Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100102**

ID профиля: **268186**

Вариант 18

Чистовик ① 2021 "Физтех" Математика 11 класс Вариант 18 Часть 1

№ 1

Пусть d - разность прогрессии ($d \in \mathbb{N}$)

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$

$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}$ $\boxed{S = S_7 = 7a_1 + 21d}$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ S + 44 > a_9 a_{10} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ 7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 \end{cases}$$

Складываем неравенства:

$$66d^2 + 44 > 72d^2 + 20$$

$$d^2 < 4 \xRightarrow[\text{т.к. } d \in \mathbb{N}]{} \boxed{d = 1}$$

Подставляем $d=1$ в систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 - (-5-3\sqrt{2}))(a_1 - (-5+3\sqrt{2})) < 0 \end{cases} \iff$$

$D = 10^2 - 4\cdot 7 = 2\cdot 6^2$

$$\iff \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in [-9; -1] \end{cases} \iff a_1 \in \{-9 ... -1\} \setminus \{-5\}$$

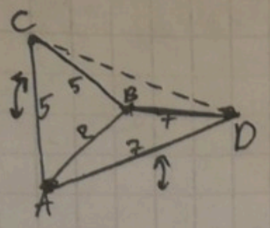
$\boxed{4 < 3\sqrt{2} < 5}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

21100102 (U268186 M1302594)

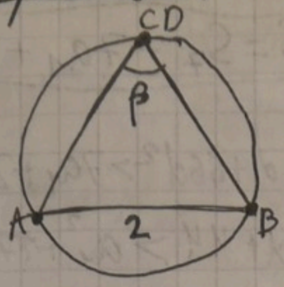
Чистовик ②

№2



1. Рассмотрим проекцию тетраэдра на основание цилиндра. Проекция будет треугольником т.к. CD ⊥ основанию.

Проекция:



Видно, что минимальный радиус цилиндра — это радиус R описанной окружности треугольника.

теорема синусов:

$$2R = \frac{2}{\sin\beta} \Rightarrow R = \frac{1}{\sin\beta}$$

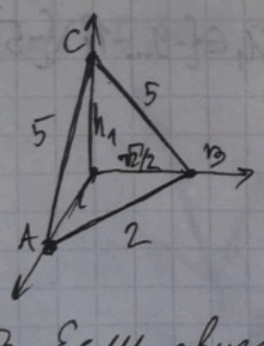
наименьший радиус достигается при $\sin\beta = 1$, т.е. $\beta = 90°$

2. Рассмотрим, когда достигается $\beta = 90°$:

Для этого по-отдельности рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$.

Поскольку их проекции на основание — прямоугольные треугольники, их можно "натянуть" на ~~оси коорд~~ координатные оси:

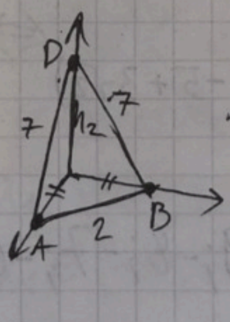
$\triangle ABC$:



т. Пифагора:

$$h_1 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle ABD$:



Аналогично:

$$h_2 = \sqrt{7^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{194}}{2}$$

3. Если двугранный угол при AB — тупой, то итоговая длина

$$CD = h_1 + h_2 = \frac{\sqrt{194} + 7\sqrt{2}}{2}.$$

Если же угол острый, то

$$CD = |h_1 - h_2| = \frac{\sqrt{194} - 7\sqrt{2}}{2}$$

21100102 (U268186 M1302594)

Ответ: $CD \in \left\{\frac{\sqrt{194} - 7\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{194} + 7\sqrt{2}}{2}\right\}$

Чистовик (3)

