Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100071**

ID профиля: **270245**

Вариант 18

1 Чистовик

a_1 – первый член

r – разность

r ~~целое т.~~к.

№1 $S = a_1 + \ldots + a_7 = 7a_1 + 21r$

$$\begin{cases} (a_1+6r)(a_1+11r) > 7a_1 + 21r + 20 \\ (a_1+8r)(a_1+9r) < 7a_1 + 21r + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 r + 66r^2 > 7a_1 + 21r + 20 \quad (1) \\ a_1^2 + 17a_1 r + 72r^2 - 24 < 7a_1 + 21r + 20 \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1^2 + 17a_1 r + 72r^2 - 24 < a_1^2 + 17a_1 r + 66r^2$

$6r^2 < 24$

$r^2 < 4$

r – целое, т.к. $a_2 - a_1 = r$ a_1 и a_2 – целые по условию

$r > 0$, т.к. последовательность возраст. – по усл.

$\Rightarrow r = 1$

Подставляем в (1) и (2)

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 - 24 < 7a_1 + 21 + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow (a+5)^2 > 0 \quad a \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \Rightarrow D = 100 - 28 = 72 \end{cases}$$

$$a = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = -5 \pm \sqrt{18}$$

$\Rightarrow$ Решение системы: $a \in (-5-\sqrt{18}; -5) \cup (-5; -5+\sqrt{18})$

2

Чистовик

т.к. a - целое, то a может принимать следую-

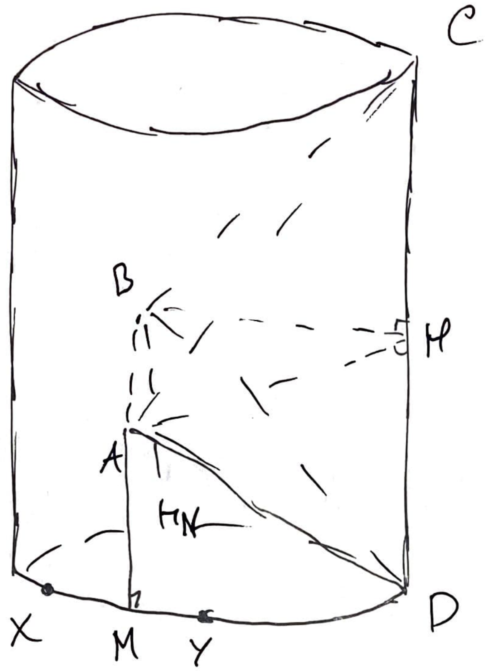
a — щие значения $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ.

3 ~~В~~

Чистовик.

№2



$AB = 2$

$AC = BC = 5$

$AD = BD = 7$

1) $\Delta ACD = \Delta BCD$ по 3 сторонам $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ высота опущенные из A и B на CD попадут в одну точку H $\Rightarrow$ $(ABH) \perp CD$

а. т. к. $CD \perp (DXY)$, то $(ABH) \parallel (XYD)$

~~ABH~~ $\Rightarrow$ AB лежит в плоскости, параллельной основанию $\Rightarrow$ $AB \leq 2r$

$$r \geq \frac{AB}{2} = 1$$

Т.к. по условию радиус наименьший, то $\underline{r = 1}$

2) Опустим $\perp$ из A и B на (XYD), ~~эти длин~~ ~~AM = BN~~, т

$\Delta AMD = \Delta BND$

1) $\angle AMD = \angle BND = 90°$

2) $AD = BD$ – по ус.

