

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100173**

ID профиля: **280620**

Вариант 18



числових

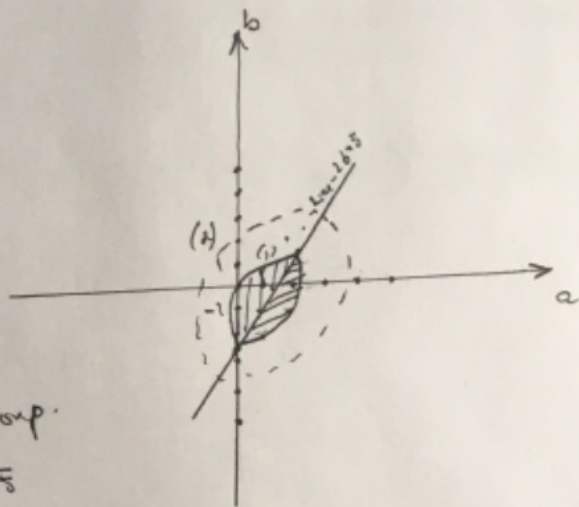
18 вар I нивел

№3 Если при некотором  $a$  и  $b$  есть пара  $x$  и  $y$  - угловых значений, то для  $x$  и  $y$  выполняется неравенство  $M$

Рассуждения:

(2)  $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 5$

(1)  $a^2 + b^2 \leq \min(4a-2b, 5)$



(1):  $y \min(4a-2b, 5)$  и формула  
 равенств  $4a-2b=5$

1)  $4a-2b \geq 5 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 5$  - одно вып.  
 с центром в  $O(0,0)$  и  $r = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$  при  $4a-2b < 5$  это не вып.

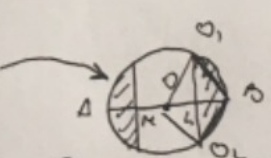
2)  $4a-2b < 5 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 4a-2b \Rightarrow a^2 - 4a + b^2 + 2b + 5 \leq 5$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5$  - вып. с центром в  $O(2,-1)$  и  $r = \sqrt{5}$

(2) Как видно, оба вып. при  $a$  и  $b$  имеют пересечение  $\Rightarrow$

(а) - это пересечение вып., изображенных (1)  
 (выпуклый полигон)

Рассуждения (1): это 2 вып. вып.



примем  $AK = KO = OL = LB = \frac{R}{2}$ , тогда  $S(1) = 2 S_{\triangle OKL}$   
 вып. вып.;  $S_{\triangle OKL}$  вып. вып.  $S_{\triangle OKL} = S_{\triangle OK_1O_2} - S_{\triangle OK_1O_2}$

Таким образом  $OL = LB$ ;  $O_1O_2 \perp OB$  (расстояние между  
 хордами равно)  $\Rightarrow \triangle OK_1O_2 - \text{равноб.} \Rightarrow OK_1 = O_2K_1$ , но

$OK_1 = O_2K_1 = R \Rightarrow \triangle OK_1O_2 - \text{равностор.}$  Аналогично  
 $\triangle O_2K_1O_2 - \text{равностор.} \Rightarrow \angle O_1O_2O_2 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow S_{\triangle OK_1O_2} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi R^2$

$S_{\triangle OK_1O_2} = OK_1 \cdot O_2K_1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$

(2)



Курсовая

8 вар. I семес

~3 (пределах.) answer. just 2-nd name per

$$\Rightarrow S(1) = 2 \left( \frac{1}{3} \bar{u} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \right) = R^2 \left( \frac{1}{3} \bar{u} - \sqrt{3} \right)$$

(2) - это комбинированное пер., равно  $R(2) =$

$R(1) + \sqrt{5}$  ← выходя название ум. сур. и (1)  
 $R(1) = \sqrt{5} \Rightarrow$

$$S(2) = (R(1) + \sqrt{5})^2 \cdot \left( \frac{1}{3} \bar{u} - \sqrt{3} \right) = (\sqrt{5} + \sqrt{5})^2 \cdot \left( \frac{1}{3} \bar{u} - \sqrt{3} \right) =$$
$$= 20 \left( \frac{1}{3} \bar{u} - \sqrt{3} \right) = \frac{40}{3} \bar{u} - 20\sqrt{3}$$