№3

$(x,y)\in M \Leftrightarrow \exists a,b:$

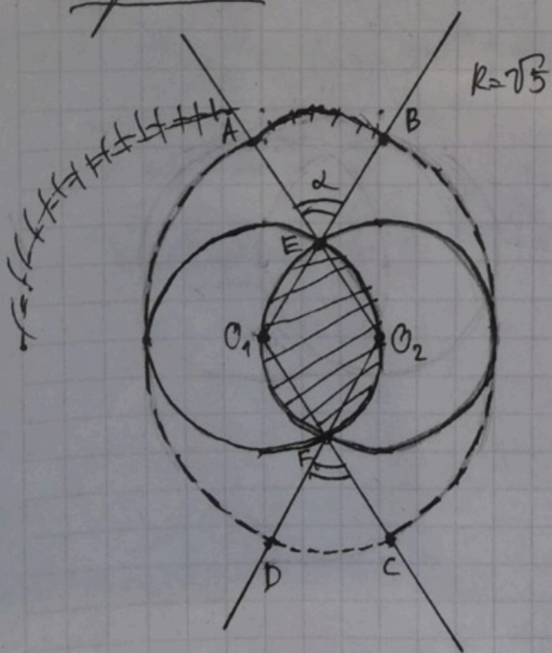
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases} \Longrightarrow$$

1. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5\end{cases}$ – назовём мн-во пар (a,b), удовлетворяющих ~~этой системе~~ фигурой N.

фигура N является пересечением двух окружностей радиуса $\sqrt{5}$ с центрами в точках $(0;0)$ и $(2;-1)$. Заметим, что расстояние между центрами равно радиусу $(\sqrt{5})$.

Фигура M – мн-во точек $(x;y)$ на расстоянии не более чем $\sqrt{5}$ от фигуры N.

2. Чертёж:



Мы избавились от системы координат.

Заштрихована фигура N.

Пунктиром обведена фигура M.

а) Очевидно что на сегментах BO_1C и AO_2D, фиг. M является сегментами окружности $2R$.

На сегментах DFC и AEB – окр. R.

$S=2\cdot\left(\frac{1}{3}S_{R=2\sqrt{5}}+\frac{1}{6}S_{R=\sqrt{5}}\right)=\frac{45}{3}\pi$

$\alpha=60^\circ$

21100202 (U268486 M1302594)

Ответ: $\frac{45}{3}\pi$

2) Черновик! №3

Фигура состоит из всех (x, y), таких что $\exists (a, b)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$$

$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \text{ — центр-0, радиус-}\sqrt{5} \\ a^2-4a+b^2+2b \le 0 \Leftrightarrow (a^2-4a+4)+(b^2+2b+1) \end{cases}$$

$$a^2+b^2 \le 4a-2b$$

$$a^2-4a+b^2+2b \le 0$$

$$(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1) \le 5$$

$$(a-2)^2+(b+1)^2 \le \sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 5 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$2\tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4}$$

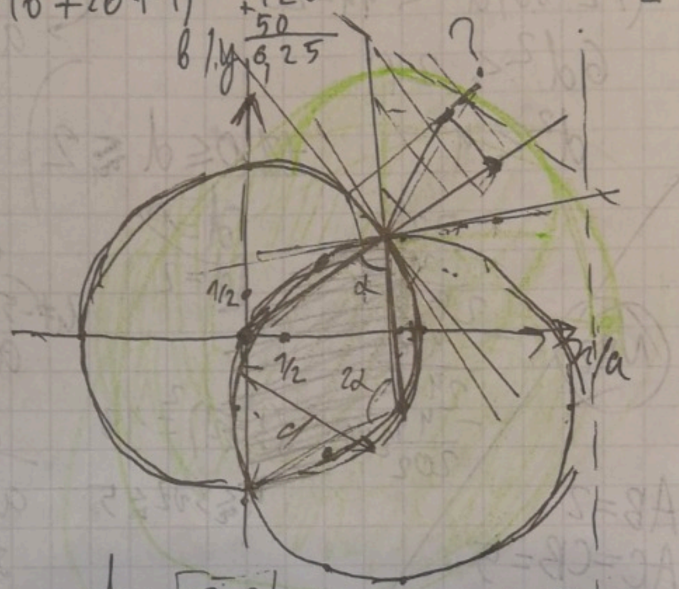
$$\left(\tfrac{9}{4}\right)^2 = \tfrac{81}{16} = 5\tfrac{1}{16}$$

$$2 < \sqrt{5} < 2\tfrac{1}{4}$$

$$2 < \sqrt{5} < 2\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{4}{2} < \sqrt{5} < \tfrac{4\frac{1}{2}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times\ 2,5 \\ \hline 125 \\ +\ 50\ \ \\ \hline 6,25 \end{array}$$



$$S = \pi R^2$$

$$d = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = 60^\circ = \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{6}\cdot 2\pi$$

$$2\alpha = 120 = \tfrac{1}{3}\cdot 2\pi$$

$$S = 2\cdot\left(\tfrac{1}{3} S_{R=2\sqrt{5}} + \tfrac{1}{6}\cdot S_{R=\sqrt{5}}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 20 + \tfrac{1}{6}\cdot\pi\cdot 5\right) = 2\pi\left(\tfrac{20}{3}+\tfrac{5}{6}\right) = \tfrac{45}{3}\pi$$

