S+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2 > S+20 \\ a_1^2+17a_1d+72d^2 < S+44 \end{cases} \quad \underline{(2)}$$

Пусть $L=a_1^2+17a_1d+66d^2$. Предположим, что $6d^2\geq 24$. Тогда $L+6d^2 > S+20+24=S+44$. Но $L+6d^2<S+44$ (из второго уравнения системы). Предположение неверное, значит $6d^2<24$.

Заметим, что $d\in\mathbb{N}$. Действительно, если $a_i\notin\mathbb{Z}$, то не выполняется условие на то, что члены прогрессии – это целые числа. А раз так, то $a_{i+1}-a_i\in\mathbb{Z}$, т.е. $d\in\mathbb{Z}$. С учетом $d>0$, $d\in\mathbb{N}$

Среди натуральных чисел неравенству $6d^2<24$ удовлетворяет только $d=1$ (при $d\geq 2$, $6d^2\geq 24$)

Математика, 11 класс

Чистовик

Рассмотрим данный случай $d = 1$:

$S = 7a_1 + 21$ (из (1))

Система (2) примет вид

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a + 7 < 0 \end{cases}$$

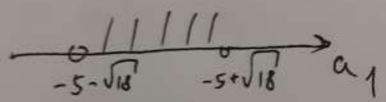
Из первого уравнения системы $a_1^2 + 10a_1 + 25 = (a_1 + 5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$ (3)

Из второго уравнения системы,

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 100 - 4 \cdot 7 = 72$

$a_1 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = \dfrac{-10 \pm 2\sqrt{18}}{2} = -5 \pm \sqrt{18}$



$-10 < -5 - \sqrt{18} < -9$, $-1 < \sqrt{18} - 5 < 0$, поэтому, т.к.

$a_1 \in \mathbb{Z}$ и все переходы были равносильными, $a_1 = -9, -8, -7,$ $-6, -4, -3, -2, -1$ ($a_1 \neq -5$ в силу (3))

Ответ: $a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

Чистовик

N3. Рассмотрим второе неравенство системы:

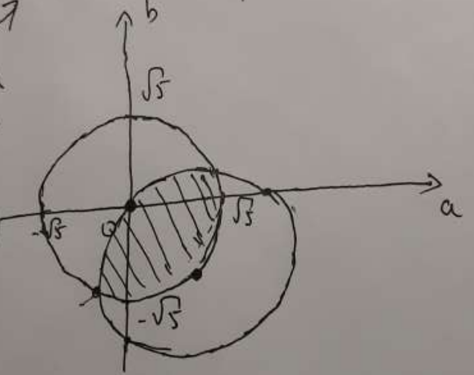
$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$. Оно равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-4a+b^2+2b \le 0 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases}$$

. Если рассмотреть плоскость Oab, то такие a и b лежат внутри общей части кругов с центрами $(0;0)$ и $(2;-1)$ и радиусом $\sqrt{5}$ (в т.ч. лежат и на границе)

эти точки лежат на окружности с центром (0;0)



Черновик

$d=3$:

$a_1^2 + 17a_1 \cdot 3 + 66 \cdot 9 > 7a_1 + 21 \cdot 3 + 20$

$a_1^2 + 51a_1 + 72 \cdot 9 < 7a_1 + 21 \cdot 3 + 44$

$a_1^2 + 44a_1 + 66 \cdot 9 - 63 - 20 > 0$

$a_1^2 + 44a_1 + 72 \cdot 9 - 63 - 44 < 0$

$648 - 107 = 541$ ✓

$D = 44^2 - \underbrace{4 \cdot 541}_{>2025} < 0$ решений нет

$44^2 < 45^2 < 2025$

1) $d = 1$

Черновик

$S_7 = 7(a_1 + 3d) = 7a_1 + \cancel{1}21$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \quad a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44$

$a_1^2 + 10a_1 + \cancel{28}\,7 < 0 \quad 72 - 44 - 21 = 72 - 65 = 7$

~~т.е. $D \geq 0$~~

~~$D = 100 - 4 \cdot 28 < 0$ корней нет~~

$D \geq 0 \quad 100 - 28 \geq 0 \quad a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$a_0 = \frac{10}{-2} = -5 \quad 72$

