Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100130**

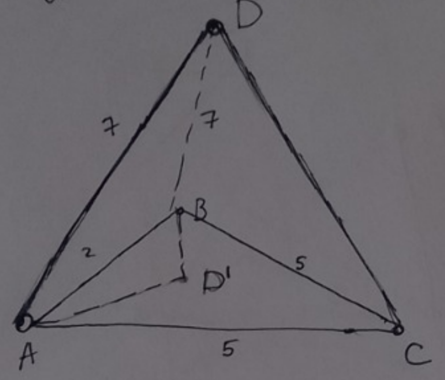
ID профиля: **80441**

Вариант 18

№3. АУ. (тут в)

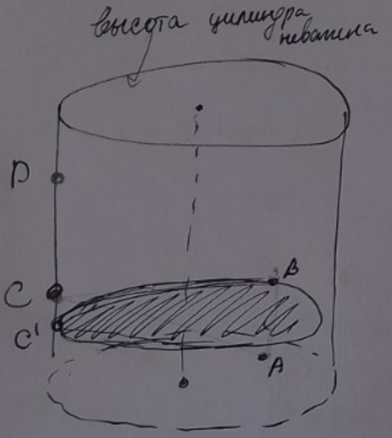
№2.

Чистовик

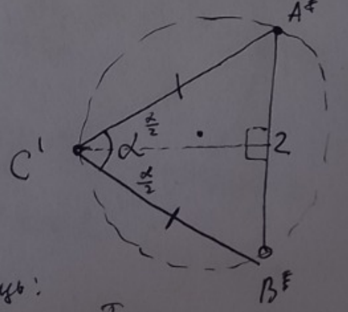


Найдем угол между AB и CD.
Опустим проекцию D на (ABC) (D'). Т.к. AD = BD, то $A^{*}D' = B^{*}D'$ (можно вывести из теоремы пифагора: $BD'^2 = BD^2 - DD'^2 = AD^2 - DD'^2 = AD'^2$)

→ $CD' \perp AB$ (т.к. △ ACD' и D'BC равны по 3м сторонам. (BC = AC, BD' = AD', D'C – общая) → ∠D'CA = ∠D'CB → CD' – биссектриса ∠ACB → это высота равнобедр. △ ACB) → $CD \perp AB$.



~~боковая поверхность ∥ оси цилиндра~~
→ ось цилиндра ⊥ плоскости основания,
→ CD ⊥ плоскости основания →
→ AB ∥ плоскости основания →
→ Рассмотрим все в проекции на плоскость основания. Т.к. CD ⊥ ей, то они перейдут в одну точку C!
A и B перешли ~~в A', B'~~ сами в себя, т.к. пусть мы выбрали ~~на~~ плоскость ∥ плоскости основания, в которой лежат A и B (на рисунке она закрашена).



~~AC~~' AC' = BC', т.к. AC = BC, CC' – ~~общий~~ общая высота (ну, например, теорема Пифагора в помощь: $AC'^2 = AC^2 - CC'^2 = BC^2 - CC'^2 = BC'^2$)

Теорема синусов:
$\frac{2}{\sin\alpha} = 2R \to R = \frac{1}{\sin\alpha}$. т.к. R – наименьшее (радиус цилиндра совпадает с радиусом этой окружности, т.к. это плоскость основания), то sin α – наибольший → ~~$\frac{\alpha}{2}$ – наибольший → $\sin\frac{\alpha}{2}$ – наибольший →~~ ~~$\frac{1/2\,AB}{A'C}$ – наибольшее →~~ → α = 90° (Может ли быть такой случай? Сейчас посмотрим. Тогда AB – диаметр., а AC' и BC' – катеты прямоуг. △, равные $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

$CC'^2 + AC'^2 = AC^2 \to CC'^2 = AC^2 - AC'^2 = 25 - 2 = 23 \to CC' = \sqrt{23}$

$DC'^2 + BC'^2 = BD^2 \to DC'^2 = BD^2 - BC'^2 \Rightarrow DC' = \sqrt{47} \to CD = |CC' \pm DC'| = \sqrt{47} - \sqrt{23}$ или $\sqrt{47} + \sqrt{23}$

21100130 (U80441 M1305142)

Чистовик. Вар-18

a_1

№1.