21100102 (U268186 M1302594)

черновик ①

№1

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$ $\qquad S_7 = 7a_1 + 21d$

709

$S_7 = S$

$a_7 a_{12} > S+20 \Leftrightarrow (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20$

$a_9 a_{10} < S+44 \qquad (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$d > 0$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + 66d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 44 > \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + 72d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 20$

$(72-66)d^2 < 44-20$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$ $\qquad 0 \le d \le 2$

$\left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=2 \end{array}\right.$

$a_1^2 - 7a_1 + (17d-7)a_1 + (66d^2 - 21d + 20) > 0$

$d=1:$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \;\Big|\; a_1^2 + 27a_1 + 202 > 0$

$a_1 \neq -5 \quad (a_1+5)^2 > 0$ $\qquad$ всегда >0

$a_1^2 + (17d-7)a_1 + (72d^2 - 21d - 44) < 0$

$d=1:$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72 = 2\cdot 6^2$

$\left(a_1 - \frac{-10-6\sqrt{2}}{2}\right)\left(a_1 - \frac{-10+6\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

$(a_1 - (-5-3\sqrt{2}))(a_1 - (-5+3\sqrt{2}))$

$(a_1 - (-10))(a_1 - (0)) < 0$

$a_1 \in [-9; -1] \setminus (-5)$

$d=2:$

$a_1^2 + 27a_1$

$24 \cdot 24 = 576 \quad 66 \cdot 4 = 264 \quad 264 - 62 = 202 \quad 27 \cdot 27 \quad \sqrt{169} \quad 5 \cdot 4 = 700$

$72 \cdot 4 = 288 \quad 288 - 42 = 246 \quad 246 - 44 = 202$

$(3\sqrt{2})^2 = 18$

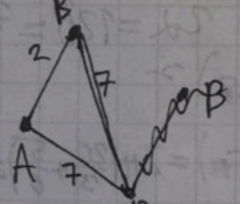
$4 \le 3\sqrt{2} \le 5$

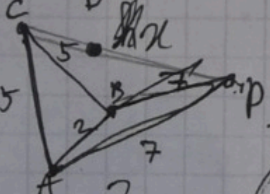
№2

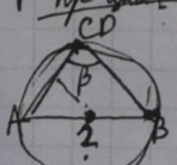
AB=2

AC=CB=5

AD=DB=7







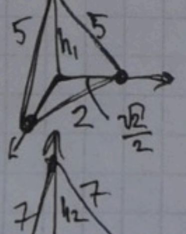
пр-ция CD

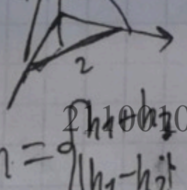
$\frac{2}{\sin\beta} = 2R$

$R = \frac{1}{\sin\beta}$

97 = простое?

$97 \cdot 2 = 194 \qquad (7\sqrt{2})^2 = 98$





$h_1 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$h_2 = \sqrt{7^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{49 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{97}{2}} = \frac{\sqrt{194}}{2}$

$h = \left[\begin{array}{l} h_1 + h_2 \\ h_1 - h_2 \end{array}\right. \qquad h = \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{194} + 7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{194} - 7\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100102**

ID профиля: **268186**

Вариант 18

Вариант 18 **Чистовик ①** Математика 11кл

$\boxed{№4}$

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=3^1\cdot 5^1 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

1. Из второго уравнения следует, что a, b и c не имеют простых делителей, кроме 3 и 5. Значит можно представить числа следующим образом: $a=3^{a_1}\cdot 5^{a_2}$; $b=3^{b_1}\cdot 5^{b_2}$; $c=3^{c_1}\cdot 5^{c_2}$.

