Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100253**

ID профиля: **189169**

Вариант 18

Чистовик

Задача 1

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=S \\ a_7\cdot a_{12}>S+20 \\ a_9\cdot a_{10}<S+44 \end{cases}$$

Найдем сумму 7 чисел арифметической прогрессии, т.е S:

$$S=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7.$$

Пусть k - разность между двумя соседними элементами арифм. прогрессии, тогда $(k>0)$

$a_7=a_1+6k$

$a_{12}=a_1+11k$

$a_9=a_1+8k$

$a_{10}=a_1+9k$

тогда $S=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=\frac{a_1+a_1+6k}{2}\cdot 7=$
$=(a+3k)\cdot 7$

Получим, что

$$\begin{cases} (a_1+6k)(a_1+11k)>(a+3k)7+20 \\ (a_1+8k)(a_1+9k)<(a+3k)7+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1k+66k^2>7(a_1+3k)+20 \\ a_1^2+17a_1k+72k^2<7(a_1+3k)+44 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \cancel{a_1^2}+\cancel{17a_1k}+66k^2-\cancel{7(a_1+3k)}-20>0 \\ \cancel{7(a+3k)}+44-\cancel{a_1^2}-\cancel{17a_1k}-72k^2>0 \end{cases}$$

$$66k^2-20+44-72k^2>0$$

$$-6k^2+24>0 \quad /:(-6)$$

$$k^2-4<0$$

Чистовик

$(k-2)(k-2)<0$

$k \in (-2; 2)$, т.к $k>0$, $\Rightarrow k \in (0; 2)$ и т.к все элементы целые, $\Rightarrow$ и k - целое, тогда ед. решение $k=1$.

Подставляем.

$$\begin{cases} (a+6)(a+11) > (a+3)7+20 \\ (a+8)(a+9) < (a+3)7+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+17a+66 > 7a+41 \\ a^2+17a+72 < 7a+65 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+10a+25>0 \\ a^2+10a+7>0 \end{cases} \quad D = 100-4\cdot 7 = 72$$

$(a+5)^2>0$, $\Rightarrow a \neq -5$

$a_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = \begin{matrix} -5+3\sqrt{2} \\ -5-3\sqrt{2} \end{matrix}$

$(a+5+3\sqrt{2})(a+5-3\sqrt{2})<0$

$-5-3\sqrt{2}$ $\quad$ $5+3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2} \approx -9{,}2$

$-5+3\sqrt{2} \approx -0{,}8$

т.к a - целое, значит $a \in [-9; -1]$

Ответ: $a \in [-9; -1]$

Чистовик

$$2R_{min} = \frac{1}{\max(\sin\angle AKB)}$$

$$\sin\angle AKB = 2\sin\angle MKB \cdot \cos\angle MKB =$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{BK} \cdot \frac{MK}{BK} = \frac{MK}{BK^2}$$

$$BK^2 = MK^2 + \frac{1}{4}, \quad MK = x$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+\frac{1}{4}}$$

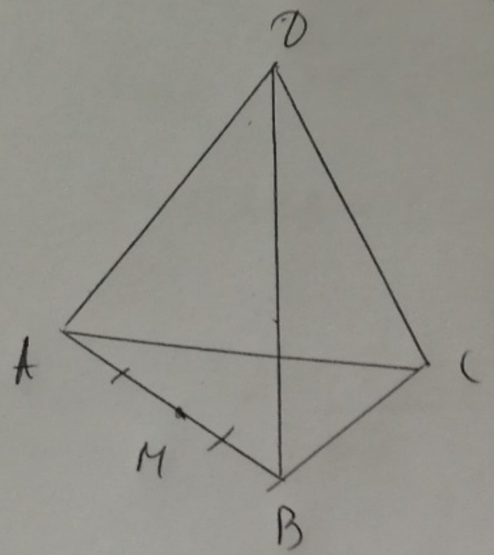
$$f'(x) = \frac{1(x^2+\frac{1}{4}) - x \cdot 2x}{(x^2+\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{4} - x^2}{(x^2+\frac{1}{4})^2}$$

при $x = \frac{1}{2}$ – т. максимума.