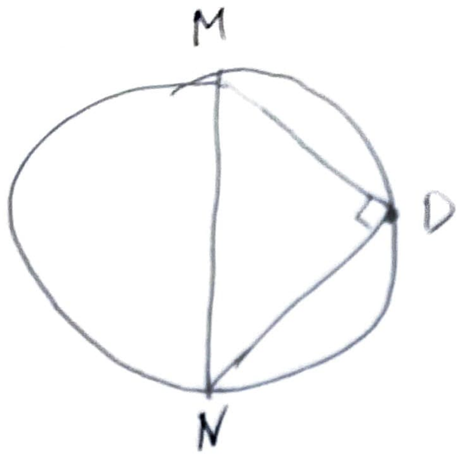
3) $AM = BN$, т.к. $AB \parallel XYD$

$\Rightarrow ND = MD$

4

И MN - диаметр

Чистовик



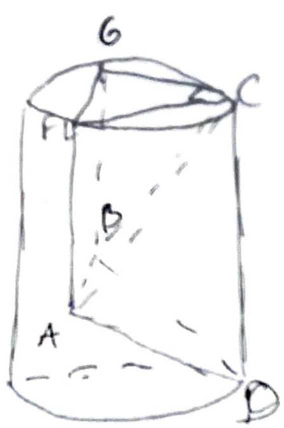
По т. Пифагора: $MD^2+ND^2=MN^2$

$\Rightarrow MD=ND=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ По т. Пифагора $\triangle AMD$:

$AM=\sqrt{AD^2-MD^2}=\sqrt{47}$

3) Аналогично, спроецировав A и B на верхнее основание, ~~в точки F и G~~ ~~получим, что~~ в точки F и G, получим, что $\triangle AFC = AGC$



1) $AC = BC$ – по усл.

2) $\angle AFC = \angle BGC = 90^\circ$

3) $AF = BG$ a, т.к. $AB \parallel (GFC)$

$\Rightarrow$ ~~GF~~ =

По т. Пифагора $\triangle FGC$: $FC = GC = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ По т. Пифагора $\triangle AFC$: $AF=\sqrt{AC^2-FC^2}=$

$= \cancel{\sqrt{27}}$ $\sqrt{23}$

5)

Чистовик

$\Rightarrow$ $CD = AF + AM = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

Ответ

№ 6 Чистовик.

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 5 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5) & (2) \end{cases}$$

Построим график (2) в координатах $(b;a)$

1) $4a-2b \le 5$

$b \ge 2a - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow a^2+b^2 \le 4a-2b$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

Окружность

2) $4a-2b \ge 5$

$b \le 2a - \frac{5}{2}$

$a^2+b^2 \le 5$

окружность

т. Докажем, что прямая $b = 2a - \frac{5}{2}$ содержит в себе точки пересечения этих окр:

1) $\begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ b = 2a - \frac{5}{2} \end{cases}$

$(a-2)^2+\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2 \le 5$

$a^2-4a+4+4a^2-6a+\frac{9}{4}-5=0$

$a^2-2a+\frac{1}{4}=0$

$a = \frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

7

Чистовик

2) ~~$a =$~~

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b=2a-\frac{5}{2} \end{cases}$$

