Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100533**

ID профиля: **849053**

Вариант 18

Чистовик

Итак, $0<d<2$ и d – целое, $\Rightarrow d=1$.

Подставим $d=1$:

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11)>7a_1+21+20\\(a_1+8)(a_1+9)<7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+17a_1+66>7a_1+21+20\\a_1^2+17a_1+72<7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$a_1^2+10a_1+7=0$

$D=100-4\cdot7=72=(6\sqrt{2})^2$

$a_1=\dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2}=-5+3\sqrt{2}$

$a_2=-5-3\sqrt{2}$

$$\begin{cases}(a_1+5)^2>0\\(a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0\end{cases}$$

$(a_1+5)^2>0$

-5, $a_1\in(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$

$(a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0$

$-5-3\sqrt{2}$, $-5+3\sqrt{2}$, $a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2})$

$4<3\sqrt{2}<5$, $\Rightarrow$ $\begin{cases}-5-3\sqrt{2}<-5-4\\-5+3\sqrt{2}>-5+4\end{cases}$

$$\begin{cases}-5-3\sqrt{2}<-9\\-5+3\sqrt{2}>-1\end{cases}$$

Значит, т.к. a_1 – целое, то $a_1\in\{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$

Ответ: $a_1\in\{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$

Черновик

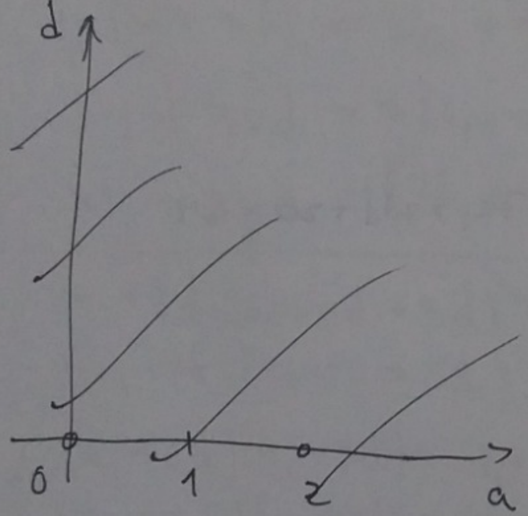
$$\begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2 > 7a_1+21d+20 \\ a_1^2+17a_1d+72d^2 < 7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$a_1^2 > 7a_1+20$

$$\begin{cases} a_1^2-7a_1-20 > 21d-66d^2-17a_1d \\ a_1^2-7a_1-44+6d^2 < 21d-66d^2-17a_1d \end{cases}$$

$d\in(-2;2)$, а т.к. прогрессия возр., то $d>0$, $\Rightarrow d\in(0;2)$

a_1



2

21100533 (U849053 M1302478)

Черновик

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ a_8 a_{10} < S+44 \end{cases}$$

$$S = 7a_1 + 21d = 7(a_1+3d) = 7a_4$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+8d+3d) > 7(a_1+3d)+20 \\ (a_1+8d)(a_1+6d+3d) < 7(a_1+3d)+44 \end{cases}$$

$a_1+6d = x$

$a_1+8d = y$

$$\begin{cases} x(y+3d) > 7(a_1+3d)+20 \\ y(x+3d) < 7(a_1+3d)+44 \end{cases}$$

$xy+3xd > 7(a_1+3d)+20$

$xy+3yd < 7(a_1+3d)+44$

$44-3yd > 20-3xd$

$44-20 > 3d(y-x)$

$24 > 3d(2d)$

$24 > 6d^2,\ d^2 < 4$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+8d+3d) > 7(a_1+3d)+20 \\ (a_1+8d)(a_1+6d+3d) < 7(a_1+3d)+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+3d) + (a_1+6d)8d > 7(a_1+3d)+20 \\ (a_1+8d)(a_1+3d) + (a_1+8d)6d < 7(a_1+3d)+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3d)(a_1+6d-7) > 20 - 8a_1d - 48d^2 \\ (a_1+3d)(a_1+8d-7) < 44 - 6a_1d - 48d^2 \end{cases}$$

3

21100533 (U849053 M1302478)