$+25 + 7 - 50 = -18$ ✓

$\frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = \quad -4: \ 16 + 7 - 40$ ✓

$= -5 \pm \sqrt{18} \quad -3: \ 9 + 7 - 30$ ✓

$-5 - \sqrt{18} > -10 \quad -2: \ 4 + 7 - 20$ ✓

$-1: \ 8 - 10$ ✓

$0 \neq 0$

-5

2) ~~$d = 2$~~

$S_7 = 7(a_1 + 6) = 7a_1 + 42$

$4,\ldots - 5 = -0,\ldots$

$a_1^2 + \cancel{17}\,34a_1 + 66 \cdot 4 > 7a_1 + 21 \cdot 2 + 20$

$264 - 42 - 20 = 264 - 62 = 202$

$a_1^2 + 27a_1 + 202 > 0$

$a_1^2 + 34a_1 + 72 \cdot 4 < 7a_1 + 21 \cdot 2 + 44$

$288 - 86 = 202 \quad$?!

$49 - 119 + 66 > -8$

$49 - 119 + 72 < 16$

$a_1^2 + 27a_1 + 72 \cdot 4 - 42 - 44 < 0$

$\boxed{a_1^2 + 27a_1 + 202 < 0}$

$a_1 = -7$ ~~28+66~~ $44 - 28 = 16$

$d = 1$

$-7 \ -6 \ -5 \ -4 \ -3 \ -2 \ -1$

$\frac{-13}{2} \cdot 7 = -28$

1

Ч4

a_i - целые числа $\quad d>0$

$\{a_n\}$ - арифм. прогрессия

$$S=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(a_1+a_1+6d)}{2}=\frac{14(a_1+3d)}{2}=$$

$$=7(a_1+3d)$$

$$\begin{cases} a_7\cdot a_{12}>7(a_1+3d)+20 \\ a_9\cdot a_{10}<7(a_1+3d)+44 \end{cases}$$

$a_7=a_1+6d \quad a_{12}=a_1+11d \quad a_9=a_1+8d \quad a_{10}=a_1+9d$

$$\begin{cases} (a_1+6d)\cdot(a_1+11d)>7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)\cdot(a_1+9d)<7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$238-84=154$

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2>7a_1+21d+20 \\ a_1^2+17a_1d+72d^2<7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$7\cdot 17=119$

$a_1^2+(17d-7)a_1+66d^2-21d-20>0$

$D=(17d-7)^2-4(66d^2-21d-20)=289d^2-238d+49-264d^2+$
$+84d+80=25d^2-154d+129$

$49+176=225$

$a_1^2+(17d-7)a_1+72d^2-21d-44<0$

$D=((17d-7)^2-4\cdot(72d^2-21d-44)=289d^2-238d+49-288d^2+84d+176=$
$=d^2-154d+225$
$(d-15)^2-124d\geq 0$

Черновик

$\{a_n\}$ возр. $a_i \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7}$

$a_8\ a_9 a_{10}\ a_{11}\ a_{12}$

$a_1 \quad d>0$

$$S_7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7(a_1 + 3d)$$

если $a_1 \in \mathbb{Z}$ - не выполнено

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, но тогда $a_2 \in \mathbb{Z}$, $\boxed{d \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S_7 + 20 \\ a_9 a_{10} < S_7 + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)\cdot(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1+8d)\cdot(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$K > S_7 + 20$