$d>0,$
$a_1, d \in N$

$S = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1+a_1+6d}{2} \cdot 7 = (a_1+3d)7$

$a_7 \cdot a_{12} > (a_1+3d)7+20$

$a_9 \cdot a_{10} < (a_1+3d)7+44$

$a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d)$
$= a_1^2 + 17a_1d + 66d^2$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d)$
$= a_1^2 + 17a_1d + 72d^2$

$a_7 a_{12} + 24 > S + 24 + 20 > a_9 a_{10}$

$\Updownarrow$

$66d^2 + 24 > 72d^2 \longrightarrow 6d^2 < 24 \longrightarrow d^2 < 4 \xrightarrow{d>0} 0 < d < 2 \rightarrow d = 1.$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > (a_1+3) \cdot 7 + 20,$
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$
$(a_1+5)^2 > 0$
$\underline{a_1 \neq -5}$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < (a_1+3)7 + 44$
$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$
$a_1 + 10a_1 + 25 < 18$
$(a_1+5)^2 < 18$ – в целых числа
$\underset{-5}{}$
$\cancel{-5} < a_1+5 < 5$
$\cancel{-5 < a_1 < 0}$ $-10 < a_1 < 0$

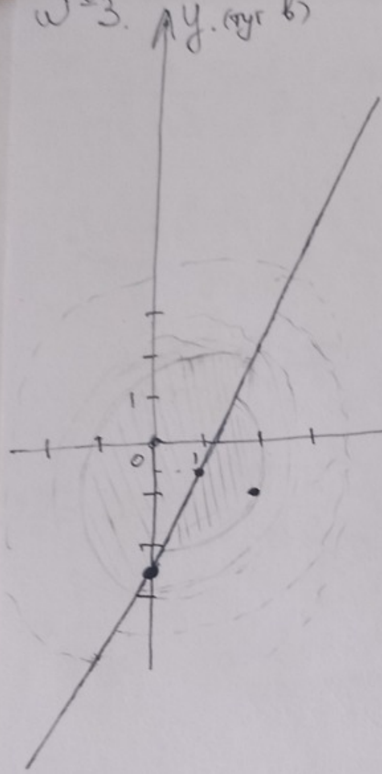
$a_1 = \{\cancel{-4; -3; -2; -1; 0}; 1; 2; 3; 4; 5; \cancel{6; 7; 8}; 9\}$

Ответ:

$a_1 \in [-9; -1], a_1 \in N$

21100130 (U80441 M1305142)

№3. Чистовик.



Найдем допустимое множество (a, b)

$a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5)$

Пусть $4a-2b \leq 5$

(что это за множество)

$2b \geq 4a-5$

$b \geq 2a-2,5$

– это полуплоскость, выше прямой $b=2a-2,5$

← тут будем откладывать a

Тогда

$a^2+b^2 \leq 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$ – множество окружностей с центром в $(2,-1)$ и радиусом, меньшим либо равным $\sqrt{5}$ – в нужной круг радиусом $\sqrt{5}$ (причем ~~области~~, полуплоскости.

~~что~~ ~~вы~~

А если ~~а~~ $4a-b \leq 5$, то

$a^2+b^2 \leq 5 \to$ круг с радиусом $\sqrt{5}$ и центром в $(0,0)$

Если $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$, то это множество кругов с центром в (a,b) и радиусами $\sqrt{5}$.