Тогда $\max \angle\sin\angle AKB = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

$$\Rightarrow 2R_{min} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R_{min} = \frac{1}{2}$$

Чистовик. Пусть M - середина AB



ABD - равнобедренный

ACM - равнобедренный.

$DM \perp AB$

$CM \perp CD$

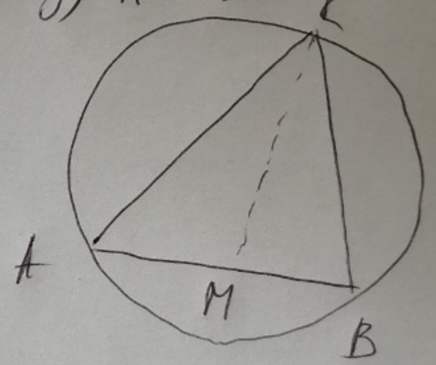
$\Rightarrow AB \perp CD$, т.к.

$AB \perp$ плоскости DMC

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью проходящей через AB и $\perp$ оси цилиндра.

$K \in CD$

т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по 3 признаку) $\Rightarrow AK = BK$



по т. синусов: $2R = \dfrac{AB}{\sin\angle AKB} =$

$= \dfrac{1}{\sin\angle AKB}$

MK - расстояние между $\perp$ скрещ. ребрами. может меняться

от. т. O (когда CD = DM + CM - вырожденный случай, и тогда $\sin\angle AKB \approx 180^\circ$ и $R = +\infty$

и максимум MK - это максимум - это максимум высоты MK в $\triangle DMC$, где $DM = \sqrt{49 - \frac{1}{4}}$

$CD = \sqrt{25 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{11}$

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{11}$

Лист 4 из 4

$$2R_{min} = \frac{1}{\max(\sin\angle AKB)}$$ Черновик.

$$\sin\angle AKB = 2\sin\angle MKB \cdot \cos\angle MKB =$$

$$2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{BK}\cdot\frac{MK}{BK} = \frac{MK}{BK^2}$$

$$BK^2 = MK^2 + \frac{1}{4}$$

Пусть $MK = x_2$

тогда $f(x) = \frac{x}{x^2+\frac{1}{4}}$

$$f' = \frac{1(x^2+\frac{1}{4}) - x\cdot 2x}{(x^2+\frac{1}{4})^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}-x^2}{(x^2+\frac{1}{4})^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

при $x = \frac{1}{2}$ – точка максимума.

$\Rightarrow \max(\sin\angle AKB) =$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$2R_{min} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow$

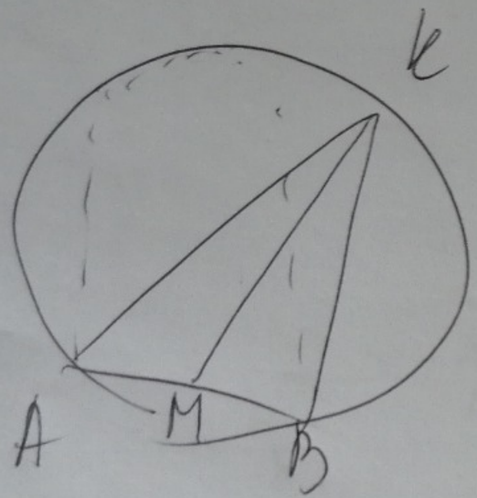
$R = \frac{1}{2}$

Ответ: $R \in (\frac{1}{2}; +\infty)$

Лист 4

21100253 (U189169 M1296652)

Лист 5.



$K \in CD$.

т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$

по 3 приз.

$\Rightarrow AK = BK$

по Т. Синусов.