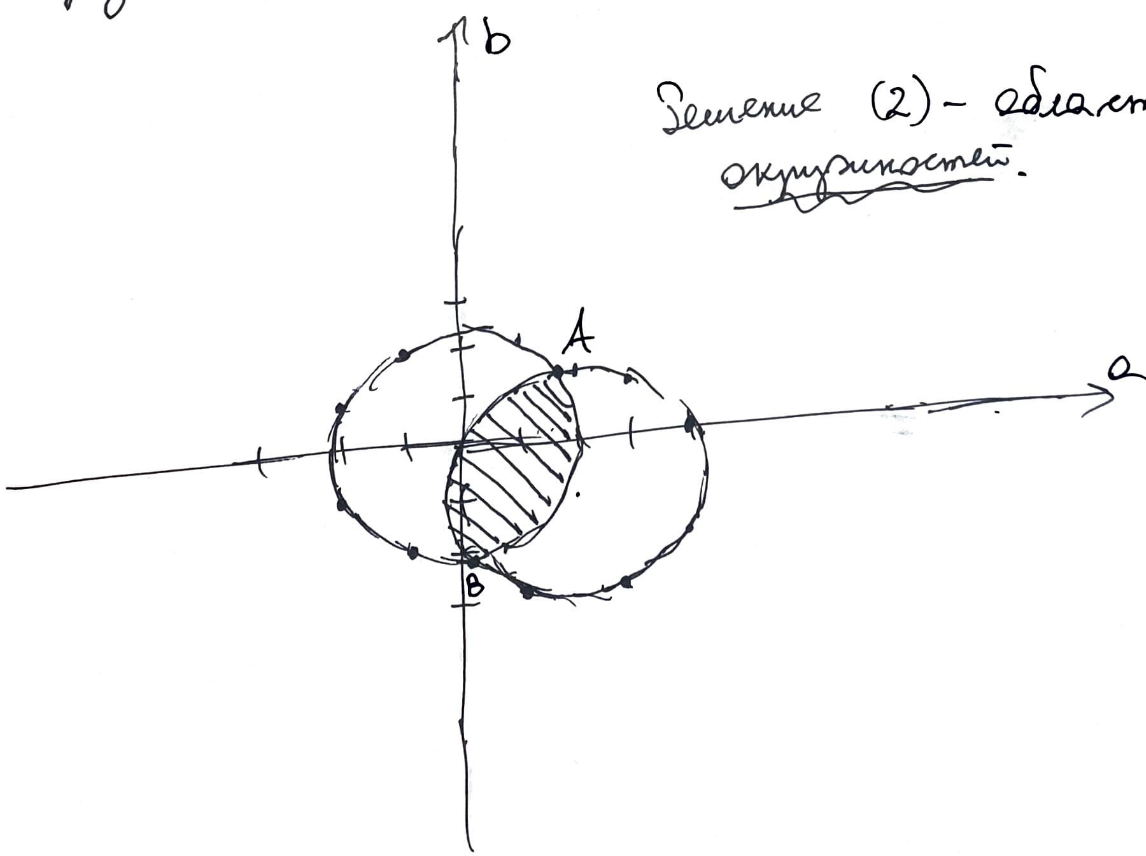
$$a^2+\left(2a-\frac{5}{2}\right)^2=5$$

$$a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}-5=0$$

$$a^2-2a+\frac{1}{4}=0$$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ $b=2a-\frac{5}{2}$ содержит в себе точки пересечения окружностей и график (2) выглядит:



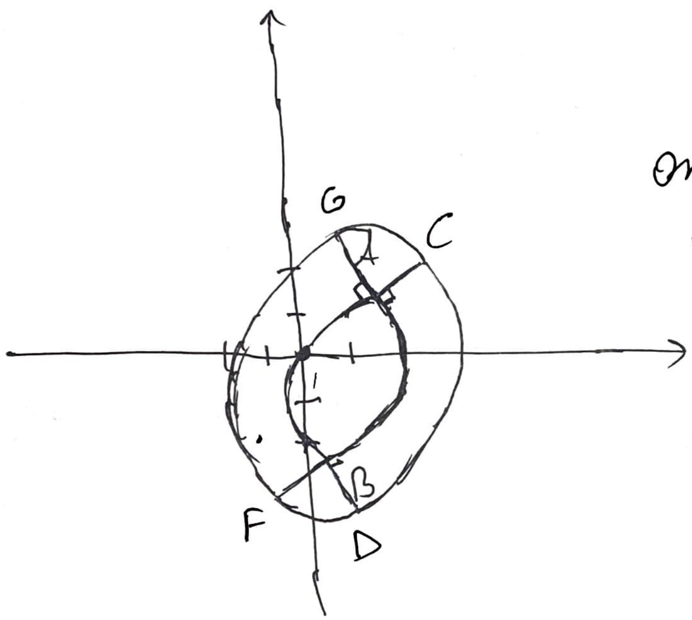
Решение (2) – область пересечения окружностей.

8 Чистовик

~~Найдем $(x;y)$ при которых у системы одно решение $\Rightarrow$ (1) касается (2) $(x;y)$ - центр (4) окружности~~

$\Rightarrow$ ~~нужно найти площадь~~

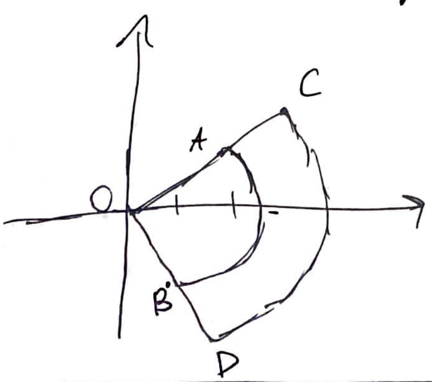
Найдем площадь множества точек, расстояние от которых до фигуры (2) меньше или равно $\sqrt{5}$. Эта площадь и будет ответом.