$K + 6d^2 < S_7 + 44$

$>S_7+20 \quad \geq 0$

$a_1^2 + 17a_1 d - 7a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0$

$a_1^2 + (17d-7)a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0$

$D = 289d^2 - 238d + 49 - 264d^2 + 84d + 80 =$

$= 25d^2 - 154d + 129$

$(5d-11)^2 - 44d + 8$

$T + 66d^2 > S_7 + 20$

$T + 72d^2 < S_7 + 44$

$T + 66d^2 - 20 > S_7$

$T + 72d^2 - 44 < S_7$

$-S > -37$

$6d^2 \in (0; 22)$

$$a_7 \cdot a_{12} > \frac{a_1 + a_7}{2} + 20$$

$L + 6d^2 > S_7 + 20 + 24 = S_7 + 44$

$2a_7 \cdot a_{12} > a_1 + a_7 + 40$

$2a_7 a_{12} - a_7 > a_1 + 40$

$a_7(2a_{12} - 1) > a_1 + 40$

$$a_7 > \frac{a_1 + 40}{2a_{12} - 1}$$

$6d^2 > 0$

$d^2 > 0$

$6d^2 < 22$

$d^2 < \frac{22}{6} < \frac{11}{3} = 3,\ldots$

если $6d^2 \geq 22$

то $K + 6d^2 \geq S_7 + 20 + 22 = S_7 + 44$

т.е. $6d^2 < 22$

$\Downarrow$

$d = 1$

при $d \geq 2$: $6 \cdot 2^2 = 24 > 22$

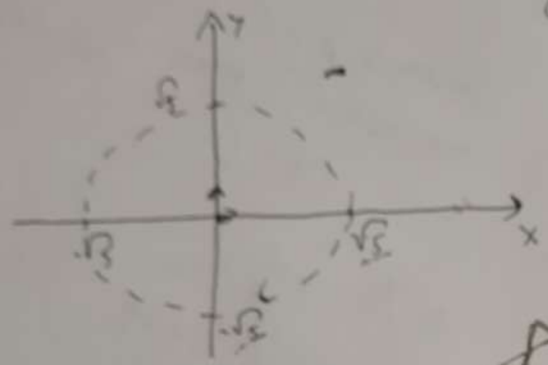
Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

[illegible]?
[illegible]?

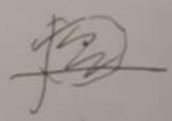
$\cancel{a, b \le \sqrt{5}}$

$a^2+b^2 \le 5$



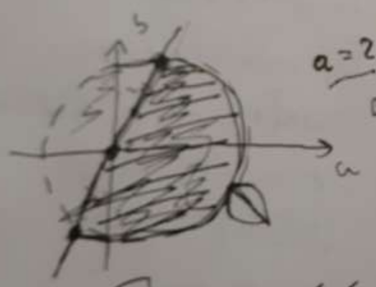
$(x-2)^2+(y-1)^2 < 5$

2



$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

$4a=2b$
$2a=b$



$a=2\ b=1$

$a=1\ b=1$

$2 \le 2$

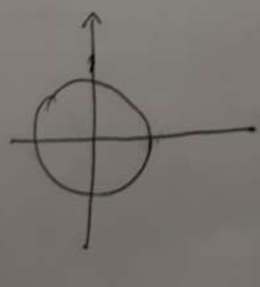
$(x-1)^2+(y-1)^2 \le 5$

$\cancel{a \le \sqrt{5}}$

$\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sqrt{2}$

$4a-2b \ge 0$ иначе $a^2+b^2 \le 0$

d



Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

Черновик

$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$$

$a^2+b^2 \le 5$ точно

$4a-2b=0$

$4a=2b$

$b=2a$

если $4a-2b \le 0$, X

$a=1,5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+b^2+2b \ge 0$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \ge 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

6 5

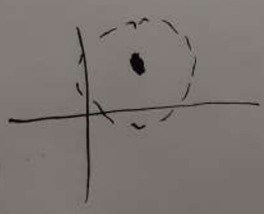
3 5

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2+b^2 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le 5$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100588**