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle AKB} = \frac{1}{\sin\angle AKB}.$$

MK – расстояние между

21100253 (U189169 M1296659)

Черновик $\frac{7a-21k}{2}\cdot 7 = S$ $\frac{a + a + 6k}{2}\cdot 7 = S$

$a(a+5k) > S+20$

$(a\cdot 3k)\, 7 = S$

$(a+2k)(a+3k) < S+44$

$a^2+5ak > \frac{7a-21k}{2}\cdot 7+20$

$a^2+5k+6k^2 < \frac{7a-21k}{2}\cdot 7+44$

$a^2+5ak-t-20>0$

$+$

$t-a^2-5k-6k^2+44>0$

$a_1 \quad a \cdot a_7$

$5ak-20+44-5k>0.$

$5k(a-1)+24>0.$

$a-1 > \frac{-24}{5k}$

$k > \frac{-24}{5(a+1)}$ $a > \frac{5k-24}{5k}.$

$a < -1.$

$a+1<0.$

Лист 3

Черновик

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=S \\ a_7\cdot a_{12}>S+20 \\ a_9\cdot a_{10}<S+44 \end{cases}$$

$a_1=\frac{2}{7}S-a_7$

$a_1 \quad a_1+k \quad a_1+2k$

$a_1+k=S$

$a_1=S-k$

$\frac{a_1+a_1+6k}{2}\cdot 7=S.$

$a_1+3k=\frac{2}{7}S$

$a_7=3k.$

$a_1=\frac{2}{7}S-3k.$

$a_1=\frac{1}{7}S-3k$

$\frac{2}{7}S-a_7=\frac{1}{7}S-3k$

$a_7=\frac{1}{7}S+3k.$

Лист 1

$(a+6)(a+11) > (a+3)7+20$ Черновик.

$(a+8)(a+9) < (a+3)7+44$

$+21$

$$\begin{cases} a^2+17a+66 > 7a+41 \\ a^2+17a+72 < 7a+65 \end{cases}$$

$66 - 41 = 25$

$72 - 65 = 7$

$a^2+10a+25>0$

$a^2+10a+7<0$

$(a+5)^2>0 \quad a \neq -5$

$100-4\cdot 7$

-28

72

$1,4 \times 3$

$a = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2} \quad -5+4,2$

$-5-3\sqrt{2}. \quad -5-4,2$

$-0,8 \in$

$-9,2 \quad -0,8$

$-8 \quad . \quad -1.$

лист 2.

21100253 (U189169 M1296659)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100253**

ID профиля: **189169**

Вариант 18

Чистовик. Задача 1

Пусть $\begin{cases} a = 3^x \cdot 5^y \\ b = 3^p \cdot 5^q \\ c = 3^r \cdot 5^s \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \min(x, p, r) = 1 \\ \max(x, p, r) = 15. \end{matrix}$

Значит одно из чисел (степеней) обязательно 1, а другое 15, а третье от 1 до 15.

$\left[\begin{matrix} x=1, p=15 \\ p=1, x=15 \end{matrix}\right., 1 \le r \le 15$ — 15 шт., 15 шт.

$\left[\begin{matrix} p=1, r=15 \\ r=1, p=15 \end{matrix}\right. \quad 1 \le x \le 15$ — 15 шт., 15 шт.

$\left[\begin{matrix} x=1, r=15 \\ r=1, x=15 \end{matrix}\right. \quad 1 \le p \le 15$ — 15 шт., 15 шт.

90 штук

Аналогично получается для степеней числа 5, наборов $(y, p, s) = 6 \cdot 18 = 108$.

Теперь для каждого из 90 штук наборов (x, p, r), можно добавить 108 штук. наборов (y, p, s)

Итого: $90 \cdot 108 = 9720$

Ответ: 9720.

Чистовик Задача 2.

ОДЗ:

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$,

$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0, & \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0, & 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 & x-1\neq 1 \end{cases}$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

Перемножим все три числа используя, что $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$$2\frac{\log_2(6x-14)}{\log_2\left(\frac{x}{3}+3\right)} \cdot 2\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(6x-14)} \cdot \frac{\log_2\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_2(x-1)} = 4.$$

Пусть 2 числа равны по y, => третье равно $y-1$,

тогда: $y^2(y-1)=4$

$y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} y-2=0, \Rightarrow y=2 \\ y^2+y+2=0, \ D=1-4\cdot1\cdot2=-7<0, \text{ решений нет} \end{array}\right.$

$y=2$, значит одно из чисел равно 1.