Найдем точки пересечения $(a-2)^2+(b+1)^2=5$ и $4a-2b=5$

$a^2+b^2 \underbrace{-4a+2b}_{-5}+5=5 \to \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ 4a-2b=5 \end{cases}$ ↙ а это точки пересечения окружности $a^2+b^2=5$ и $4a-2b=5$ ⇒

эти 2 круга пересекают прямую в одних и тех же точках. А точки $(0,0)$ и $(2,-1)$ симметричны относительно прямой $b=2a-2,5$ (т.к. угол наклона ~~этой прямо~~ прямой через эти две точки равен $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{(2)}$ – ~~когд~~ значит, что прямые ⊥

21100130 (U80441 M1305142)

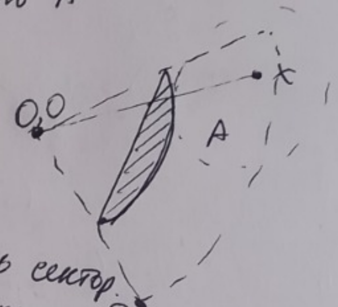
Чистовик

А центр отрезка, ~~А~~ равен $(1, -\frac{1}{2})$ и он лежит на прямой $b = 2a - 2,5$ $\left(-\frac{1}{2} = 2\cdot 1 - 2,5\right) \to$ из симметрии площади ~~секто~~ сегментов кругов равны.

Что значит, ~~мы~~ что $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \to$ в этих точках мы проводим круги радиусом $\sqrt{5}$ и считаем занимаемую площадь. Посчитаем лишь площадь фигуры, получающейся

$2\sqrt{5}$

Область А



Вот есть сектор.

Докажем, что область А – это если бы мы взяли круг радиусом $2\sqrt{5}$. Соединим O с любой точкой X. Если Расстояние ~~…~~ между O и X больше $2\sqrt{5}$, то у окружностей с центрами O и X и радиусами $\sqrt{5}$ нет пересечений. Иначе – есть.

И осталось рассмотреть область Б.

Это просто часть круга с радиусом $\sqrt{5}$ (Точки на границе касаются лишь одной точки множества (a, b)

- Найдем точки пересечения круга и прямой:

$a^2+b^2=5 \qquad a^2+(2a-2,5)^2=5 \qquad a = 1+\sqrt{\frac{3}{4}} \quad b = 2\left(1+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$

$4a-2b=5 \qquad 5a^2-10a+6,25=5 \qquad 1-\sqrt{\frac{3}{4}}$

$b=2a-2,5 \qquad a^2-2a+1,25=1$

$(a-1)^2=0,75$

~~$a=1,75$~~ Найдем синус угла между ними

$\sin 2 = \frac{x_1x_2 - y_2y_1}{x_1y_1} \qquad \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

Чистовик.

$\frac{x_1y_2+x_2y_1}{2}$ = площадь треугольника.

$$S_{\text{окружн.}} = \frac{\cancel{1}(2\sqrt{5})\cdot(\pi-2\varphi)}{2\pi}\ \pi\ \frac{(2\sqrt{5})^2\cdot(\pi-2\varphi)}{2\pi} + 2\cdot\frac{\varphi}{2\pi}\cdot(\sqrt{5})^2\pi \quad \frac{25}{3}\pi$$

$$= 7{,}5\pi$$

$$=\frac{\pi 10\ (\pi-2\varphi)}{\pi} + \frac{\varphi 5}{2} = \cancel{10}-\frac{5\varphi}{\pi}\quad \cancel{\frac{50}{6}\pi + \frac{5}{12}\pi}$$

$$S_{\text{окружн.}} = 10 + \frac{5}{6} = \frac{55}{6}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$S_{\text{треуг.}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin(180-2\varphi)}{2} = \frac{5}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cancel{5\sqrt{5}}\ \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{сумм}} = (S_{\text{окружн}} - S_{\text{треуг}})\,2 = \cancel{\frac{55}{3}}\,15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\cancel{\frac{35}{3}}\ \cancel{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\quad \frac{25}{3}\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\pi\cdot 20}{3}\cdot + \frac{5\cdot\pi}{6}\cdot$$

$$5\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi\cdot 20}{7} + \frac{5\cdot\pi}{3}\quad \frac{25}{3}\pi$$

$$\frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

21100130 (U80441 M1305142)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100130**