ID профиля: **309637**

Вариант 18

Чертёж

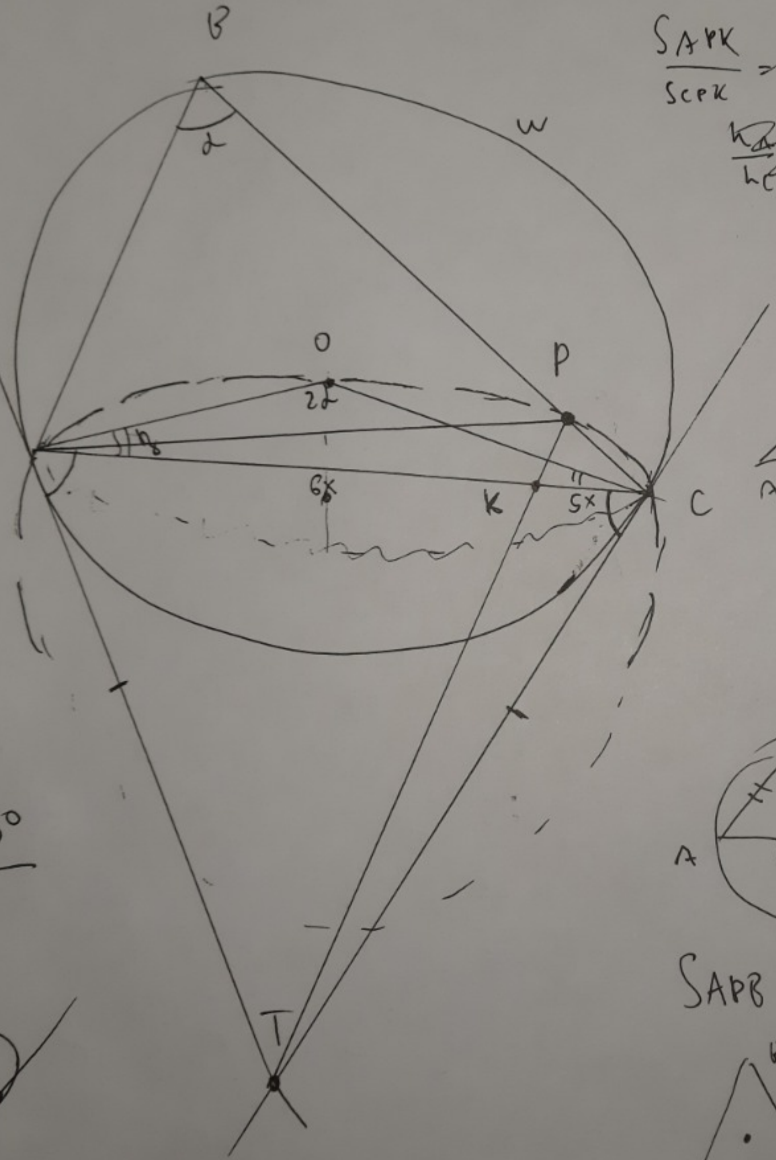
S_{ABC} - ?

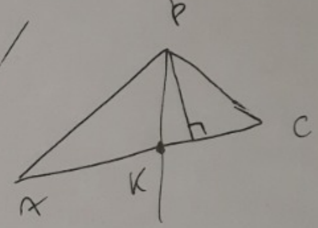
$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=5$

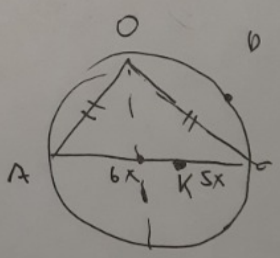
$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{6}{5}$

$\cancel{\frac{h_A}{h_C}=\frac{6}{5}}$

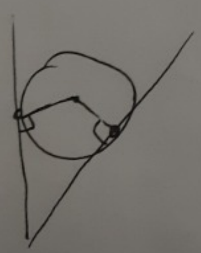




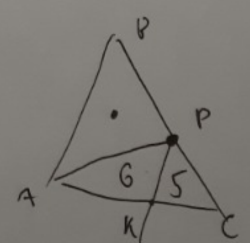
$\frac{AK}{CK}=\frac{6}{5}$



$\alpha+\beta=90^\circ$



S_{APB} - ?