2. Система уравнений из условия эквивалентна следующей

$$\begin{cases} \cancel{\min(a_1,a_2,a_3)=1}\ \min(a_1,b_1,c_1)=1 \\ \min(a_2,b_2,c_2)=1 \\ \max(a_1,b_1,c_1)=15 \\ \max(a_2,b_2,c_2)=18 \end{cases}$$

Без потери общности будем считать, что $a_1=1$, $c_1=15$.

Одно из чисел (a_2,b_2,c_2) – 18, одно – 1. $\boxed{1\le b_1\le 15}$

Пусть x – среднее число тройки (a_2,b_2,c_2). $(1\le x\le 18)$.

Если $1<x<18$, то для каждого значения b_1 $\exists$ $3!$ перестановок (a_2,b_2,c_2) мн-ва $\{1,x,18\}$, а значит $3!$ различных троек (a,b,c).

Иначе ($x=1$ или $x=18$) $\exists$ только 3 различных тройки (a_2,b_2,c_2), а значит 3 различных тройки (a,b,c) для всех b_1.

$$N=\underset{\substack{\text{кол-во}\\\text{значений}\\b_1}}{15}\cdot(\underset{\substack{\text{кол-во }x\\1<x<18}}{16}\cdot\underset{\substack{\text{кол-во}\\\text{перестановок}\\\text{длины 3}}}{3!}+\underset{\substack{x=1\\\text{или}\\x=18}}{2}\cdot 3)=1530$$

21100102 (U268186 M1302595)

Ответ: 1530

Вариант 18 | Чистовик (2) | Математика 11 класс

№5

1. Сразу запишем ОДЗ x: $\begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \neq 8/3 \\ x \neq -6 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (6x-14), (x-1), (\frac{x}{3}+3)$ – положительные

2. Пусть

$A = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\frac{\ln(6x-14)}{\ln(\frac{x}{3}+3)}$

$B = \log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\frac{\ln(x-1)}{\ln(6x-14)}$

$C = \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = \frac{\ln(\frac{x}{3}+3)}{\ln(x-1)}$

$\ln x$ – монотонная ф-ция

$$\boxed{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b}$$

$$\boxed{2\ln a = \ln b \Leftrightarrow a^2 = b}$$

3. заметим, что $ABC = 4$.

По условию A, B и C должны быть перестановкой $(X, X, X-1)$.

Значит $X^2(X-1) = 4 \Leftrightarrow X^3 - X^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (X-2)\underbrace{(X^2+X+1)}_{\text{нет корней}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = 2$.

Значит нам просто нужно найти когда $A=1$, $A=2$, $\overset{B=2}{B=1}$, $C=1$, $C=2$.

4. Так и сделаем

$A=1: \Rightarrow (6x-14)^2 = (\frac{x}{3}+3)$

$A=2: \Rightarrow 6x-14 = \frac{x}{3}+3 \Leftrightarrow x=3$

$B=1: \Rightarrow (x-1)^2 = 6x-14$

$B=2: \Rightarrow x-1 = 6x-14 \Leftrightarrow x = \frac{13}{5}$

$C=1: \Rightarrow \frac{x}{3}+3 = x-1 \Leftrightarrow x=6$

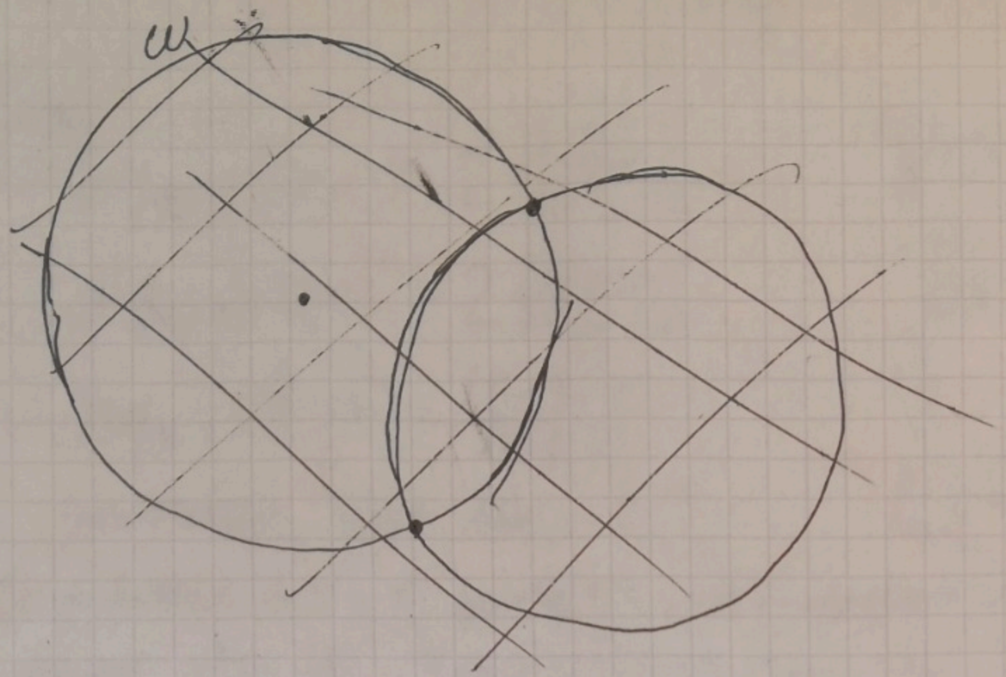
$C=2 \Rightarrow \frac{x}{3}+3 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x=3$ в ОДЗ (корень $-\frac{2}{3}$ не подходит)