~~ABFG~~ - ~~$BF = FC$~~ $BF = BD = AG = AC = \sqrt{5}$

Найдем площадь BDCA:

Т.к. $BD \perp \overset{\frown}{AB}$ и $CA \perp \overset{\frown}{AB}$, то AC и BD пересекутся в $(0;0)$ - центре этой окружности



Как было найдено раньше, координаты:

$A\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$

$B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$

9

Чистовик

$$\Rightarrow AB^2 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 15$$

$$AB = \sqrt{15}$$

По т. cos $\triangle OAB$:

$$\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{5+5-15}{2 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ ~~cos AOP~~ $\angle AOB = 120^\circ$

$S_{\overline{OAB}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = \frac{5}{3}\pi$ – площадь сектора OAB

$S_{\overline{OCD}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 = \frac{20}{3}\pi$ – площадь сектора OCD

$\Rightarrow S_{ABDC} = \left(\frac{20}{2} - \frac{5}{3}\right)\pi = 5\pi$

В силу симметрии: $S_{GABF} = S_{ABDC} = 5\pi$

GAC и FBD – четверти окружностей с радиусом $\sqrt{5}$. Их суммарная площадь:

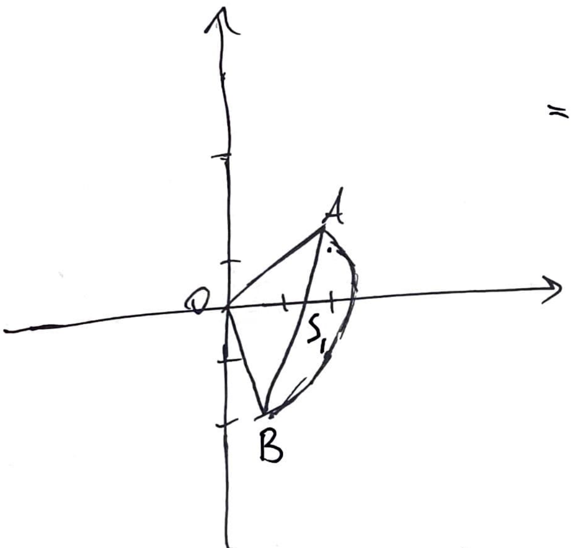
~~$2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 10\pi$~~

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot \pi = \frac{5}{2}\pi$$

10 Чистовик

Осталось посчитать площадь фигуры (2):

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$



$$\Rightarrow S_1 = S_{\overset{\frown}{OAB}} - S_{AOB} = \frac{5\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

т.к. S_1 – половина фигуры (2),

то $S_2 = 2 \cdot S_1 = \cancel{5\pi\ 5}$

$\frac{10\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$ – площадь всей фигуры (2)

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{10\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 5\pi + \frac{5\pi}{2} =$

$= \cancel{\frac{95\pi}{3} - 5\sqrt{3}/2}$ $\quad \frac{95\pi}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

S $\qquad a_7 a_{12} > S+20$ $\qquad$ Черновик

$a_8 a_{10} < S+44$

$a_1 - ?$

S

a_1

a_1+r

$\vdots$

a_1+6r

$S = 7a_1 + 21r$

$$\begin{cases} (a_1+6r)(a_1+11r) > 7a_1+21r+20 \\ (a_1+8r)(a_1+9r) < 7a_1+21r+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1r + 6a_1r + 66r^2 > 7a_1+21r+20 \\ a_1^2 + 8a_1r + 9a_1r + \underset{-24}{72r^2} < 7a_1+21r+\cancel{44}\,20 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2} + 17\cancel{a_1}r + 72r^2 - 24 < \cancel{a_1^2} + 11\cancel{a_1}r + \cancel{6}a_1r + 66r^2$