21100588 (U309637 M1297286)

Черновик

$(a,b,c)=3\cdot5$

$[a,b,c]=3^{15}\cdot5^{18}$

~~$a<b$~~

$a=3^{\alpha_1}\cdot5^{\beta_1}$

$b=3^{\alpha_2}\cdot5^{\beta_2}$

$c=3^{\alpha_3}\cdot5^{\beta_3}$

α_1,α_2 или $\alpha_3=1$

α_1,α_2 или $\alpha_3=15$

Выберем одно из чисел 3 и зададим параметры:

$a=3^1\cdot5^{\cdots}$

Черновик

два меж равны 2
одно равно 1

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\begin{cases}\frac{x}{3}+3>0\\ 6x-14>0\\ x-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x+9>0\\ x>\frac{14}{6}\\ x>1\end{cases}$ $\begin{cases}x>-9\\ x>\frac{14}{6}\\ x>1\end{cases}$

$x>-9$

$\log_a b=1$
$a=b=c$

$2\log_b c=2$
$\log_b c=2$
$b=c$

$2\log_b c=1$
$\log_b c=\frac{1}{2}$
$\sqrt{b}=c$
$\log_c b=2$
$b=a^2$
$\sqrt{b}=a$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3}=a$ $6x-14=b$ $x-1=c$

$\log_a b$ $2\log_b c$ $2\log_c a$

2 из них равны, а третье меньше на

$\begin{cases}\log_a b=2\log_b c\\ \cancel{\log_a b-2\log_b a=1}\end{cases}$

4 4 3

M M M+1

X Y Z

$M\cdot M=(M+1)^2$

$M\cdot M+\cancel{2}M\cdot M+1=(M+1)^2$

$X=Y$
$X=Z+1$

$\log_a$

$\log_a b\cdot 2\log_b c\cdot 2\log_c a=\log_a b\cdot 2\log_b c\cdot\frac{2}{\log_a c}=$

$\frac{121}{5}=24,2$

$=\frac{\log_a b}{\log_a c}\cdot 4\cdot\log_b c=\log_c b\cdot 4\cdot\log_b c=$
$=4$

$XYZ=4$
$X\cdot X\cdot(X+1)=4$
$X^2(X+1)=4$
$X^3+X^2+4=0$

$\frac{x}{3}+3=1$
$\frac{x}{3}=-2$
$x=-6$

$x^2(x-1)=4$
$x^3-x^2-4=0$

$D=1-4\cdot2<0$

$(x-2)(x^2+x+2)$
$x^3+x^2+2x-2x^2-2x-4=x^3-x^2-4$

x^3+x^2-4 | $x+2$
x^3+2x^2 | x^2+x
$-x^2-4$

$6x-14=1$
$6x=15$ $x=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

21100588 (U309637 M1297286)

Черновик

$$\begin{cases} (a,b,c) = 15 = 3 \cdot 5 \\ [a,b,c] = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

$a, b, c = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

в НОКе наибольшие степени, поэтому $\alpha \le 15$ и $\beta \le 18$

в НОД наименьшие степень, поэтому одно из чисел $3^1 \ldots$ или $5^1 \ldots$

$A = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$ ~~$\alpha_1 \in [0;15]$ $\beta_1 \in [0;18]$~~ ~~a b c~~

~~B = 3~~

или

$a \le b \le c$

Total: 6

$\min a = 15$ (чтобы НОД = 15)

$\boxed{a = 15}$

$(a,b,c) \to (b,a,c)$

(c,a,b)

(c,b,a)

(a,c,b)

(b,c,a)

$a = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$

$b =$

~~$a = 3 \cdot 5^{?}$ $b = 3^{?} \cdot 5^{6}$ $c = 3^{4} \cdot 5$~~

$b = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$\alpha_1 \in [1; 15]$

$\beta_1 \in [1; 18]$

для b все $15 \cdot 18$ вариантов

кроме $\alpha_1 = \beta_1 = 1$

т.е. $15 \cdot 18 - 1$

если α_1 или $\beta_1 = 0$, то НОД $\ne 15$

$C = 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_1}$ $\alpha_2 \in [1;15] - (1)$

$\beta_2 \in [1;18] - (1)$

для c $14 \cdot 17$ вариантов

кроме $\alpha_1 = \beta_1 = 1$

$14 \cdot 17 - 1$

теперь найти дупликаты (a; 15; 15; 15) или (15; b; b)