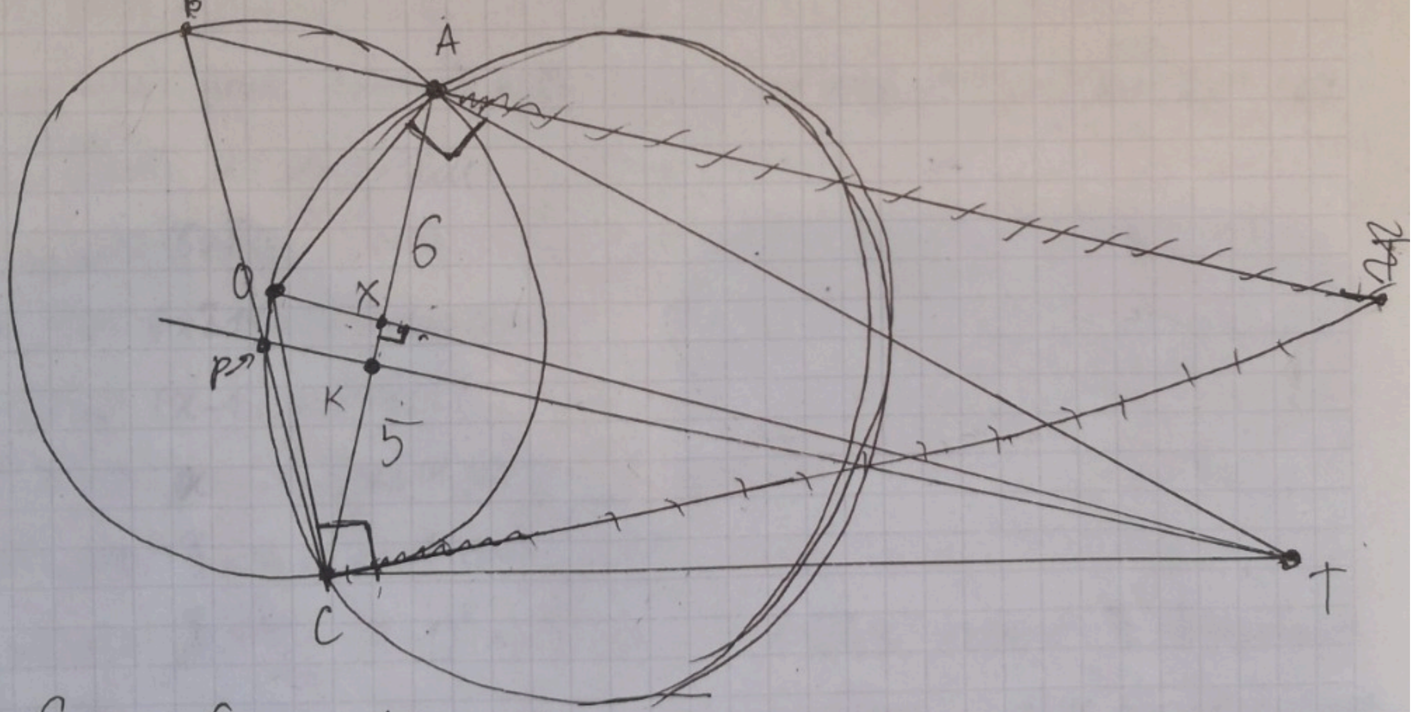
Мы видим что только A и C могут быть равны одновременно и только при $x=3$. При подстановке $x=3$ в B, получается, что $B=1$. Значит 3 подходит