$6r^2 < 24$ $\qquad \cancel{r \neq 2}$

$\cancel{r^2 < 4}$ $\qquad r=1$ ✓

$r^2 < 4$ $\qquad r=0$

$r=-1$

$a_1^2 + 17a + 66 > 7a + 41$ $\qquad$ 24, 41, 65

$a^2 + 10a + 25 > 0$

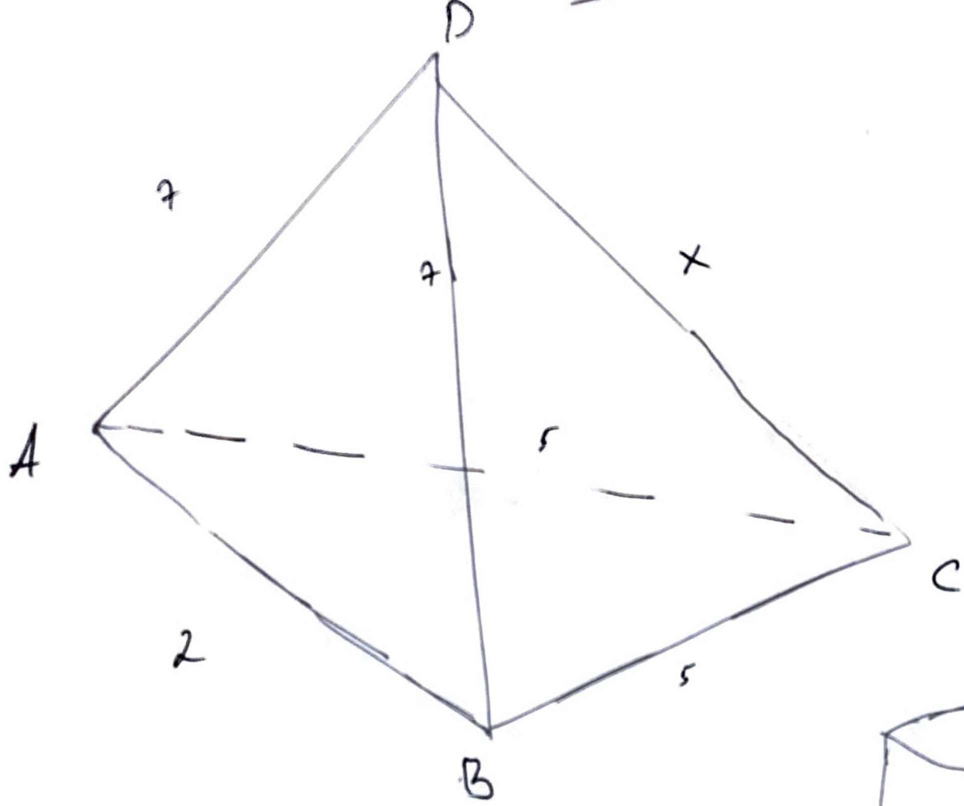
72 $\qquad$ 59, 13, 46

$8 \cdot 5 = 18 \cdot 4$

$a^2 + 10a + 16 > 0$

$a^2 + 17a + 72 - 24 > 7a + 41$

Черновик



$AB = 2$

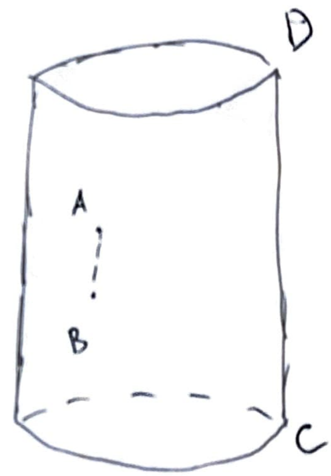
$AC = BC = 5$

$AD = DB$

Все вершины на бок. вн пов.

$CD \parallel$ оси цилиндра

$r = r_{min}$



CD - ?

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 25 \\ a^2 + b^2 \leq \min(4a - 2b, 5) \end{cases}$$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,5$