Разберем 3 случае:

1) $\begin{cases} 2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)=1, & \Rightarrow (6x-14)^2=\frac{x}{3}+3 \\ 2\log_{(6x-14)}(x-1)=2, & \Rightarrow 6x-14=x-1, \Rightarrow x=\frac{13}{5} \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2, & \Rightarrow (x-1)^2= \cancel{\frac{x}{3}+3 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{13}{15}+\frac{45}{15}} = \end{cases}$

~~=> $x=\frac{13}{5}$ и $x-1=\frac{8}{5}=6x-14$ – удовлетв. ОДЗ:~~

$x=\frac{13}{5}$ не удв. 1 ур-ю, => 1 случае быть не могло

Чистовик

2) $\begin{cases} 2\log_{(6x-14)}(x-1)=1 \\ 2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=2 \\ \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=6x-14 \\ (6x-14)=\frac{x}{3}+3 \\ (x-1)^2=\frac{x}{3}+3 \end{cases}$

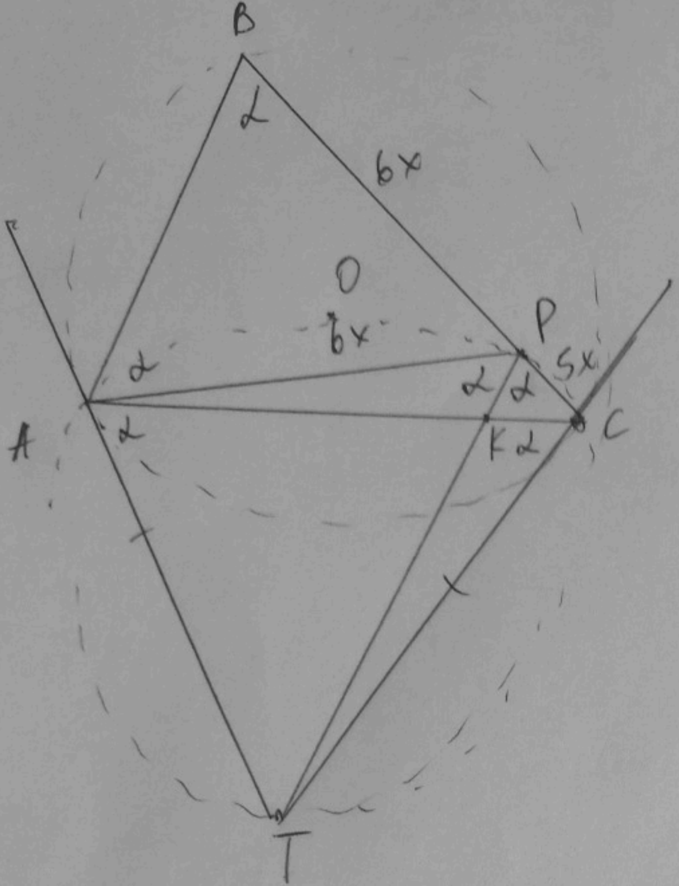
$\underline{x=3}$ - удовлетв. ОДЗ.

3) $\begin{cases} \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)=1 \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2 \\ 2\log_{6x-14}(x-1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=\frac{x}{3}+3, \ x=6 \\ \frac{x}{3}+3=6x-14, \ x=6 \text{ не удв,} \Rightarrow \\ 6x-14=x-1 \end{cases}$ => в 3 случае корней нет

~~x=6~~

Ответ: $x=3$, ~~x=6~~

Чистовик №6. Задача 3



а) 1. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle CAT = \angle ACT = \alpha$, т.к это угол между хордой и касательной.

2. $APCT$ - вписанный, $\Rightarrow \angle ACT = APT = \alpha$
$\angle CAT = CPT = \alpha$ ~~заки~~ т.к они опираются на одну дугу.