21100102 (U268186 M1302595)

Ответ: $x \in \{3\}$

№6





I) $\dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{6}{5} \iff \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{6}{5}$

Черновик ②

$6x+14=\frac{x}{3}+3$

$5\frac{2}{3}x=-17$

$\frac{17}{3}x=-17$

$x=-3$

$\frac{17}{3}x=-11$

$x=-\frac{33}{17}$

$x-1=6x+14$

$5x=-15$

$x=-3$

$\frac{x}{3}+3=x^2-2x+1$

$x^2-\frac{6}{3}x+1=\frac{x}{3}+3$

$x^2-\frac{7}{3}x-2=0$

$3x^2-7x-6=0$

$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 72 \end{array}$ $\begin{array}{r} 72 \\ +49 \\ \hline 121 \end{array}$

$D=49+12\cdot 6=11^2$

$7-11=-4$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{7-11}{6}=\text{не одз} \\ x=\frac{7+11}{6}=18/6=3 \end{array}\right.$

$6x-14=\frac{x}{3}+3$

$\frac{17}{3}x=17$

$x=3$

$6x-14=x-1$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}=\frac{39}{15}$

$\frac{7}{3}=\frac{35}{15}$

$C=1:\ \frac{2}{3}x=4$

$\frac{1}{3}x=2$

$x=6$

$x^2-2x+1=6x-14$

$x^2-8x-13=0$

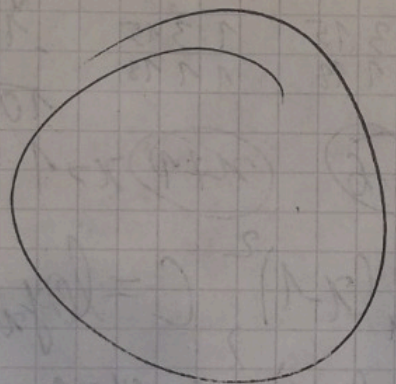
$\frac{x}{3}+3=x^2-2x+1$

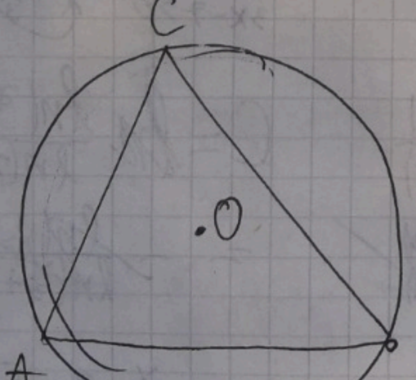
$x^2-\frac{7}{3}x-4=0$

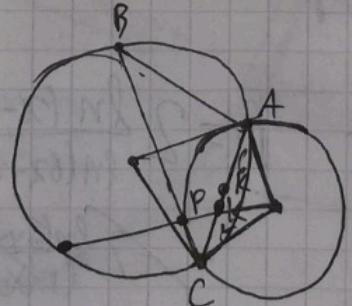
$3x^2-7x-12=0$

$D=49+144=$

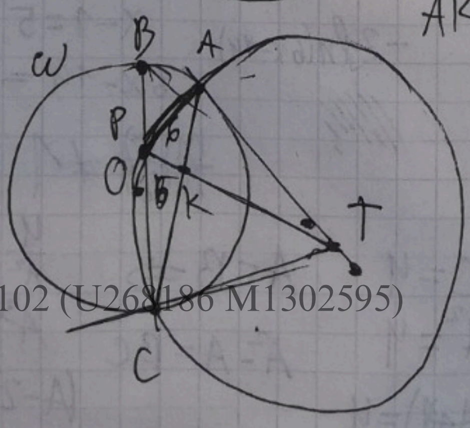
$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 49 \\ \hline 193 \end{array}$



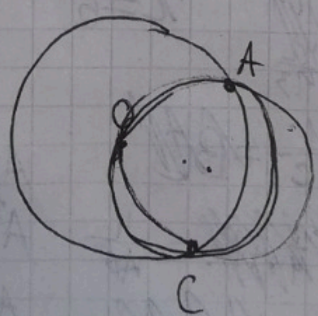




$AK:KC=6:5$



21100102 (U268186 M1302595)