ответ:  $\frac{40}{3} \bar{u} - 20\sqrt{3}$

(3)

$$S \leq a_1 + a_1 + d + 2d + 3d + 4d + 5d + 6d = 7a_1 + 21d$$

$$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20$$

$$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$$

$$a_1^2 + 11a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$$

$$7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 +$$

$$a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 + 7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 + 7a_1 + 21d + 20$$

$$6d^2 < 24 \quad d^2 < 4 \quad d \leq 2$$

$$(a_1 + 6)(a_1 + 11) > 7a_1 + 41$$

$$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$$

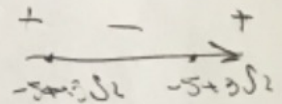
$$(a_1 + 5)^2 > 0$$

$$(a_1 + 8)(a_1 + 9) < 7a_1 + 21 + 44$$

$$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$$

$$\frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$$



$$9 \vee 5 + 3\sqrt{2}$$

$$81 \vee 25 + 30\sqrt{2} + 18$$

$$-9; -8; -7; -6;$$

$$81 \vee 43 + 30\sqrt{2}$$

$$-5; -4; -3; -2; -1$$

$$38 \vee 30\sqrt{2}$$

$$a_1 = -5$$

$$38 \vee 30 \cdot 60$$

$$19 \vee 30 \cdot 15$$

$$569 \vee$$

$$(-9+6)(-9+11) >$$

$$57 \vee 30\sqrt{2}$$

$$(-5+6)(-5+11) > -5 \cdot 7 + 21 + 20$$

$$(-5+6)(-5+11) < 35 + 21 + 44$$

$$-6 < 7 \cdot (-9) + 21 + 44$$

$$-6 < -63 + 65$$

$$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4;$$

$$-4 < -70 + 21 + 44$$

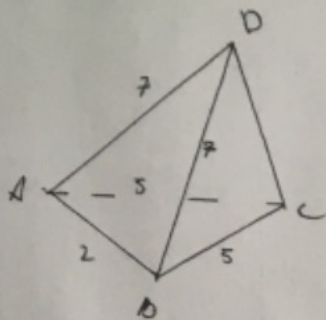
$$-3; -2; -1$$

$$30 < -7 + 21 + 44$$

$$66 < 21 + 44$$



Черновик:



$$4a - 2b \geq 5 \quad 2b \geq 4a - 5$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 5$$

$$a^2 + b^2 \leq \min(4a - 2b, 5)$$

1)  $4a - 2b \geq 5$

$$a^2 + b^2 \leq 5$$

2)  $5 \geq 4a - 2b$

$$a^2 + b^2 \leq 4a - 2b$$

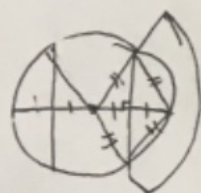
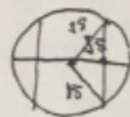
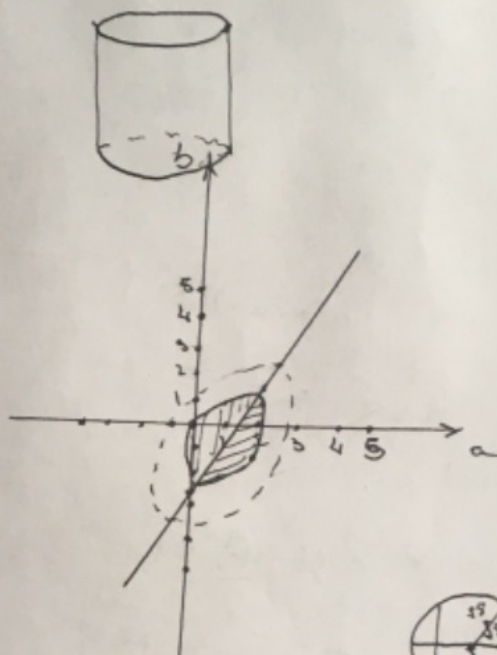
~~$$a^2 + b^2 + 4a + 2b \geq 8$$~~

$$(a+2)^2 + (b+1)^2 \leq 5 \quad a \geq 2; b \geq -1$$

$$4a - 2b \geq 5$$

$$a^2 + b^2 \geq 4a - 2b$$

$$a^2 + b^2 \geq 5$$



$$\frac{1}{3} \pi R^2 -$$

~~$$\frac{R \cdot R}{2} \cdot 2$$~~

$$\left( \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{53}{2} R^2 \right) \cdot 2$$