3. Заметим, что $\angle APB = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - 2\alpha$, т.к $\angle PBA = \alpha$, значит $\angle BAP = \alpha$ (по сумме углов в Δ), тогда ΔABP - равнобедренный.

4. $$\left.\begin{aligned} S_{\Delta APK} &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PK \cdot \sin\alpha = 6 \\ S_{\Delta KPC} &= \frac{1}{2} PC \cdot PK \cdot \sin\alpha = 5 \end{aligned}\right\} : \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}, \Rightarrow \begin{aligned} AP &= 6x = BP \\ PC &= 5x \end{aligned}$$

5. $\angle ABC = \angle KPC = \alpha$, $\Rightarrow AB \parallel PK$, тогда $\Delta ABC \sim \Delta KPC$,
(равны, как соответственные)

$$\Rightarrow \frac{AB}{KP} = \frac{BC}{PC} = \frac{6x+5x}{5x} = \frac{11}{5}, \quad PC ~~= 5z, KP = 11z~~$$

~~тогда $S_{KPC} = \frac{1}{2} 5z \cdot 5x \cdot \sin\alpha = 5$, $\Rightarrow zx = \frac{10}{25\sin\alpha}$~~

~~$S_{ABC} = \frac{1}{2} 11z \cdot 11x \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 121 \cdot \frac{105}{25\sin\alpha} \cdot \sin\alpha =$~~

~~$= \frac{605}{2} = 302{,}5$~~

Коэф. подобия ~~k^2~~ $= \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = k^2$ ~~k - коэф. подобия $= \frac{11}{5}$.~~

$\Rightarrow$

Чистовик

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2$ – коэф. подобия. $= \frac{11}{5}$.

$\frac{S_{ABC}}{5} = \frac{121}{25}$, $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{121}{5}$.

Ответ: $\frac{121}{5}$

Черновик лист 4

Т.к $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{\frac{x}{3}+3} 6x-14$

$\log_2 1 = 1$

0.

$6x-14=1$

$\log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 6x-14$

Тогда произв. трех чисел. равно 1

Т.к $2\frac{\log_2(6x-14)}{\log_2\frac{x+3}{3}} \cdot 2\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(6x-14)}$.

$x^2(x-1)=4$

$x^3-x^2-4=0$

$\frac{\log_2\frac{x}{3}+3}{\log_2 x-1} = 4$

$x=1$.

$\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

Тогда два числа $4y$, и т.е $4y-1$

$6x-14=0$

$x=\frac{7}{3}$.

$\Rightarrow y^2(y-1)=4$

$\Rightarrow y^3-y^2-4=0$

$\frac{x}{3}+3=1$.

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$y=2$

21100253 (U189169 M1296660)