ID профиля: **80441**

Вариант 18

Чистовик

$x > \frac{14}{6}$

$\frac{x}{3}+3=a$

$6x-14=b$

$x-1=c$

$c, b, a > 0$

$a, b, c \neq 1$

$\to \log \neq 0$

$\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b = x'$

$\log_b c^2 = 2\log_b c = y'$

$\log_c a = z'$

$\log_c a = y$

$\log_a b = \log_b c \to 1 = \log_b c \cdot \log_b a$

$\log_a b + \log_b c - \log_c a + 1 = \log_c(ac)$

$\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_a b}{\log_c b} = \log_a c$

$a^x = b = c^y$

$a^{\frac{x}{y}} = c$

$\log_a c$

$\log_a b = \log_b c = x$

$4x^2 = \log_a c = \frac{1}{y}$

x – равные логарифмы

$a^x = c^y$

$a^{\frac{x}{y}} = c$

$\log_a c =$

$x^2 = \frac{1}{y}$

$x = y+1$

Произведение всех логарифмов

$(y+1)^2 = \frac{1}{y}$ $\quad \cancel{y+} \; y^3+2y^2+y-1=0$

$\begin{cases} (x=y+1) \\ 4x^2 = \frac{1}{y} \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{y}$

$4\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a =$

$= \frac{4\log_b c}{\log_b a} \cdot \log_a c =$

$= 4\log_a c \cdot \log_c a = 4.$

$\begin{cases} 2x^2 = \frac{\cancel{2}}{2y} \\ x = y+1 \end{cases}$

Пусть равные – t, неравный p

$\cancel{4x^2y=1}$ $\quad \cancel{x^2y'}=4$

$t=1$

$p^2t=4$

$p=t+1$

$(t+1)^2t=4$

$t^3+\cancel{\ldots}\,2t^2+t-\cancel{1}4=0$

$(t-1)(t^2+\cancel{\ldots}\,3t+4)$

$t^3+2t^2+t-4 \,|\, t-1$

$-\;t^3-t^2 \quad | \; t^2+3t+4$

$3t^2+t$

$-\;3t^2-3t$

$4t$

$=$

$=t$

$\to t=1,\; p=2$ $\quad [\; \cancel{\ldots \frac{x}{3}+3=}$

21100130 (U80441 M1305143)

Тогда $t=1$, $p=2$ – всегда, если $t=1$, то   Чистовик

какие-то ~~два логарифма равны.~~ два выраж. равны.

если $\log_c a = 1$, то $c=a \to x-1=\frac{x}{3}+3 \to$

Проверим остальное:

$2x = \cancel{4}\ 12 \to x = \cancel{2}\ 6$

$2\log_a b = 2 \to \log_a b = 1$ $\to$ $a=b=c$.

$2\log_b c = 2 \to \log_b c = 1$ Но это нетак.

$\frac{x}{3}+3 = x-1$

Если $2\log_a b = 2$, то $a=b$, т.е. $x=3$.

Если $2\log_b c = 2$, то $b=c$, т.е. $5x = 13 \to x = \frac{13}{5}$

Тогда $\log_c a = 2$, т.е. $c^2 = a$, Проверка: $2^2 = 4$ – верно

$\log_b c = \frac{1}{2}$, т.е. $b = c^2$ – верно.