$$53R$$

$$\cdot \frac{R}{2}$$

$$R^2 - \frac{R^2}{4} =$$

$$\frac{3}{4} R^2$$

$$\frac{3}{2} R^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 5$$

$$a^2 + b^2 \leq \min(4a-2b, 5)$$

чекнуть

1)  $4a-2b \leq 5$

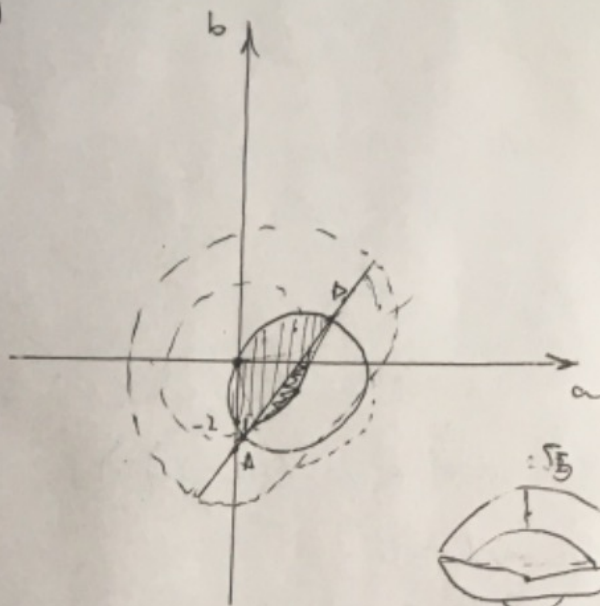
$$a^2 - 4a + b^2 + 2b \leq 0$$

$$(2a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5$$

$$4a-2b < 5$$

$$2b > 4a-5$$

$$b > 2a-2,5$$



2)  $4a-2b \geq 5$

$$a^2 + b^2 \leq 5$$

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 5$$

~~3)~~  $4a-2b \geq 5$   $2b \geq 4a-5$

$$a^2 - 4a + b^2 + 2b \leq 0$$

$$(a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5$$

$$(a-2)^2 + (2a-1,5)^2 \leq 5$$

$$a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 6a + 2,25 \leq 5$$

$$5a^2 - 10a + 6,25 \leq 0$$

$$100 - 5 \cdot 4 \cdot 6,25 \geq 100 - 25 \geq 75 \quad (5\sqrt{3})^2$$

$$a = \frac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2} \quad 5 + \frac{5}{2}\sqrt{3} \quad 5 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$b = 2a - \frac{5}{2} = 10 - 5\sqrt{3} - \frac{5}{2} \quad ; \quad 10 + 5\sqrt{3} - \frac{5}{2}$$

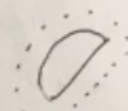
$$\Delta B = \sqrt{\left(5 + \frac{5}{2}\sqrt{3} - 5 + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(10 + 5\sqrt{3} - \frac{5}{2} - 10 + 5\sqrt{3} + \frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{75 + 75} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

$$150 \geq 5+5 - 10 \text{ ok}$$

$4a-2b \geq 5$   $2b \geq 4a-5$

$$a^2 + b^2$$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100173**

ID профиля: **280620**

Вариант 18



Чистовик

18 бар.

II условие

н5 Даны  $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = a$ ;  $\log_{6x-14}(x-1)^2 = b$   
 $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = c$ , тогда  $a \cdot b \cdot c =$

$$= \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \cdot \log_{6x-14}(x-1)^2 \cdot \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3) =$$
$$= \frac{\log_2(6x-14)}{\log_2 \sqrt{\frac{x}{3}+3}} \cdot \frac{\log_2(x-1)^2}{\log_2(6x-14)} \cdot \frac{\log_2(\frac{x}{3}+3)}{\log_2(x-1)} = 4 \text{ (с учётом отп.)}$$

Отр:  $\sqrt{\frac{x}{3}+3} > 0$ ;  $\sqrt{\frac{x}{3}+3} \neq 1$ ;  $6x-14 > 0$ ;  $6x-14 \neq 1$ ;  $x-1 > 0$ ;  $x-1 \neq 1$

, тогда  $a \cdot b \cdot c = 4$ . По усл. 2 из них равны, а первое равно на 1.

Даны  $a = b$ ;  $a-1 = c$ , тогда

$$a \cdot a \cdot (a-1) = 4; \quad a^3 - a^2 - 4 = 0$$

догадываем корни  $a = 2 \Rightarrow (a-2)(a^2 + a + 2) = 0$   
 $D < 0$  нем корней

$\Rightarrow (a=2; b=2; c=1)$ , можно есть случаи, когда

$(a=c=2; b=1)$  и  $(b=c=2; a=1) \Rightarrow$

1)  $a = b = 2, c = 1$   $\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2 = 2 \\ \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3) = 1 \end{cases}$  Замен (1):  
 $x-1 = \frac{x}{3}+3$   
 $\frac{2x}{3} = 4; x = 6$

но  $x = 6$  не удовлет (2)  $\Rightarrow$  6 - не подходит

2)  $a = c = 2, b = 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2 = 1 \\ \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3) = 2 \end{cases}$

Замен (1)  $6x-14 = (x-1)^2$ ;  $6x-14 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 8x + 15 = 0$ ;  $x = 3, x = 5$

$x = 5$  - не удовлет.