Черновик

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20\\ (a_1+6d+2d)(a_1+11d-2d) < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20\\ (a_1+6d)(a_1+11d)+2d(a_1+11d)-2d(a_1+6d)-4d^2 < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20\\ (a_1+6d)(a_1+11d)+2a_1d+22d^2-2a_1d-12d^2-4d^2 < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$$(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20$$

$$(a_1+6d)(a_1+11d) + 6d^2 < 7a_1+21d+44$$

$$\begin{cases}a_7(a_7+5d) > 7a_7-21d+20\\ (a_7+2d)(a_7+3d) < 7a_7-21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_7^2+5a_7d > 7a_7-21d+20\\ a_7^2+5a_7d+6d^2 < 7a_7-21d+44\end{cases}$$

$d=1$

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11) > 7a_1+21+20\\ (a_1+9)(a_1+8) < 7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+41\\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+65\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_1+5)^2>0, \Rightarrow a_1 \neq -5\\ (a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0\end{cases}$$

$D = 100-4\cdot 7 = 100-28 = 72 = 6\sqrt{2}$

$a_1 = \dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

$a_2 = -5-3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

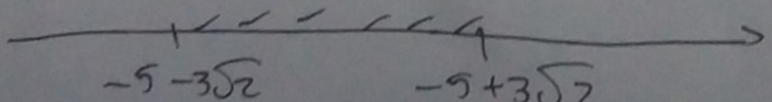
$4 < \sqrt{18} < 5$

$-5-3\sqrt{2} < -5-4$

$-5-3\sqrt{2} < -9$

$-5+3\sqrt{2} > -5+4$

$-5+3\sqrt{2} > -1$



4

$-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

Черновик

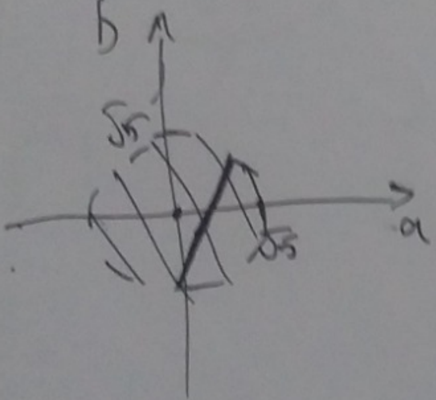
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 \\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$, $R=\sqrt5$, $O(a,b)$ - центр.

Если $4a-2b\ge 5$, то $\min(4a-2b,5)=5$

$$\left[\begin{array}{l}a^2+b^2\le 4a-2b \\ a^2+b^2\le 5\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}a^2-4a\le -b^2-2b \\ a^2+b^2\le 5\end{array}\right.$$

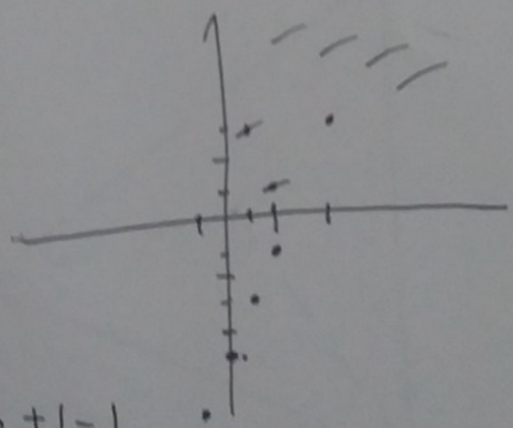
$$\left[\begin{array}{l}a(a-4)\le -b(b+2) \\ a^2+b^2\le 5\end{array}\right.$$ - $4a-2b<5$