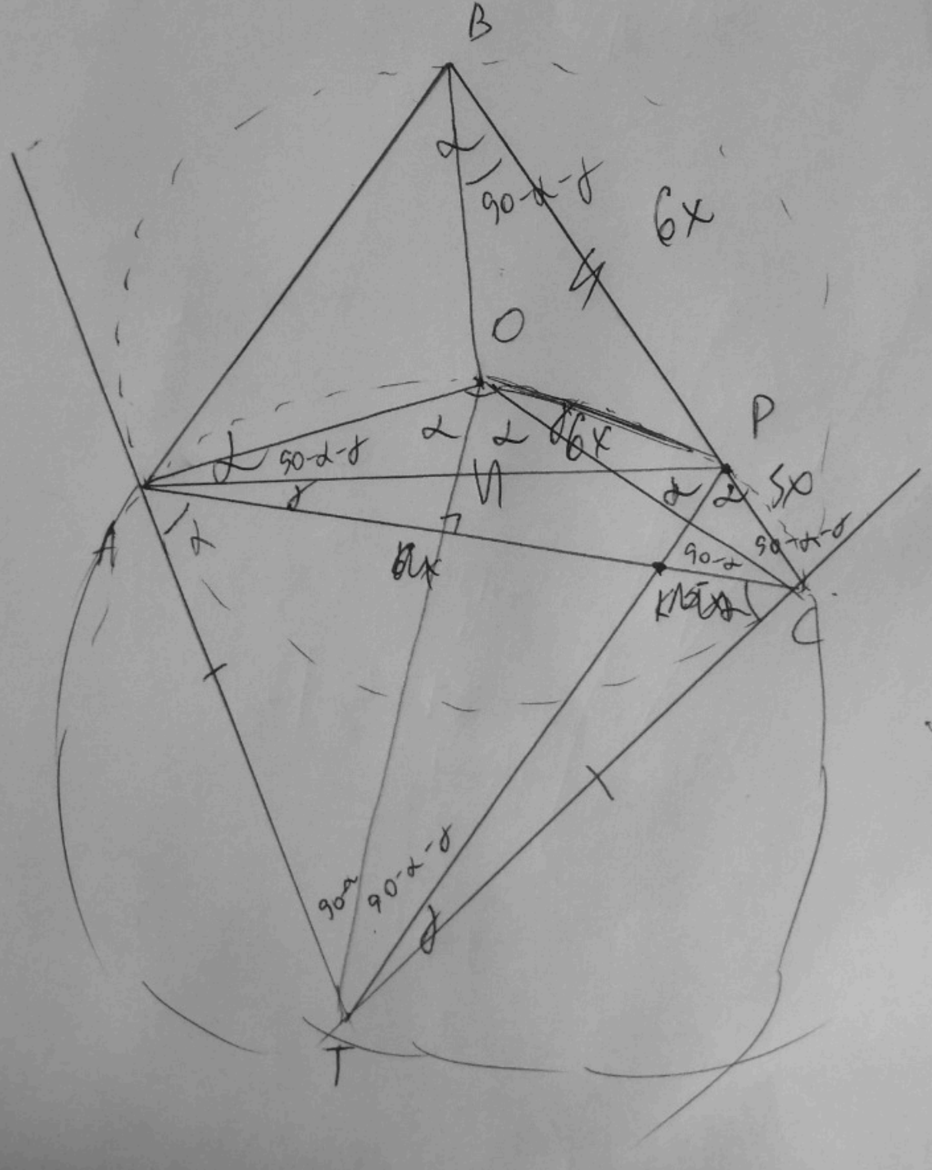
Черновик лист 3

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot AP \cdot \cancel{PK} \cdot \sin\alpha = 6$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \cancel{PK} \cdot PC \cdot \sin\alpha = 5 \qquad \frac{6}{5}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AP \cdot PK \cdot s$$



$$\frac{64}{25} = \frac{50}{15} = \frac{5}{3}$$

Черновик
Лист 2

$\frac{9+x}{3} = 36x^2 - 12\cdot 14x + 196.$

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 14 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 168 \end{array}$

$9+x = 108x^2 - 504x + 588$

$\begin{array}{r} 168 \\ \times 3 \\ \hline 504 \end{array}$

$\begin{array}{r} 196 \\ \times 3 \\ \hline 588 \end{array}$

$108x^2 - 505x + 579$

$505^2 - 4\cdot 108\cdot 579$

250128.

255025

4897

$16 =$

$6x - 14 = (x-1)^2$

$2x$

$x^2 - 2x + 1 - 6x + 14 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0.$

$\boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ x=5. \end{array}}$

$78/5 - 14$

$\frac{8^2}{5} = \frac{13}{15} + 45.$

$5x = 113$

$x - 1 = \frac{x}{3} + 3 \;/\cdot 3$

$3x - 3 - x - 9 = 0$

$2x - 12 = 0$

$x = 6.$

$3x - 3 = x + 9$

$2x = 12$

$x = 6$

21100253 (U189169 M1296660)

Черновик Лист 1

$\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot 5x\cdot\sin 2\alpha = 11$

