Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100522**

ID профиля: **833228**

Вариант 18

№1

Шставицк (1)

Пусть $a_1 = x$

разность последов $= d$

$$S = \frac{(2x+6d)\cdot 7}{2} = 7x + 3{,}5d$$

$$\begin{cases}(x+6d)(x+11d) > 7x+3{,}5d+20\\(x+8d)(x+5d) < 7x+3{,}5d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}66d^2+17dx+x^2 > 7x+3{,}5d+20\\72d^2+17dx+x^2 < 7x+3{,}5d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+(17d-7)x+66d^2-3{,}5d-20>0\\x^2+(17d-7)x+72d^2-3{,}5d-44<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+(17d-7)x+72d^2-3{,}5d-44<0\\-x^2-(17d-7)x-66d^2+3{,}5d+20<0\end{cases} \oplus$$

~~сложим отрицат. числа~~

$$6d^2-24<0$$

$$d^2-4<0$$

$$\begin{cases}d<2\\d>-2\end{cases}$$, т. к. последов возр $d>0$, значит единственное целое d, которое может подойти $= 1$ (последов из целых) подставим:

$$\begin{cases}x^2+10x+72-3{,}5-44<0\\x^2+10x+66-3{,}5-20>0\end{cases} \quad \begin{cases}2x^2+20x+49<0 \; *\\2x^2+20x+85>0 \; **\end{cases}$$

$* \; D = 400-4\cdot 2\cdot 49 = 4(100-2\cdot 49) = 8$ $\quad 4\cdot 2=8$

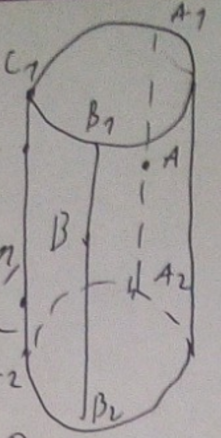
$** \; D = 400-4\cdot 2\cdot 85 = 4(100-2\cdot 85)<0$, значит при любых x больше 0.

$$\begin{cases}x<\frac{2\sqrt{2}-10}{2}\\x>\frac{-2\sqrt{2}-10}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}x<\frac{\sqrt{2}}{2}-5\\x>-\frac{\sqrt{2}}{2}-5\end{cases}$$ целое x, удовлетвор. системе $= -5$

Ответ: -5

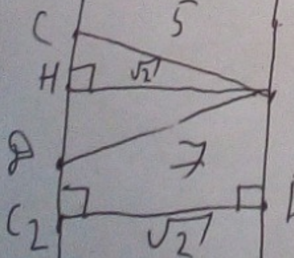
21100522 (U833228.M1296255)

Чистовик ②

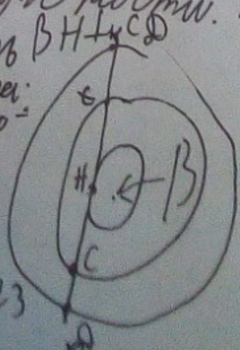


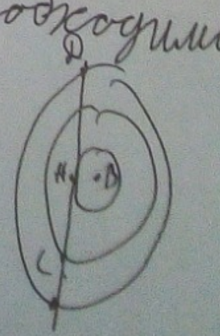
Так как $CA = CB = 5$ и $AD = BD = 7$ множество точек, где может лежать A и B — пересечение цилиндра и сфер с центрами в точках C и D и радиусами 5 и 7 соответственно. т.к. плоскость пересечения сфер перпендикулярна прямой, содержащей их основания $AB \perp CD \Rightarrow AB$ параллельно плоскости основания цилиндра. $\Rightarrow B_1A_1 = B_2A_2 = AB = 2$ (где A_1B_1 и B_2A_2 проекции A и B на верхнее и нижнее основания соответственно.) Пусть C_1 — проекция C и D на верхнюю грань.) ~~Тогда~~ $\cancel{(BB_1C_1): C_1+}$ Очевидно, что $C_1B_1 = C_1A_1$ (т.к. $AB \parallel (C_1A_1B_1)$) по об. т. синусов радиус цилиндра $R = \frac{A_1B_1}{2\sin\angle B_1C_1A_1} = \frac{1}{\sin\angle B_1C_1A_1}$. Очевидно, что минимум R он принимает при $\max(\sin\angle B_1C_1A_1)$, то есть при $\angle B_1C_1A_1 = 90°$, тогда $C_1B_1 = C_1A_1 = \sqrt{2}$, аналогично $C_2B_2 = C_2A_2 = \sqrt{2}$, где C_2 — проекция C и D на нижнее основ.