— $4a-2b\ge 5$



$2b>4a-5$

$b>\frac{4a-5}{2}$



$a^2+b^2\le 4a-2b$

$a^2-4a+4-4\le -b^2-2b+1-1$

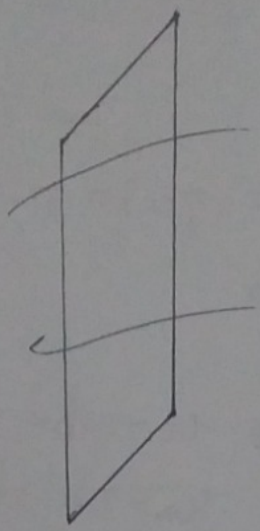
$(a-2)^2-4\le -(b+1)^2+1$

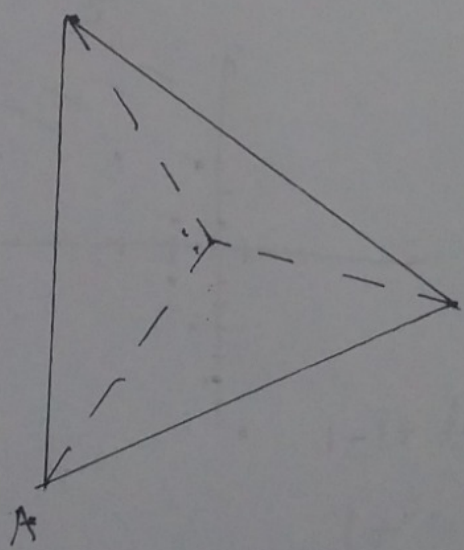
$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$, минимальное значение при

$a=2$, $b=-1$

5

Черновик





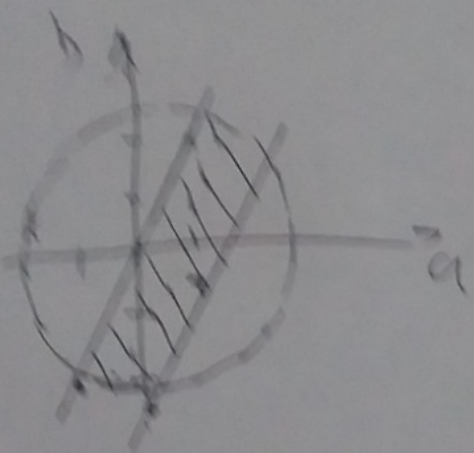
6

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

$4a-2b\ge 0$

$2a\ge b$



$b=2a$

$b=\frac{4a-5}{2}=2a-2{,}5$

$2a=\frac{4a-5}{2}$

$4a=4a-5$

7

7

21100533 (U849053 M1302478)

Чистовик

№ 1.

Т.к. S – сумма первых 7 членов арифметической прогрессии, то $S = 7(a_1 + 3d)$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_9 a_{10} < S + 44 \end{cases}$$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

Получаем:

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7(a_1 + 3d) + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7(a_1 + 3d) + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1d + 6a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 9a_1d + 8a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 - 7a_1 - 21d > 20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 + 6d^2 - 7a_1 - 21d < 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 - 7a_1 - 21d > 20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 - 7a_1 - 21d < 44 - 6d^2 \end{cases}$$

Имеем, $20 < a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 - 7a_1 - 21d < 44 - 6d^2$

Значит, $20 < 44 - 6d^2$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$, $\Rightarrow$ $-2 < d < 2$

Но т.к. последовательность возрастающая, то $d > 0$, $\Rightarrow$ $0 < d < 2$.

Также по условию, последовательность состоит из целых чисел, $\Rightarrow$ d – целое.

Чистовик

Итак, $0<d<2$ и d – целое, $\Rightarrow d=1$.

Подставим $d=1$:

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11) > 7a_1+21+20\\ (a_1+8)(a_1+9) < 7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+21+20\\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$a_1^2+10a_1+7=0$

$D=100-4\cdot 7=72=(6\sqrt{2})^2$

$a_1=\dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2}=-5+3\sqrt{2}$

$a_2=-5-3\sqrt{2}$

$$\begin{cases}(a_1+5)^2>0\\ (a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0\end{cases}$$

$(a_1+5)^2>0$

-5, $a_1\in(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$

$(a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0$

$-5-3\sqrt{2}$ $\quad$ $-5+3\sqrt{2}$, $a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2})$

$4<3\sqrt{2}<5$, $\Rightarrow$ $\begin{cases}-5-3\sqrt{2}<-5-4\\ -5+3\sqrt{2}>-5+4\end{cases}$

$$\begin{cases}-5-3\sqrt{2}<-9\\ -5+3\sqrt{2}>-1\end{cases}$$

Значит, т.к. a_1 – целое, то $a_1\in\{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$

Ответ: $a_1\in\{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100533**

ID профиля: **849053**

Вариант 18

Чистовик
№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Т.к. $НОД(a,b,c)=15$, то есть множители 3^1 и 5^1
Т.к. $НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18}$, то есть множители 3^{15} и 5