нельзя

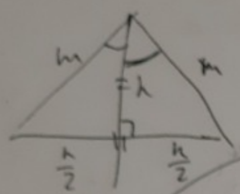
Черновик

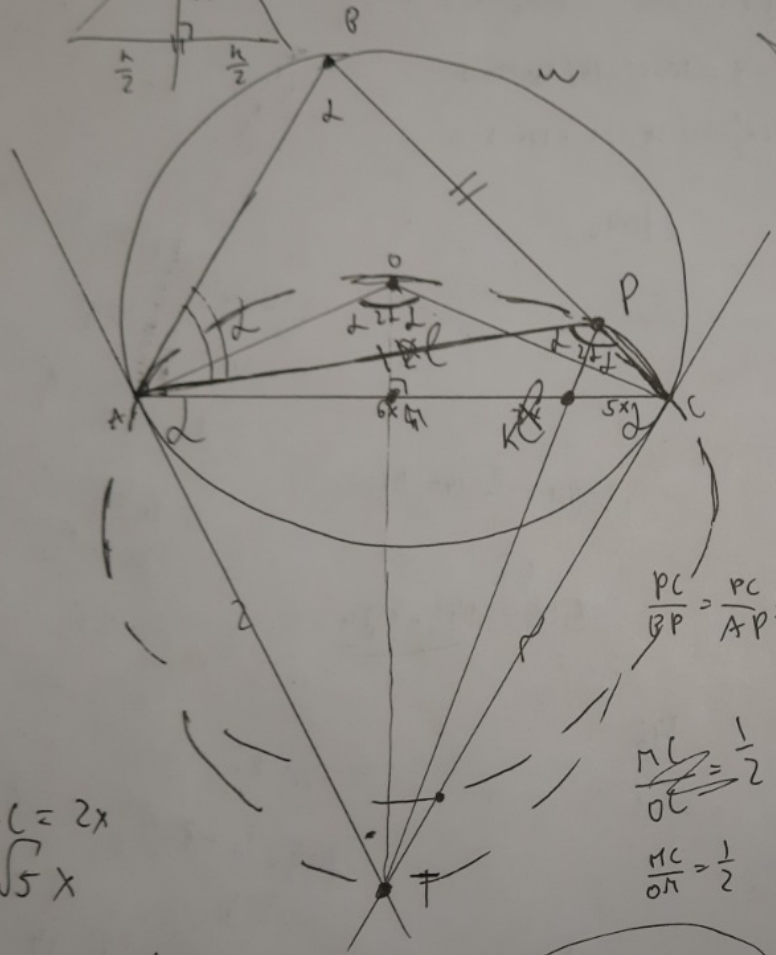
$S_{APK}=6$

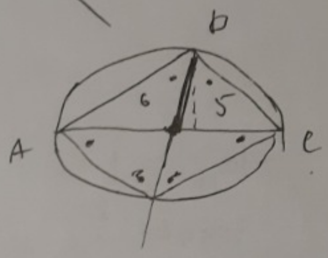
$S_{CPK}=5$ $\quad S_{ABC}$ - ?

$\cancel{AC}$

$\frac{h}{\sin\alpha}=2 \ldots h$







S через угол

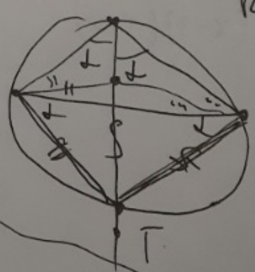
$\frac{PC}{BP}=\frac{PC}{AP}=\frac{5}{6}$

$9x^2+x^2=R^2$

$R^2=5x^2$

$\frac{MC}{OC}=\frac{1}{2}$

$\frac{MC}{OM}=\frac{1}{2}$



$AC=2x$

$R=\sqrt{5}\,x$

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$:

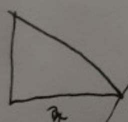
$\frac{PC}{BP}=\frac{5}{6}$

$\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$

$AC=2R\sin\alpha$

$\frac{2x}{\sin\alpha}=2\sqrt{5}\,x$

$2\sqrt{5}\,x=2x\sin\alpha$



а) $\frac{S_{APC}}{S_{APB}}=\frac{5}{6}$

$\frac{11}{S_{APB}}=\frac{5}{6}$

$5S_{APB}=66$

$S_{APB}=\frac{66}{5}=13\frac{1}{5}$

$13\frac{1}{5}+11=\boxed{24\frac{1}{5}}$

$66+55=$

$=\frac{121}{5}$ $11+13,2$

Черновик

$\log_a b$ $< \log_b c$ $2\log_c a$

~~$\log_a b =$~~ $2\log_b c$

$\log_a b =$

$2\log_b c = 1$

$\frac{x}{3}+3=36x^2-168x+196$

$x+9=108x^2-168\cdot 3x+196\cdot 3$

$108x^2-(168\cdot 3+1)x+196\cdot 3-9$

$2\log_b$

$2\log_b c = 2\log_c a$

$\log_a c = \log_c a$

$\log_a c = \pm 1$

$a = c$

$a = -c$

$b = c$

$2\log_b c = 1$

$\log_b c = \frac{1}{2}$

$c = \sqrt{b}$

$x-1=\sqrt{6x-14}$

$x^2-2x+1=6x-14$

$x^2-8x+15=0$

$+: 8$

$\cdot: 15$

$(x-3)(x-5)$

$D=(168\cdot 3)^2-144\cdot 196\cdot 3$

$504^2-\underline{144\cdot 579}$

196
$\times 3$
588

$x=3$:

$\log_a b = 2$

$a^2=b$

$\frac{x}{3}+3=6x-14 \quad |\cdot 3$

$x+9=18x-42$

$17x=51$

$x=3$

$\log_a b = 2$

$a^2=b$

$\log_x y = 2$

$y=x^2$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$2\log_c a = 2$

$\log_c a = 1$

$a = c$

$\log_a b = 2$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3}=x-1$

21100588 (U309637 M1297286)

Математика, 11 класс

Чистовик

N5. Ограничения:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{3}+3} > 0 \\ 6x-14>0 \\ x-1>0 \\ x-1 \neq 1 \\ 6x-14 \neq 1 \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3} \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} > -3 \\ 6x > 14 \\ x>1 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{5}{2} \\ \frac{x}{3}+3 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-9 \\ x > \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \\ x>1 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{5}{2} \\ x \neq -6 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$$

Пусть $\sqrt{\frac{x}{3}+3} = a$, $6x-14=b$, $x-1=c$. Тогда числа выглядят так: $\log_a b$, $\log_b c^2$, $\log_c a^2$, которые, с учетом $c>0$ и $a>0$ выглядят так: $\log_a b$, $2\log_b c$, $2\log_c a$

На ОДЗ произведение данных чисел равно $\log_a b \cdot 2\log_b c \cdot 2\log_c a =$

$= \log_a b \cdot 2\log_b c \cdot \frac{2}{\log_a c} = \frac{\log_a b}{\log_a c} \cdot 4\log_b c = \log_c b \cdot 4 \cdot \log_b c = 4$

Обозначим числа, которые равны, за m, тогда третье число равно $m-1$. Их произведение равно 4, т.е.

1

$m \cdot m \cdot (m-1) = 4$

$m^3 - m^2 - 4 = 0$

Заметим, что $m=2$ — подходит. Тогда, по т. Безу, данный многочлен раскладывается на скобки следующим образом

Математика, 11 класс

Черновик

$(m-2)(m^2+m+2)=0$

$m^2+m+2=0$ не имеет решений, т.к. $D=1-4\cdot 2<0$

Т.е. $m=2$ - единственное решение.