$\sin x\cdot\cos x\cdot 30x^2 = 11$

$\frac{1}{2}\cdot AP\cdot PK\cdot\sin\alpha = 6$

$\frac{1}{2}\cdot PK\cdot PC\cdot\sin\alpha = 5.$

$PK =$

$\frac{5}{\frac{1}{2}PC\sin\alpha} = \frac{6}{\frac{1}{2}AP\sin\alpha}$

$\frac{5}{PC} = \frac{6}{AP}$

$\frac{121}{25}$

$\triangle ABP \sim \triangle ACT$

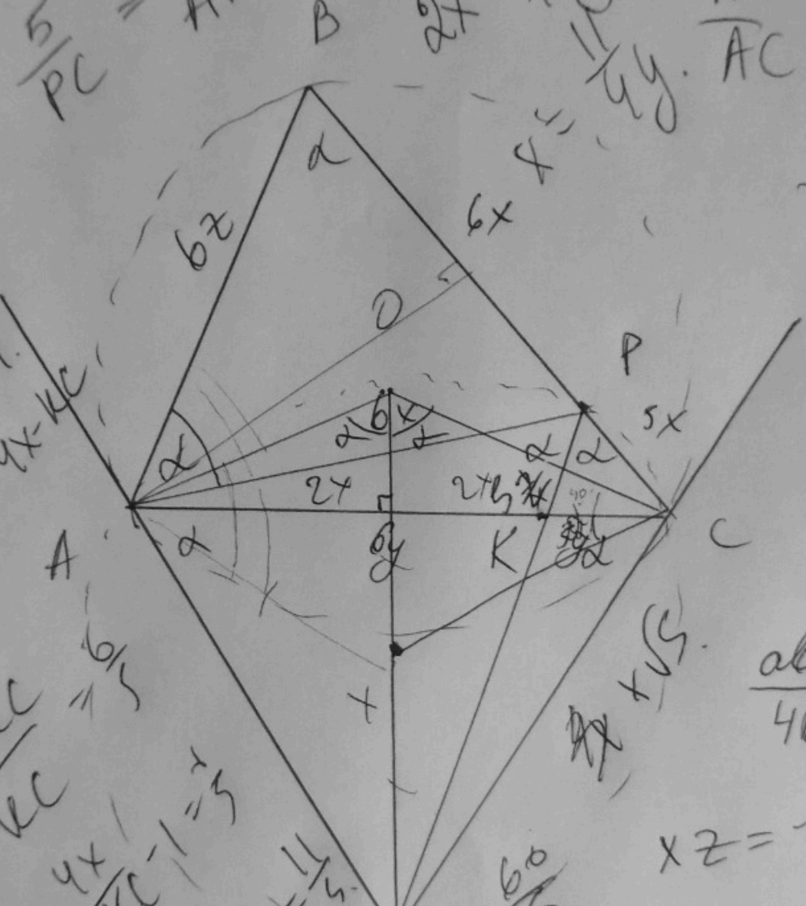
$2x = 11y$

$x = \frac{11}{4}y$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CT}$

$\frac{AB}{11y} = \frac{6x}{CT}$

$66xy = AB\cdot CT$



$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$AK + KC = 4x$

$AK = 4x - KC$

$\sin\alpha =$

$\frac{4x-KC}{KC} = \frac{6}{5}$

$\frac{4x}{KC} - 1 = \frac{1}{5}$

$\frac{4x}{KC} = \frac{11}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{2x} =$

$\frac{abc}{4R}$ $\operatorname{arctg}\alpha =$

$xz = \frac{2}{5\sin\alpha}$

$\frac{60}{5}$

$\sin(180-2\alpha)$

$\sin 180\cdot$

$-\cos 180\cdot\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\frac{11}{\phi}\cdot\frac{6}{5}$

$\frac{1}{2}\cdot\cancel{6x}\cdot\frac{1}{x}\sin\alpha = \cancel{6}$

$\frac{1}{2}\sin\alpha = 1$

$\frac{1}{2}\cdot\cancel{6}x\cdot 5z\cdot\sin\alpha = \cancel{6}$

$\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\cdot 11x\cdot 6z\cdot\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\cdot 66\cdot\sin\alpha\cdot\frac{2}{5\sin\alpha} = \frac{66}{5}.$