Степени тройки: $3^1, 3^{15}, 3^{k_3}$
Из курса комбинаторики понимаем, что количество различных расположений $-3\cdot2\cdot1=6$
$k_3\in[1;15]$
Если $k_3=1$, то вариантов $\frac{3\cdot2\cdot1}{2}=3$, т.к., например, варианты $3^1, 3^{k_3}, 3^{15}$ и $3^{k_3}, 3^1, 3^{15}$ при $k_3=1$ считаются одинаковыми.
Аналогично, если $k_3=15$, то вариантов -3.
Если $k_3\in[2;14]$, то вариантов $-13\cdot6=78$
Всего $-78+3+3=84$
Степени пятёрки $-5^1, 5^{18}, 5^{k_5}$
Аналогично: при $k_5=1$, вариантов -3
при $k_5=18$, вариантов -3
при $k_5\in[2;17]$, вариантов $-16\cdot6=96$
Всего $-96+3+3=102$
Итого получаем, что количество различных троек (a,b,c) $-102\cdot84=8568$

$$\begin{array}{r} \times\,84 \\ 102 \\ \hline 168 \\ 84 \\ \hline 8568 \end{array}$$

Ответ: 8568

1

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$, $2\log_{6x-14}|x-1|$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

О.Д.З.

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-9 \\ x\neq -6 \\ x>\frac{14}{6} \\ x\neq \frac{15}{6} \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

Из О.Д.З. следует, что $|x-1|=x-1$

Пусть $\frac{x}{3}+3=a$, $6x-14=b$, $x-1=c$:

$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$

Рассмотрим все случаи, когда два числа равны, а третье меньше их на 1:

1) $$\begin{cases} 2\log_a b = 2\log_b c \\ 2\log_a b - 1 = \log_c a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b} \\ 2\log_a b - 1 = \log_c a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a^2 b = \log_a c \\ 2\log_a b - 1 = \frac{1}{\log_a c} \end{cases}$$

2

Чистовик

Подставляем

$2\log_a b - 1 = \frac{1}{\log_a^2 b}$

Пусть $\log_a b = t$:

$2t - 1 = \frac{1}{t^2}$

$2t^3 - t^2 - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - t^2 - 1 & t-1 \\ \underline{-\,2t^3 - 2t^2} & \overline{2t^2 + t + 1} \\ t^2 - 1 & \\ \underline{-\,t^2 - t} & \\ t - 1 & \\ \underline{-\,t - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$(t-1)(2t^2+t+1) = 0$

$2t^2 + t + 1 > 0$ при всех t, $\Rightarrow t = 1$

Обратная замена:

$\log_a b = 1$

$a = b$

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14 \,/\cdot 3$

$3x + 9 = 18x - 42$

$17x = 51$

$x = 3$

Аналогично для 2 и 3 случаи:

2) $\begin{cases} 2\log_a b = \log_c a \\ 2\log_a b - 1 = 2\log_b c \end{cases}$

$2\log_a b = \frac{1}{(\log_a b - \frac{1}{2})\log_a b}$

Пусть $\log_a b = t$:

$2t = \frac{1}{t^2 - \frac{1}{2}t}$

3

$2t^3 - t^2 - 1 = 0$ [illegible]

$t = 1$

[illegible] $= 9 = 64 = 14$

$x = 3$

3) $\begin{cases} 2\log_a c = \log_c a \\ 2\log_a c - 1 = 2\log_a b \end{cases}$

$2\log_a c - 1 = \frac{2}{2\log_a^2 c}$

Пусть $\log_a c = t$:

$2t^3 - t^2 - 1 = 0$

$t = 1$

$x = 3$

Ответ: 3

4

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18}=3^{15}\cdot 5^{15}\cdot 5^{3}=3^{15}\cdot 5^{15}\cdot 125 \end{cases}$$

Т.к. $НОД(a,b,c)=15$, то числа a, b и c можно представить в виде $C_a\cdot 3^{k_a}\cdot 5^{k_a}$ $C_b\cdot 3^{k_b}\cdot 5^{k_b}$ $C_c\cdot 3^{k_c}\cdot 5^{k_c}$