Значит два числа равны 2, а третье - 1 (равно 1)

Рассмотрим 3 случая:

1) $\log_a b=1 \Leftrightarrow a=b$

~~Тогда $2\log_b c=2\log_a c \Leftrightarrow \log_b c=\log_a c$~~

$\sqrt{\frac{x}{3}+3}=6x-14$

$\begin{cases} \frac{x}{3}+3=36x^2-168x+196 \\ 6x-14\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 36x^2-(168\cdot 3+1)x+196\cdot 3-9=0 \\ x\geq \frac{7}{3} \end{cases}$

$D<0$ у первого уравнения системы, решений нет

2) $2\log_b c=1$

$\log_b c=\frac{1}{2}$

$c=\sqrt{b}$

$x-1=\sqrt{6x-14}$

$\begin{cases} x^2-2x+1=6x-14 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-8x+15=0 \\ x\geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x=3$ и $x=5$

Однако под $\log_a b=2 \Leftrightarrow b=a^2$ и $\log_c a=\frac{2}{2}=1$ оба значения подходят под ОДЗ

$\frac{x}{3}+3=6x-14$ подходит только

$\boxed{x=3}$

2

Математика, 11 класс

Чистовик

3) $2\log_c a = 1$

$\log_c a = \frac{1}{2}$

$a = \sqrt{c}$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3} = \sqrt{x-1}$

На ОДЗ равенство равносильно:

$\frac{x}{3}+3 = x-1$

$x+9 = 3x-3$

$2x = 12$

$x = 6$, подходит под ОДЗ. Однако $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$

$6x-14 = \frac{x}{3}+3 \Rightarrow x = 3$,

т.е. $x = 6$ - не подходит

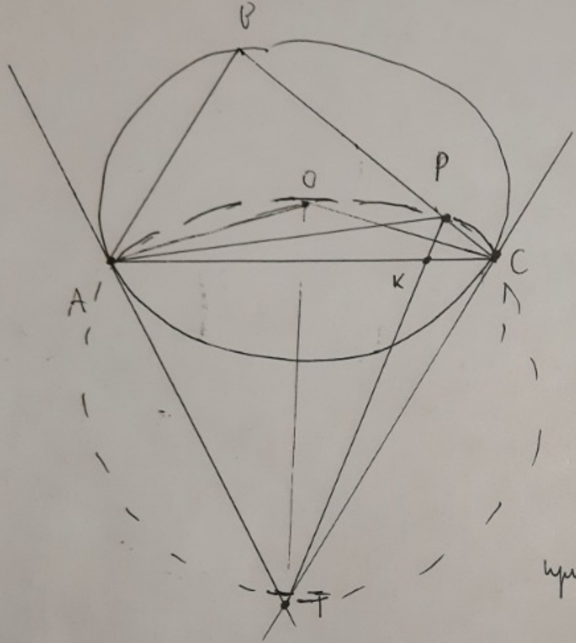
Ответ: $x = 3$

3

Математика, 11 класс

Чистовик

№6.



а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (как центральный), $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ (как опирающиеся на одну дугу в окр., описанной около AOC).

Проведем отрезок OT, тогда $\angle AOT = \angle COT = \alpha$ (например из равенства $\triangle AOT$ и $\triangle COT$). $\angle CAT = \angle ABC = \alpha$ (угол между хордой и касательной). Т.е. $\angle CAT = \angle COT$, а значит $COAT$ – вписанный, причем точка T лежит на описанной около $\triangle AOC$ окружности. Но тогда $\angle TPC = \angle CAT = \alpha$, а т.к. $\angle APC = 2\alpha$, то $\angle TPC = \angle TPA = \alpha$, т.е. TP – бис-са $\angle APC$.

$\cancel{\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}}$ $\Rightarrow$ $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{5}$ (т.к. $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту), тогда по свойству биссектрисы $\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$. Заметим, что $\angle PAB + \angle ABP = \angle APC \Rightarrow \angle PAB = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow AP = BP$, т.е. $\frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$.

$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{6}{5}$ ($\triangle ABP$ и $\triangle APC$ имеют общую высоту)

4

Чистовик

Т.к. $S_{\Delta APC} = S_{\Delta APK} + S_{\Delta PKC} = 6+5=11$, то $S_{\Delta APB} = \frac{6\cdot 11}{5} = \frac{66}{5}$

Тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta APC} + S_{\Delta APB} = 11 + \frac{66}{5} = 24,2$

Ответ: а) $S_{\Delta ABC} = 24,2$