$x = 3$  - удовлет. окончательн

(1)

Числовий  
№5 (програма)

18 вар. II част

3) ~~log~~  $b = c = 2, a = 1$

$$\begin{cases} (1) \log_{\sqrt{\frac{x}{5}+3}} (6x-14) = 1 \\ (2) \log_{6x-14} (x-1)^2 = 2 \\ (3) \log_{(x-1)} (\frac{x}{5}+3) = 2 \end{cases}$$

Замени (1):  $(6x-14)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow |6x-14| = |x-1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-14 = x-1 & x > \frac{13}{5} \text{ - не годова (2)} \\ 6x-14 = 1-x & x < \frac{13}{5} \text{ - не годова (2)} \end{cases} \Rightarrow$$

Ответа:  $x = 3$  (не годова в отп.)

(2)



Чистовик

18 вар II колен

$$\sim 4 \begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) \geq 15 \\ \text{НОК}(a; b; c) \leq 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

НОК - втроичам б себе все простое число.  
 ижеи,  $\text{НОК} = 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow a = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2}; b = 3^{b_1} \cdot 5^{b_2};$   
 $c = 3^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

НОД - минимальное число, на которое делятся  
 $a, b$  и  $c$ .  $\text{НОД} = 3^{\min(a_1, b_1, c_1)} \cdot 5^{\min(a_2, b_2, c_2)}$   
 $\geq 3^1 \cdot 5^1 \Rightarrow \min(a_1, b_1, c_1) \geq 1; \min(a_2, b_2, c_2) \geq 1$

ижеи  $\Rightarrow a_1 \geq 1; b_1 \geq 1; c_1 \geq 1; a_2 \geq 1; b_2 \geq 1; c_2 \geq 1$

Пусть  $a_1 \geq 1; a_2 \geq 1$ , тогда  $a \geq 15; b = 3^{b_1} \cdot 3^{b_2}$ ,

~~$3^{c_1} \cdot 5^{c_2}$  т.к.  $\text{НОК} = 3^{15} \cdot 5^{18} = 3^{b_1+c_1+1} \cdot 5^{b_2+c_2+1}$   
 $b_1+c_1+1 \geq 15; b_2+c_2+1 \geq 18; b_1, c_1, b_2, c_2 \geq 1$~~

~~всем  $b_1+c_1 = 14; b_2+c_2 = 17$~~

$\text{НОК} = \max_3(b_1, c_1) \cdot 5^{\max(b_2, c_2)}$

1) первой группой  $a \geq 15; b = 3^{15} \cdot 5^m; c = 3^n \cdot 5^{18}$

$1 \leq m \leq 15; 1 \leq n \leq 18$  всего 15-18 вариантов

2) Аналогично, наоборот  $a \geq 15; b = 3^m \cdot 5^{18}; c = 3^{15} \cdot 5^m$   
 15-18 вариантов

Мы посчитали группой 15;  $3^{15} \cdot 5^{18}; 3^{18} \cdot 5^{15}$   
 группаи  $\Rightarrow$  т.е. всего 15-18-1

3)  $a \geq 15; b = 3^{15} \cdot 5^{18}; c = 3^h \cdot 5^k$

$1 \leq h \leq 15; 1 \leq k \leq 18$  всего 15-18 вар

Мы посчитали группаи группой, тогда  
 $15; 3^{15} \cdot 5^{18}; 3^{18} \cdot 5^{15}; \Rightarrow$  7

(3)

Циклограм

№4

(кратчайшие)

Минимизация суммы циклов  $15^k; 3^{15} \cdot 5^{18}; 3^k \cdot 5^{18}$  при  $k=1,2,3,\dots,15$

Аналогично сумме циклов в другом порядке

Минимизация суммы циклов  $15^k; 3^{15} \cdot 5^{18}; 3^{15} \cdot 5^k$  при  $k=1,2,3,\dots,18$

4) Аналогично  $15^k; 3^k \cdot 5^k; 3^{15} \cdot 5^{18}$

$(15 \cdot 18 - 1 - 15 - 18)$

Аналогично при  $k=15$  и  $k=15$

Если ~~наименьше~~ все меньше  $> 15$ ,

то  $kOD > 15 \Rightarrow$

Всего способов  $((15 \cdot 18 - 1) + (15 \cdot 18 - 1 - 15 - 18) \cdot 2) \cdot 3$

+ ~~циклами~~ ~~пого~~ ~~(k=6 > 15)~~, ~~(k=12 > 18)~~ ~~(k=7 > 15)~~

$> 2823$  вариантов

Ответ: 2823

18 вар 21 вариантов



40 proben

$KOD(a; b; c) = 15$

$KOK(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{19}$

$x, y, z$  -  $\text{b}z\text{ammensurform}$ .