(DB):



(очевидно, что $CD \parallel BB_2$ (обе $\perp C_2A_2B_2$), поэтому же $C_2B_2 \perp (D)$) В таком случае задача ~~...~~ равносильна следующей: из B проведены 3 окружности радиусов $5, 7, \sqrt{2}$, на первых 2 выбраны по точке C и D соотв., так что CD касается 3 окружности. необходимо найти все возможные CD. Пусть $BH \perp CD$. Очевидно есть всего 2 варианта: C и D лежат либо по одну сторону от BH либо по разные.





В любом случае $HD = 45 - 2 = 47$ т. Пиф. для ΔBHD. $HC^2 = 25 - 2 = 23$ т. Пиф. для ΔBHC.

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

Чистовик (3)

Удобно $a^2+b^2\le$ min от a^2+b^2 расстояния каждого №3

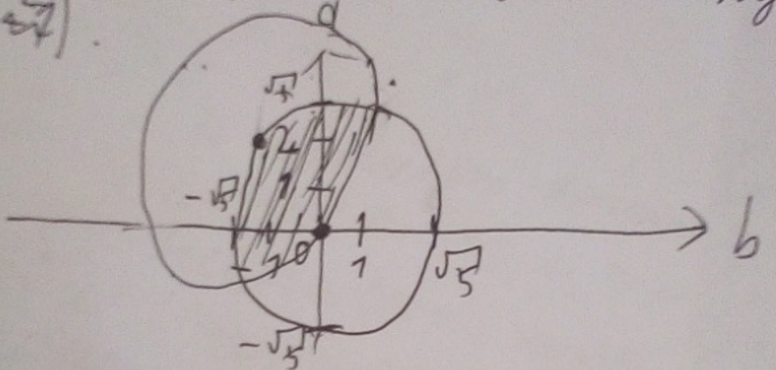
$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5\end{cases}$$

(в системе ab)

множество точек, координаты которых удовлетв. системе

Значит ~~систем~~ пересечение ~~окружностей~~ кругов, радиус которых равен $\sqrt{5}$, а центры находятся в точках с координатами $(x; y)$; $(0; 0)$; $(2; -1)$.



Заметим, что центры 2 и 3 окружностей лежат на 3 и 2 окружности соответственно (расстояние от точки $(2; -1)$ до $(0; 0)$ равно $\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$). Искомые x и y — точки, расстояние от которых до заштрих. области меньше либо равно $\sqrt{5}$

~~Пусть 2 и 3 окр~~ ~~Пересеч 2 и 3 окружн:~~

~~$\begin{cases}a^2+b^2=5\\(a-2)^2+(b+1)^2=5\end{cases}$~~ ~~$\begin{cases}a^2+b^2=5\\-4(a+1)+2(b+1)=0\end{cases}$~~ ~~$\begin{cases}a^2+b^2=5\\b=2a+1,5\end{cases}$~~ ~~$\begin{cases}a^2+4a^2+6a...\\b=2a+1,5\end{cases}$~~

~~$\begin{cases}5a^2+6a-3,5=0\\b=2a+1,5\end{cases}$~~ ~~$\begin{cases}10a^2+12a-7=0*\\b=2a+1,5\end{cases}$~~

Пусть пересеч 2 и 3 окружн: M и N

~~$*\ D=144+40\cdot 7=144+2\cdot 10=354$~~

множество $(x; y)$ — объединение множества точек:

1 окружности

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100522**

ID профиля: **833228**

Вариант 18

наим. общее кратное.