Чорновик (1)

№4 $\begin{cases} gcd(a,b,c) = 3^1 \cdot 5^1 \\ lcm(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

$a_3 \; b_3 \; c_3$
$a_5 \; b_5 \; c_5$

$\min(a_3, b_3, c_3) = 1$
$\min(a_5, b_5, c_5) = 1$
$\max(a_3, b_3, c_3) = 15$
$\max(a_5, b_5, c_5) = 18$

$a_3 = 1 \quad b_3 \quad c_3 = 15$
$a_5 \quad b_5 \quad c_5$
$a_1 \quad b_1 \quad c_1$
$a_2 \quad b_2 \quad c_2$

$\log_a b = -\log_b a$
$\frac{\ln b}{\ln a} = -\frac{\ln a}{\ln b} \Rightarrow -\ln^2 a = \ln^2 b$

$N = K_1 \cdot K_2 \cdot P - 4$
$\log_2 4 = \frac{1}{\log_4 2}$

$K_1 = 15$ (13 different)
$K_2 = 18$ (16 different)

$P = 3! = 6$ $\quad a^x = b \quad b^{-x} = a$

1 1 15 / 1 1 18; 1 1 15 / 18 18 1; 1 1 15 / 1 1 18; 1 15 15 / 1 18 18; 1 15 15 / 18 1 1

1 b, 15 $\quad 16 \cdot 6 + 6 =$

1 3 15 / 1 1 18 $\quad$ 1 3 15 / 1 1 18

$17 \cdot 6 = 102$
$102 \cdot 15$: $510 + 102\_ = 1530$

№5 $\frac{63}{14} = 6$

$x > \frac{7}{3}$ $\quad x \neq \frac{8}{3}$ $\quad x \neq -6$ $\quad x \neq 1$ $\quad x > 1$

$A = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $B = \log_{6x-14}(x-1)^2$, $C = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$A = 2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$ $\quad B = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$6x - 14 > 0$
$3x - 7 > 0$
$x > \frac{7}{3}$ $\quad x \neq \frac{8}{3}$ $\quad \frac{x}{3}+3 \neq 0$ $\quad x > -9$

$A = 2\frac{\ln(6x+14)}{\ln(\frac{x}{3}+3)}$ $\quad B = 2\frac{\ln(x-1)}{\ln(6x-14)}$ $\quad C = \frac{\ln(\frac{x}{3}+3)}{\ln(x-1)}$

$\cancel{-2\frac{\ln(\frac{x}{3}+3)}{\ln(6x+14)}}$ $\quad \cancel{-2\frac{\ln(6x+14)}{\ln(x-1)}}$ $\quad = \cancel{-\frac{\ln(x-1)}{\ln(\frac{x}{3}+3)}}$ $\quad C = -\frac{1}{C}$
$C^2 = -1$

$\underline{A=B}$: $\cancel{\frac{x}{3}+3 = 6x-14}$
$\cancel{(6-\frac{1}{3})x = 14}$
$\cancel{\frac{17}{3}x = 14}$
$\cancel{x = \frac{42}{17}}$

$\frac{x}{3}+3 = x-1$
$4 = \frac{2x}{3}$
$x = 6$

$B = C + 1$
$-2\ln(6x-14)$

$\frac{x}{3}+3 = 5$ $\quad (A^2+A+1) = 6$
$x - 1 = 5$
$6x - 14 = 16$
$\frac{\ln(5)}{\ln(16)} \neq 1$

$A^3 - A^2 + 0A - 4 \mid A - 2$
$A^3 - 2A^2 \quad A^2 + A$
$A^2 + 0A$
$A^2 - 2A$
$2A - 4$

$\underline{B=C}$: $\quad A = \frac{4}{BC} \neq BC$
$C = \frac{4}{AB}$
$B = \frac{4}{AC} \neq AC$

$ABC = 4$
$A^3 - A^2 = 4$
$A^2(A-1) = 4$

$A = B \Rightarrow$
$A^2 - A = BC$

$\frac{4}{A^2} = A - 1$
$A^3 - A^2 - 4 = 0$
$(A-2)(A^2+A+1) = 0$