$a = 15x \quad b = 15y \quad c = 15z$

$3 \cdot 5^k; 5 \cdot 3^k; 3 \cdot 5^k$

1)  $a \cdot b \cdot c = 15^3 \cdot x \cdot y \cdot z$

$KOK(x, y, z) = 3^{16} \cdot 5^{16}$

1) ~~2 weitere Faktoren~~  $\text{alle drei } 5^k, \text{ mit}$

$\text{16-max } y \text{ immer}$

$x = 5^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 2; y = 5^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 2; z = 5^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 2$

$KOK = \text{max}(x_1, y_1, z_1) \cdot 3^{\text{max}(x_2, y_2, z_2)}$

$\text{max}(x_1, y_1, z_1) = 17$

$\text{max}(x_2, y_2, z_2) = 14$

$\text{max } C_3^1 = \frac{3!}{2!} \cdot 18^2$

$3 \cdot 18^2 - 3$   
 $3 \cdot 15^2 - 3$

$8, 17, 17; 17, 17, 17;$

$(3 \cdot 18^2 - 3) (3 \cdot 15^2 - 3) = 3(18^2 - 1) \cdot 3(15^2 - 1)$

$= 9(17)(19)(14)16$

$a = 15$

$15; 15; 3^{14} \cdot 5^{17}$

$15; 15; 3^{14} \cdot 5^{17}$

$15; 15; 3^{14} \cdot 5^{17}$

$15; 15;$

$15 \cdot 5; 15; 3^{14} \cdot 5^{15}$

$15; 15 \cdot 3^k; 3^m \cdot 5^m; 3^{15} \cdot 5^{18}$

$k+1 \leq 15$

$m+1 \leq 18$

$k > 1 \quad 14$

$m > 1 \quad 17$

$15 | 15; 3^{15} \cdot 5^{19}$   
 $15; 3^{15} \cdot 5^{19} | 15$   
 $\times 19$   
 $155$   
 $17$   
 $\times 323$   
 $16$   
 $1938$   
 $323$   
 $\times 5168$   
 $14$   
 $20672$   
 $5168$   
 $\times 72352$   
 $9$   
 $6511481$

$k=17, m=17$

$4 \cdot 17 \cdot 3 - 6$

$C_2^2 = \frac{6}{2} = 3$

$$a \cdot b \cdot c = 4$$

$$a = b \quad a = c + 1$$

не пробаем

$$a \cdot a \cdot (a+1) = 4$$

$$a^2 + a^2 - 4 = 0$$

$$2a^2 = 4$$

$$\log \sqrt{\frac{x}{3} + 3} (6x - 14) = 2; 2; 1$$

$$\log 6x - 14 (x-1)^2 = 2; 1; 2$$

$$\log x - 1 \left(\frac{x}{3} + 3\right) = 1; 2; 2$$

$$x - 1 = \frac{x}{3} + 3$$

$$\frac{2x}{3} = 4 \quad x = 6 \quad x \neq 6$$

$$6x - 14 = (x-1)^2$$

$$6x - 14 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x = 5; \quad x = 3$$

$$\log (x-1)^2 = \frac{x}{3} + 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{3} + 3 + 2$$

не уга.

$$3x^2 - 6x = x + 6$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$49 + 6 \cdot 12 = 49 + 72 = 121$$

$$\frac{10 \cdot 4}{9} + \frac{14}{3} = \frac{7 \pm 11}{6} = 5; -\frac{2}{3} \quad \text{не уга.}$$

$$\frac{15}{5} \cdot 6 - 14 = \frac{78}{5} - \frac{70}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{15}{7} \cdot 6 - 14 = \frac{90 - 98}{7} = \frac{15}{7} - 1 = \frac{8}{7}$$

$$\frac{15}{7} - 1 = \frac{8}{7}$$

$$\frac{8}{7} \quad \frac{5}{7} + 3 \quad \frac{13}{15} + 3, \quad \frac{13 + 45}{15} = \frac{58}{15}$$

$$\frac{26}{7}$$