$-5 - 4,5 =$

-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1

1) $a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$ ‖ **Черновик** ‖

$4a-2b \le 5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$4a-2b>5$

$a^2+b^2 \le 5$

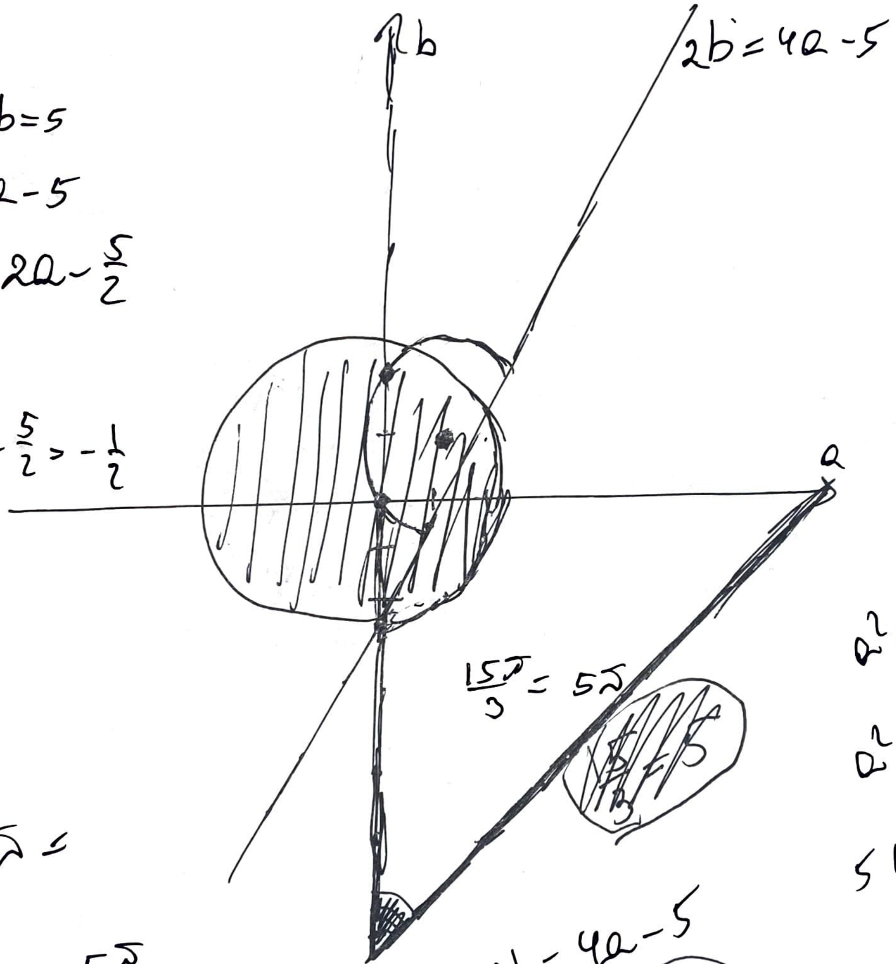
$4a-2b=5$

$2b=4a-5$

$b=2a-\frac{5}{2}$

$a=1$

$b=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$



$\frac{\phi}{4}$

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot5\pi=$

$\frac{120}{360}\cdot5=\frac{5\pi}{3}$

$\frac{120}{360}\cdot20=\frac{20\pi}{3}$

$2b=4a-5$

$b=2a-\frac{5}{2}$

$\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

$a^2+\left(2a-\frac{5}{2}\right)^2\le5$

$a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}-5\le0$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0$

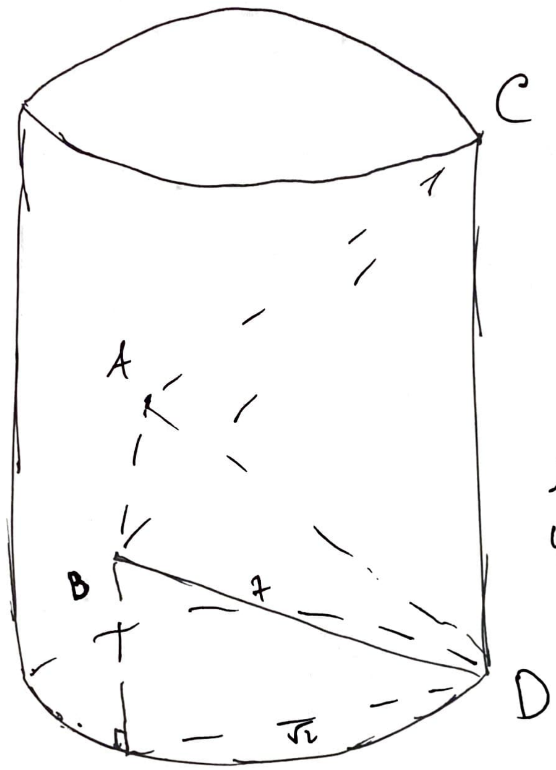
$a^2-2a+\frac{1}{4}=0$

$4a^2-8a+1=0$

$64-4\cdot4=48$

$\frac{8\pm\sqrt{48}}{8}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Черновик