Черновик

$15 \cdot x = a$

$15 \cdot y = b$

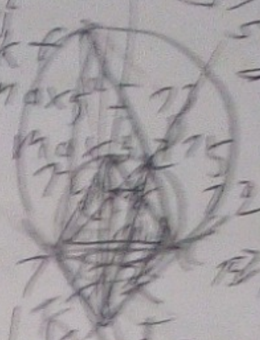
$15 \cdot z = c$

$x + 12$

$x + z$

$\frac{x}{3} + 3 = (x-1)$

$\log_b a = 2\log_b 15$



$= a \cdot n$

$= b \cdot k^2$

$= c \cdot f^2$

11 15

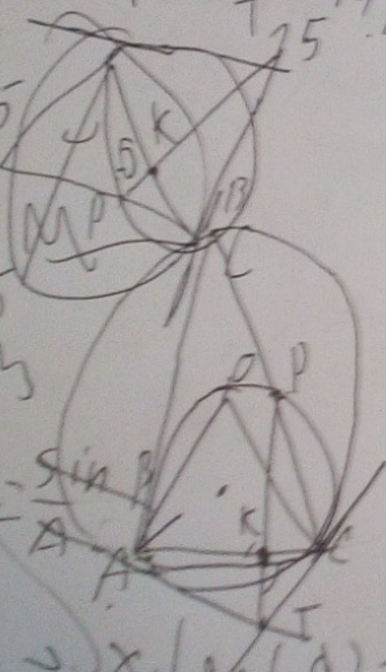
1 15 1

1 15 15

15 15 1

15 1 1

15 15 15



$15^{14} \cdot \frac{3}{9} = nx = bk = f^2$

$3d = x + 9$

$b = x - 1$

$x + 5$

$f + b = 6$

$9f - b = 14$

$10f = 20$

$a + b = 6x + 11$

$f = 2$

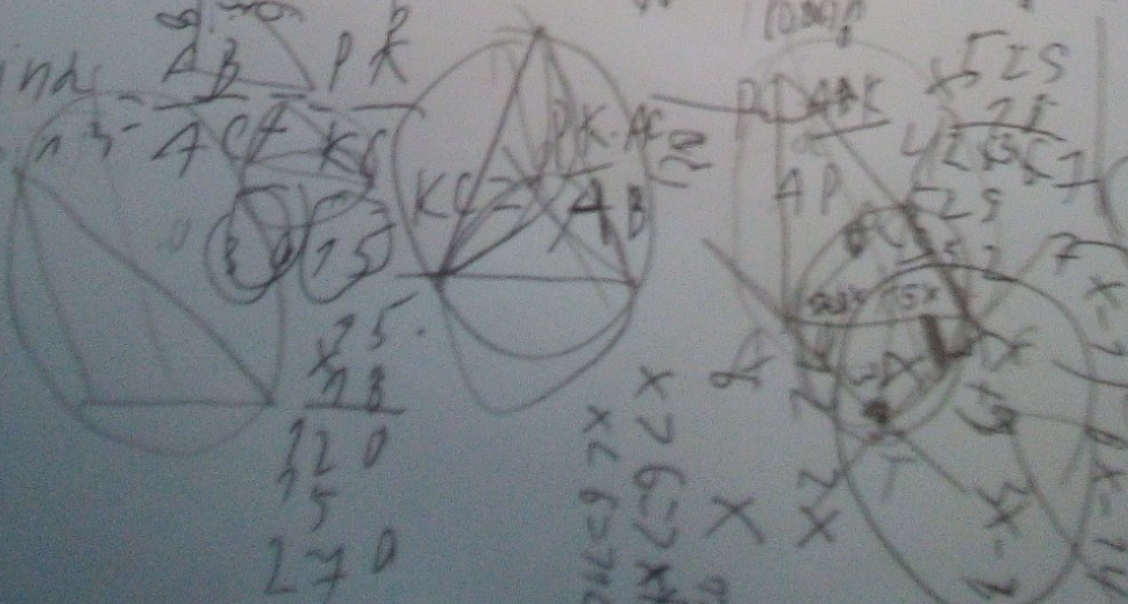
$b = 4$

$\frac{\sin\alpha}{AB} = \frac{\sin\beta}{A}$

$\log_b(a) = 2\log_b 15$

$\frac{\sin\alpha}{AC} = \frac{AB}{PK} = \frac{KC}{KC}$

$KC = AB$



$15 \cdot 18$

120

15

270

Черновик

№5

$\log_{\frac{x}{3}+3} \cancel{(6x-14)}$ Пусть $\frac{x}{3}+3=a$; $x-1=b$, $6x-14=6a+4b = c$

При $x \in$ ОДЗ:

I $\cancel{\log_{a} c = \log_{c} b^2}$ I $\log_{\sqrt{a}}(6a+4b) = \log_{6a+4b} b^2$

$\cancel{\log_b c = \log_c b}$ $\log_{6a+4b} b^2 - \log_b a = 1$

$2\log_a(6a+4b) = 2\log_{6a+4b} b$ $2\log_{6a+4b} b = \log_b ab$

$2\log_{6a+4b} b^2 - 1 = \log_b a$ $\frac{2}{\log_b 6a+4b} = \frac{\cancel{1}\ \log_b ab}{\log_b 6a + \cancel{\log_b 4b}}$

$\cancel{a=b}$ $x=y$

$x=z+1$

$x=2$

$108x^2 - 504x - x + 366 - 5$

$108x^2 - 503x + 361 \geq 0$

$\frac{1}{\log_{6a+4b} a} = 2\log_{6a+4b} b$ $a = 503$ $\frac{503}{216}$

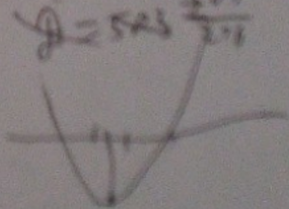
$\frac{1-\log}{\log} = 0$

$\log \neq 0$ $\log_{6a+4b} a \cdot \log_{6a+4b} b = 21$

c c

$-\log_{6a+4b} b^{-1} = \frac{1}{\{}$ $6a+4b$ $\log$

$a = 6a+4b$



21100522 (U833228 M1296256)