тогда $\log_c a = 2$, т.е. $c^2 = a$, т.е. $\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} \neq a$ – неверно

$\longrightarrow$ $x=3$

21100130 (U80441 M1305143)

$\to PK = \sqrt{\cancel{144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12}} \quad \frac{120x^2}{KT}$ Чистовик

$PK \cdot KT = 12x \cdot 10x$

$PK \quad \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{5}$

$$\frac{S_{APC}}{S_{ATC}} = \frac{AP \cdot PC}{AT^2} ; \frac{AP}{TC} =$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{(120)^2 x^{4^2}}{144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12} = 11$$

$$AP \cdot PC \cdot \cancel{\sin 2\alpha} \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 11$$

$$\frac{6}{5} PC^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 11.$$

$$= \cancel{\frac{6}{5} \cdot \frac{11^2\cdot5}{24^2} \cdot \left(144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12\right) x^2 \cdot \frac{2}{5} = 11}$$

$$\frac{PC}{PK} = \frac{AT}{AK} = \frac{\frac{11}{2}\sqrt{5}}{12} = \frac{11\sqrt{5}}{24}$$

$$PC = \frac{11\sqrt{5}}{24} PK$$

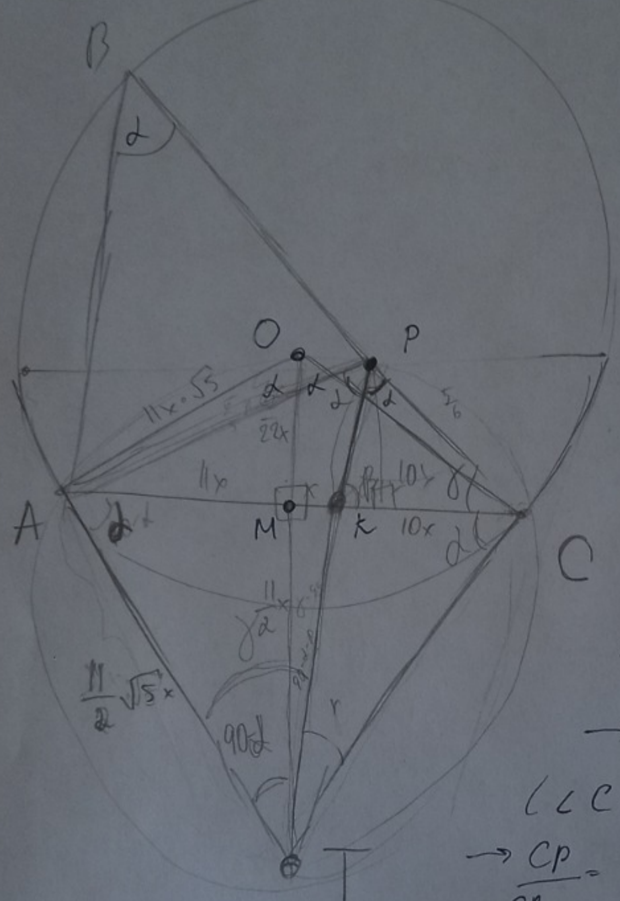
$$11 = \frac{2}{5} \frac{6}{5} \cdot \frac{11^2\cdot5}{24^2} \cdot \left(144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12\right) x^2$$

$$\cancel{x^2 = \frac{24^2\cdot5}{2\cdot6\cdot11\cdot\left(144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12\right)}}$$

$$\cancel{AC = 22x = 22 \cdot \sqrt{\frac{24^2\cdot5}{12\cdot11\cdot\left(144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12\right)}}}$$

$$AC = \cancel{x^2} = 22\sqrt{\frac{11\cdot\left(144+\frac{121\cdot5}{4}-2\cdot11\cdot12\right)\cdot25}{12\cdot(120)^2}}$$

Чистовик:



$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$$

Пусть $\angle B = \alpha$.

$\angle AOC = 2\alpha$ (центральный.