$AB=2$

$AC=BC=5$

$AD=7=DB$

$x=\sqrt{2}$

$25-2=23$

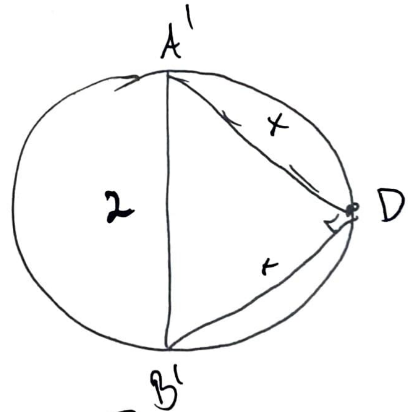
$49-2=47$

$\boxed{x=\sqrt{2}}$

$\boxed{49-2=47}$

$\boxed{25-2=23}$

$r=r_{min}$



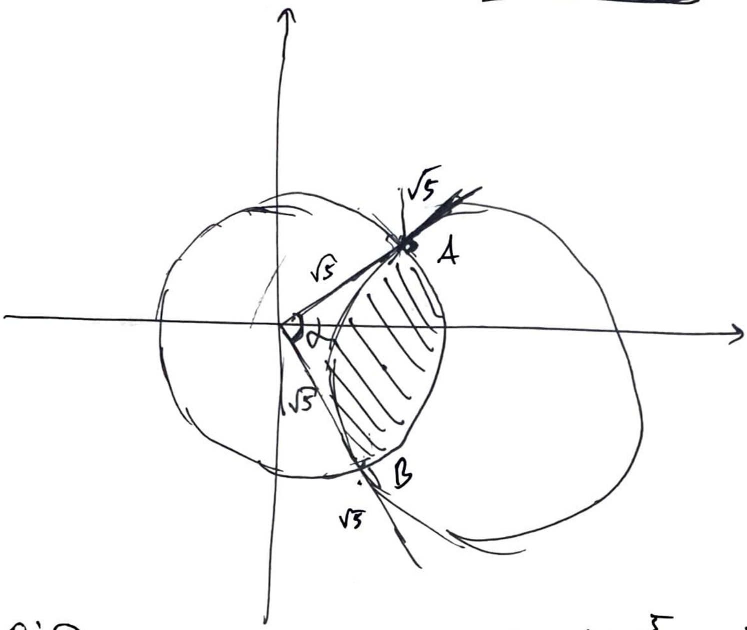
$h_1=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$

$h_2=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$

$r=1$

AB – диаметр.

Черновик



$b = 2a - \frac{5}{2}$

$0;0$

$2+\sqrt{3}-\frac{5}{2} = \sqrt{3}-$

$2-\sqrt{3}-\frac{5}{2} = -$

$A\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2}$

$B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2};\ -\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$

$-\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2} = -2\sqrt{3}$

$AB^2 = 3 + 12$ $\quad AB = \sqrt{15}$

$\cos\alpha = \frac{5+5-15}{2\cdot 5} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \underline{\alpha = 120^\circ}$

$S = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 20 = \frac{20}{3}\pi$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 = \min(4a-2b;5) \end{cases}$$