~~Если (a,b,c) — взаимно простые~~

$$\begin{cases} k_a+k_b+k_c=15 \\ C_a\cdot C_b\cdot C_c=125 \end{cases}$$

1, 5, 25, 125

$5\cdot 5\cdot 5 \times 1$

$1\cdot 25\cdot 5 \times 6$

$1\cdot 1\cdot 125 \times 3$

$72 \times \cancel{18}$ ~~216~~

720

1 0 0 15

1 1 13

1 2 12

1 7 7

~~13 7 7~~

~~$k_a \in [0;15]$~~

~~$k_b \in [0;$~~

0 – 8 0,1,2,3,4,5,6,7 15,14,13,12,11,10,9,8

1 – 8

2 – 7 0,1,2,3,4,5,6 17,12,11,10,9,8,7

3 – 7

4 – 6 0,1,2,3,4,5 11,10,9,8,7,6

5 – 5 0,1,2,3,4

6 – 5

7 – 5

8 – 4

9 – 4

10 – 3

11 – 3

12 – 2

13 – 2

14 – 1

15 – 1

16 + 14 = 30

+12 +10 = 22

+8 +6 = 14

+4 +2 = 6

= 52

= 72

= 20

1

Черновик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

1) $\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) - 1 = \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) \end{cases}$

$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$

1) $\begin{cases} 2\log_a b = 2\log_b c \\ 2\log_a b - 1 = \log_c a \end{cases}$ $\begin{cases} \log_a b = \frac{1}{\log_c b} \\ \log_a b = \frac{\log_c a + 1}{2} \end{cases}$

О.Д.З.

$\frac{x}{3} + 3 > 0$

$\frac{x}{3} > -3$

$x > -9$

$\frac{x}{3} + 3 \neq 1$

$\frac{x}{3} \neq -2$

$x \neq -6$

$x > \frac{14}{6}$

$6x \neq 17$

$x \neq \frac{15}{6}$

$x > 1$

$x \neq 2$

2

Черновик

$S_{APH} = 6 = \frac{1}{2} PH \cdot AK$

$S_{CPH} = 5 = \frac{1}{2} PH \cdot CK$

$2t - 1 = \frac{1}{t^2}$

$t^2(2t-1) = 1$

$2t^3 - t^2 - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - t^2 - 1 & t - 1 \\ \cline{2-2} -\,2t^3 - 2t^2 & 2t^2 + t + 1 \\ \cline{1-1} t^2 - 1 & \\ -\,t^2 - t & \\ \cline{1-1} t - 1 & \end{array}$$

$(t-1)(2t^2+t+1) = 0$

$t = 1$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1$

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$

$x + 9 = 18x - 42$

$51 = 17x$

$x = 3$

3

Черновик

$$\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - 1 = 2\log_{6x-14}(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \dfrac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)} \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - 1 = 2\cdot\dfrac{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)} \end{cases}$$

$$\left(\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - \frac{1}{2}\right)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$$

$$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{1}{\left(\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - \frac{1}{2}\right)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}$$

$$2t = \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)t}$$

$$2t^2\left(t-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$2t^3 - t^2 - 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$\frac{x}{3}+3 = 6x-14$$

$$x+9 = 18x-42$$

$$51 = 17x$$

$$x = 3$$

4

Черновик

$$\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-1=2\log_{6x-14}(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\dfrac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)} \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-1=2\cdot\dfrac{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)} \end{cases}$$

$$\left(\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$$

$$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\frac{1}{\left(\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}$$