$AT = TC$, $AO = OC \rightarrow$ отрезки касат. OT - общая

$\rightarrow \triangle AOT = \triangle OCT \rightarrow$

$\rightarrow \angle AOT = \angle TOC = \alpha$

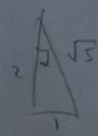
$\rightarrow \overset{\frown}{CT} = 2\alpha \rightarrow \angle TPC = \alpha$

(Забыла сказать, что точки AOPCT лежат на одной окружности, т.к. ~~ATи~~ $\cancel{\angle OAT = 90° \text{ и } \angle}$

$\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180°$, то AOCT - вписанный, а P с ними на одной окружности)

$\rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по 2м углам ($\angle C$ и $\angle KPC = \angle ABC = \alpha$)

$$\rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{CK}{CA} = \frac{5}{11} \rightarrow$$



$$\rightarrow S_{ABC} = k^2 \cdot S_{KPC} = 5\cdot\left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{5}$$

Пусть $AC = 22x$. Тогда, если M середина, то $AM = MC = 11x$

Тогда $OM \perp AAC \rightarrow \frac{AM}{MO} = \frac{1}{2} \rightarrow MO = 22x \rightarrow AO = R =$

$= 11x\sqrt{1+2^2} = 11x\cdot\sqrt{5} \rightarrow \frac{AC}{s}$

$\frac{PC}{AT} = \frac{CK}{AK}$ ($\triangle PKC \sim \triangle AKT$ (по углам)) $= \frac{5}{6} \rightarrow PC = \cancel{\frac{6}{5}}\,\frac{5}{6}\cdot\frac{11x}{2}\sqrt{5}$

(AT $= \cancel{\text{tg}\alpha}\cdot\frac{AO}{\cancel{\text{tg}\alpha}}\,\text{tg}\alpha = \frac{11}{2}x\cdot\sqrt{5}$)

Теор. косинусов: $TK^2 = AK^2 + AT^2 - 2AT AK\cdot\cos\alpha$

$= 144x^2 + \frac{121\cdot5}{\cancel{4}}x^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{11}{2}\sqrt{5}\cdot12x^2 =$

$= 144x^2 + \frac{121\cdot5}{2}x^2 - 2\cdot11\cdot12x^2$

№1 НОК$(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \rightarrow$ ~~в их~~ составе только $3^x\cdot 5^y$ каждое число имеет вид

НОД$(a;b;c) = 3\cdot 5 \rightarrow$ $x \geq 1,\ y \geq 1.$

$a = 3^{a_1}\cdot 5^{a_2}$

$b = 3^{b_1}\cdot 5^{b_2}$ $\quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 1$

$c = 3^{c_1}\cdot 5^{c_2}$ $\quad \max(a_1, b_1, c_1) = 15$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 18.$

Т.е. хотя бы одно из чисел a_1, b_1, c_1 должно быть равно 15. Легче посчитать случаи, когда a_1, b_1 и $c_1 \neq 15$ все.

Таких $14\cdot 14\cdot 14$. А всего $15\cdot 15\cdot 15 \rightarrow$ кол-во троек

$(a_1, b_1, c_1) = 15^3 - 14^3 = x = 15^2 + 15\cdot 14 + 14^2 = 225 + 210 + 196 = 631$

Аналогично, a_2, b_2 и $c_2 \neq 18$, таких случаев 17^3, всего случаев $18^3 \rightarrow$ кол-во подходящих троек $(a_2, b_2, c_2) = 18^3 - 17^3 = y$

$= 18^2 + 17^2 + 17\cdot 18 = 919$

$\rightarrow$ Тогда ответ это $xy =$

$631\cdot 919 = 579889$

$= 35^2 -$

$18 \cdot 18 = 144 + 18\cdot 10 = 324$

$613 + 17\cdot 18$

631×919: $5679 + 631\cdot 10 \ldots = 579889$

$324 + 289 = 613$; $613 + 306 = 919$

$324 : 18 = 18$

$324 - 18 = 306$

$289 + 17 = 306$

Чистовик

21100130 (U80441 M1305143)