$a > \frac{7}{3} + 3$ $\quad b > \frac{4}{3} \sim 5$ $\quad c > 0$ Чистовик (3)

ОДЗ: Пусть $\frac{x}{3} + 3 = a$ $\quad x - 1 = b$ $\quad 6x - 14 = 6a + 4b = c$

$$\begin{cases} x > \frac{14}{6} \\ x > 1 \\ x > -9 \\ x \neq \frac{15}{6} \\ x \neq -6 \\ x \neq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \frac{14}{6} \\ x \neq \frac{15}{6} \end{cases}$$

Сравним 3 логарифм с 1:

log

~~Для~~ при ОДЗ:

$$\mathrm{I} \begin{cases} \log_{a^{0,5}} c = \log_c b^2 \\ \log_c b^2 = \log_b a + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_a c = \log_c b \\ 2\log_c b = \log_b ab \end{cases} \qquad \begin{cases} c = a^{\log_c b} \\ 2\log_c b \log_b b = \log_b ab \end{cases}$$

21100522 (U833228 M1296256)

№1. Чистовик (1)

Т.к. $НОК = 3^{15} \cdot 5^{18}$ любое из чисел a, b, c может быть представлено как $3^n \cdot 5^k$, где n и $k \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0; но т.к. $НОД = 15$ никакое n и k не равно 0, то есть n и $k \in \mathbb{N}$, причём хотя бы одно n и одно k равны 1.

Т.к. $НОК = ~~13~~\ 3^{15} \cdot 5^{18}$ $n \leq 15$ и $k \leq 18$, причём хотя бы ~~1 n трёх равен~~ одно из трёх n и одно из трёх k равны 15 и 18 соответственно.

То есть одно n равно 1, одно равно 15, и третье может принимать любые значения от одного до 15, то есть всего 15 возможных троек n (если порядок не важен) и 18 возможных ~~троек~~ троек k ~~соответственно~~ аналогично. Учитывая независимость выбора n и k всего возможных комбинаций $15 \cdot 18 = 270$.

Теперь, учитывая, что порядок для ответа важен найдём количество ~~упоряд.~~ способов выбрать 2 разных фикс. числа и 1 нефикс. из двух троек:

Пусть $a = 3^{n_a} \cdot 5^{k_a}$ $b = 3^{n_b} \cdot 5^{k_b}$ $c = 3^{n_c} \cdot 5^{k_c}$

случайный выбор 1 из 3 n и случайный выбор 15 из 2 оставшихся даёт 6

k аналогично даёт 6

$\Rightarrow$ т.к. k и n независ. всего $6 \cdot 6 = 36$ вариантов.

Искомое количество (с вычетом общих троек (таких, как

1. $n_a = 1$ $n_b = 1$ $n_c = 15$ 18
2. $n_a = 1$ $n_b = 15$ $n_c = 15$ 18
3. $n_a = 15$ $n_b = 1$ $n_c = 15$
4. $n_a = 15$ возм. $n_b = 1$ $n_c = 1$ (18, т.к. при таких n все k повторяются)
5. $n_a = 15$ $n_b = 15$ $n_c = 1$
6. $n_a = 1$ $n_b = 15$ $n_c = 1$

$k_a = 1$ $k_b = 18$ $k_c = 18$ 15 (аналог. повтор. n)

$k_a = 1$ $k_b = 1$ $k_c = 18$ 15 ...)

$36 \cdot 270 - 18 \cdot 6 - 15 \cdot 6 = 36 \cdot 270 - 33 \cdot 6 = 6(2\cancel{8} \cdot 270 - 33) = 18(540 - 11) = 18 \cdot 525 = 5527$

Ответ: 5527

№6 Чистовик (2)

$AT = TC$ (кас. из 1 точки

$AO = OC = r$ (радиусы впис. окр.

значит $AT + AO = TC + OC \Rightarrow AOCT$ впис. в окр опис около треуг AOC, то есть в ту же на которой лежит P

$\angle APT = \angle TPC$ (впис., опир. на равные хорды AT и TC)

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{5}$$ (треуг. с равн. выс.)

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$$ (т.к. PK – биссектр.)

$\angle TAP \overset{180^\circ}{=} \angle TCP$ (впис опир на TP

$\angle PAC =$

$\angle$