$$2t=\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)t}$$

$$2t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)=1$$

$$2t^3-t^2-1=0$$

$$t=1$$

$$\frac{x}{3}+3=6x-14$$

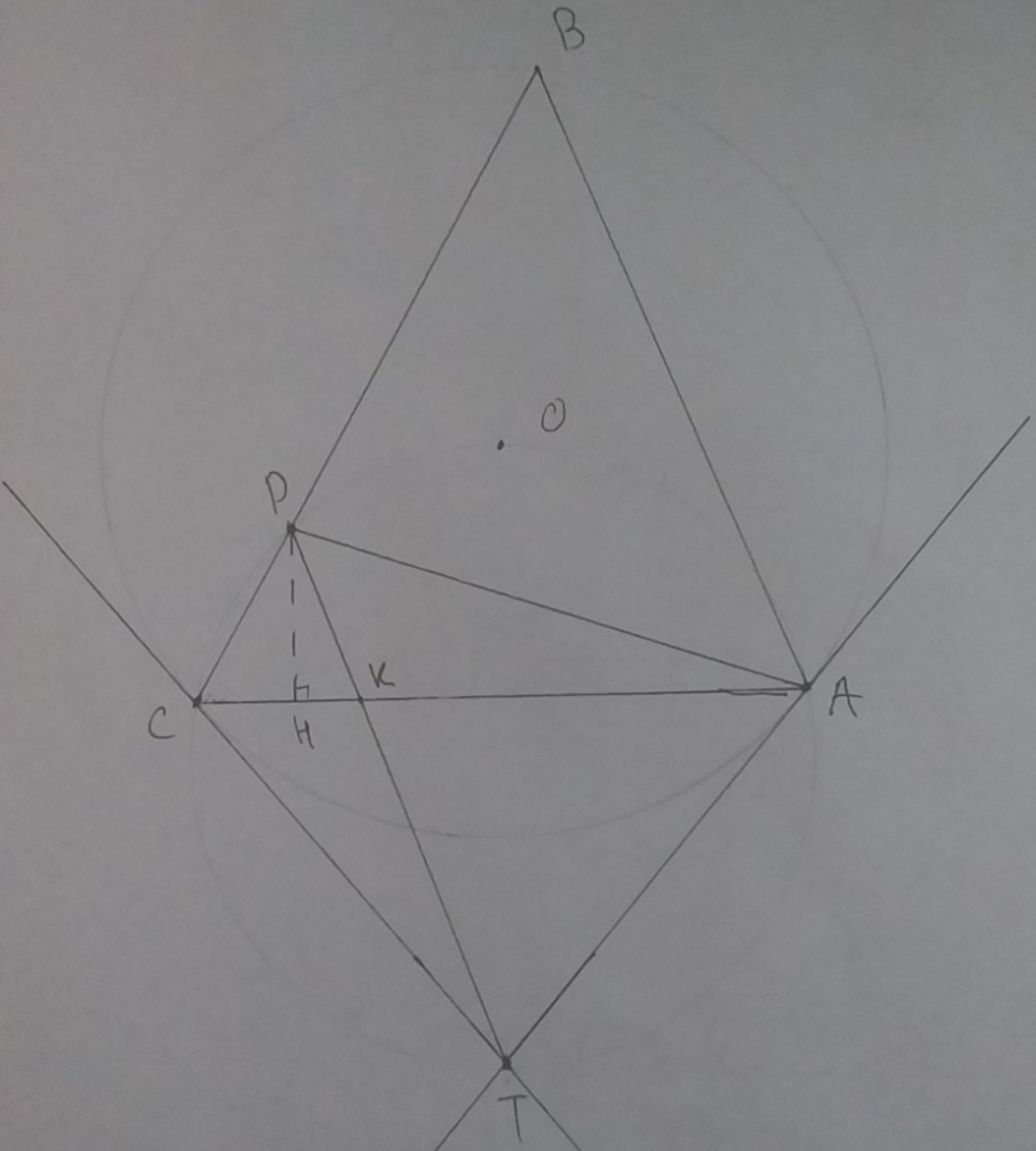
$$x+9=18x-42$$

$$51=17x$$

$$x=3$$

4

Черновик



5

21100533 (U849053 M1302479)

Черновик

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$, $2\log_{6x-14}(x-1)$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1) \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - 1 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \end{cases}$$

$$\log_2 4 = \frac{1}{\log_{16} 4}$$

$$\log_3 9 = \frac{1}{\log_{81} 9}$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)}$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3^{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}}(6x-14)}$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}$$

$$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$x = \frac{y}{x}$$

$$x^2 = y$$

$$\underbrace{\log^2_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)} = \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - 1 = \frac{1}{\underbrace{\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(x-1)}}$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) - 1 = \frac{1}{\log^2_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}$$

6

21100533 (U849053 M1302479)

Черновик

$$\begin{cases} 2\log_{6x-14}(x-1)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \\ 2\log_{6x-14}(x-1)-1=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) \end{cases}$$

$$2\log_{6x-14}(x-1)=\frac{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_{6x-14}(x-1)}$$

$$2\log^2_{6x-14}(x-1)=\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$2\log_{6x-14}(x-1)-1=\frac{2}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}$$

$$2t-1=\frac{2}{2t^2}$$

$2t^2(2t-1)=2$

$4t^3-2t^2-2=0$

$2t^3-t^2-1=0$

$t=1$

$6x-14=x-1$

$5x=15$

$x=3$

Ответ: 3.

7

Черновик

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$

Т.к. $НОД(a,b,c)=15$, то в a, b и c есть множитель 15

Т.к. $НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot5^{18}$, то есть множитель $3^{15}\cdot5^{18}$

Степени тройки — 3^1, 3^{15}, 3^{k_3}

Вариантов расположения — $3\cdot2\cdot1=6$

$k_3\in[1;15]$

Если $k_3=1$, $k_3=15$, то вариантов $\frac{3\cdot2\cdot1}{2}=3$, т.к.

Например варианты $3^1, 3^{k_3}, 3^{15}$ и $3^{k_3}, 3^1, 3^{15}$ при $k_3=1$ одинаковые.

Если $k_3\in[2;14]$, то вариантов $13\cdot6=78$

Итого — $78+3+3=84$

~~Итого~~

Степени пятёрки — 5^1, 5^{18}, 5^{k_5}

Вариантов — 6

~~k_5~~ $k_5[1;18]$

Если $k_5=1$ или $k_5=18$, то вариантов $\frac{3\cdot2\cdot1}{2}=3$

Если $k_5\in[2;17]$, то вариантов $16\cdot6=96$

$$\begin{array}{r} \times\ 16 \\ 6 \\ \hline 96 \end{array}$$

Итого — $96+3+3=102$

$$\begin{array}{r} \times\ 84 \\ 102 \\ \hline 168 \\ 84\ \ \ \\ \hline 8568 \end{array}$$

Всего пар — $102\cdot84=8568$

8

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Т.к. НОД$(a,b,c)=15$, то в a, b и c есть множитель 15

Т.к. НОК$(a,b,c)=$ ~~15~~ $3^{15}\cdot 5^{18}$, то есть множитель $3^{15}\cdot 5^{18}$

Степени тройки — 3^1, 3^{15}, 3^{k_3}

Вариантов расположения — $3\cdot 2\cdot 1=6$

$k_3 \in [1;15]$

Если $k_3=1$, $k_3=15$, то вариантов $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}=3$, т.к.

Например варианты $3^1, 3^{k_3}, 3^{15}$ и $3^{k_3}, 3^1, 3^{15}$ при $k_3=1$ одинаковые.

Если $k_3 \in [2;14]$, то вариантов $13\cdot 6=78$

Итого — $78+3+3=84$

~~Итого~~

Степени пятёрки — 5^1, 5^{18}, 5^{k_5}

Вариантов — 6

~~k_5~~ $k_5 [1;18]$

Если $k_5=1$ или $k_5=18$, то вариантов $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}=3$

Если $k_5 \in [2;17]$, то вариантов $16\cdot 6=96$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 6 \\ \hline 96 \end{array}$$

Итого — $96+3+3=102$

Всего пар — $102\cdot 84=8568$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times\ 102 \\ \hline 168 \\ 84 \\ \hline 8568 \end{array}$$

8

~~[illegible]~~

№4.

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 15 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Т.к. $НОД(a,b,c)=15$, то есть множители 3^1 и 5^1

Т.к. $НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18}$, то есть множители 3^{15} и 5^{18}

Степени тройки — 3^1, 3^{15}, 3^{k_3}

$k_3 \in [1;15]$

Если $k_3=1$, то вариантов $\frac{3\cdot2\cdot1}{2}=3$, т.к., например, варианты $3^1, 3^{k_3}, 3^{15}$ и $3^{k_3}, 3^1, 3^{15}$ при $k_3=1$, считаются одинаковыми.

Аналогично, при $k_3=15$, вариантов — $\frac{3\cdot2\cdot1}{2}=3$

Если $k_3\in[2;14]$, то вариантов — ~~13 · 6 = 78~~ $13(3\cdot2\cdot1)=78$

~~[illegible]~~ Всего — $78+3+3=84$

Степени пятёрки — 5^1, 5^{18}, 5^{k_5}

Аналогично, при $k_5=1$ или $k_5=18$, вариантов 3.

при $k_5\in[2;17]$ вариантов $16\cdot(3\cdot2\cdot1)=$ ~~[illegible]~~ 96

Всего — $96+3+3=102$

Итого получаем: $102\cdot84=8568$

~~то~~

Ответ: 8568

9