Черновик

$4a-2b<5$

$2b>4a-5$

$b>2a-5/2$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

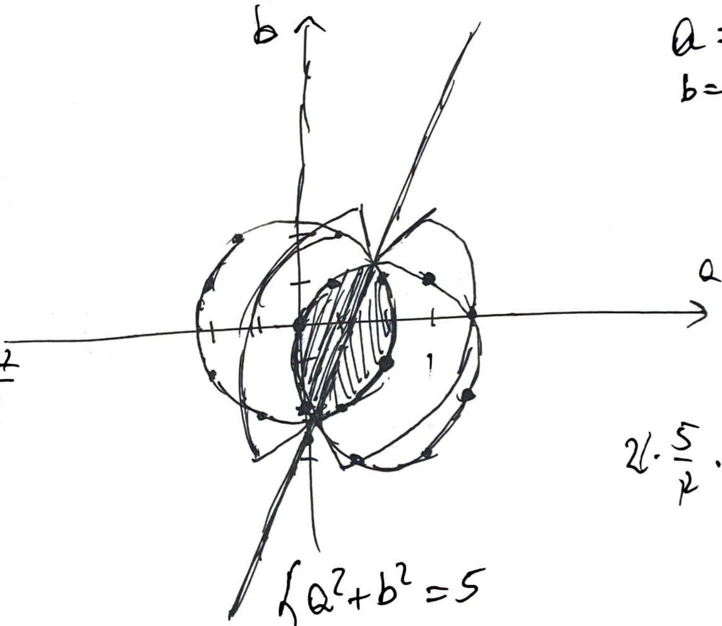
$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$4a-2b>5$

$b<2a-5/2$

$a^2+b^2<5$



$a=3$
$b=0$

$b=1$
$\underline{a=2}$

$\frac{3}{4}-4=\frac{3-16}{4}=\frac{-7}{4}$

$2\cdot\frac{5}{2}\cdot 2$

$b=-1$
$a=2$

$b=2a-\frac{5}{2}$

$a=0 \quad b=-\frac{5}{2}$

$a=1 \quad b=-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b=2a-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$a^2+(2a-\frac{5}{2})^2=5$

$a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}-5=0$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0$

$a^2-2a+\frac{1}{4}=0$

$(a-2)^2+(2a-\frac{3}{2})^2 \le 5$

$a^2-\cancel{4a}+4+4a^2-6a+\frac{9}{4}-5 \le 0$

$\cancel{a^2}\ 5a^2-\cancel{10a}+\frac{5}{4}\le 0$

$a^2-2a+\frac{1}{4}$

$D=4-\frac{1}{4}\cdot 4=3$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100071**

ID профиля: **270245**

Вариант 18

1

Чистовик.

№2

два числа равны a, другое $a-1$

Рассмотрим произведение этих чисел:

$$a^2(a-1) = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=2\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=4$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$\cancel{a^3-2}a$

$a^3-2a^2+a^2-4=0$

$a^2(a-2)+(a-2)(a+2)=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$D'=1-8=-7<0$, нет. реш

$\Rightarrow a=2$. Два логарифма равны двум, третий единице.

$\cancel{1)\ \log_{\sqrt{x+\frac{x}{3}}}(6x-14)=1 \Rightarrow \sqrt{x+\frac{x}{3}}=6x-14\ |^2}$

$\cancel{\log_{6x-1}}$

$\cancel{x}\ \frac{4x}{3}=36x^2$

2 | Чистовик

1) $\log_{6x-14}(x-1)^2=1$

$(x-1)^2=6x-14$

$x^2-2x+1=6x-14$

$x^2-8x+15=0$

$x=3$

$x=5$

а) $x=3$ $\quad \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_2 4=2$

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=\log_2 4=2$

$\Rightarrow$ $x=3$ – подходит

б) $x=5$ $\quad \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{\sqrt{\frac{14}{3}}}16\neq 2$

$\Rightarrow$ $x=5$ – не подходит

2) $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=1$ $\qquad x-1=\frac{x}{3}+3$

$\frac{2x}{3}=4$

$x=6$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{\sqrt{5}}22\neq 2$

$x=6$ – не подходит

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1 \Rightarrow \log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$6x-14=x-1$

$5x=13$; $x=\frac{13}{5}$

3

Чистовик

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{\sqrt{\frac{13}{15}+3}}\left(\frac{78}{5}-14\right)=$$

$$=\log_{\sqrt{\frac{58}{15}}}\left(\frac{8}{5}\right)\neq 1$$

$\Rightarrow x=\frac{13}{5}$ - не подходит

Ответ: ~~$x\neq 6$~~ $x=3$

4

Чистовик

№1 $\text{Нод}(a;b;c)=15=3\cdot5$

$\text{НоК}(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$

Следовательно, числа представимы в виде:

$a=3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}$

$b=3^{\beta_1}\cdot5^{\beta_2}$

$c=3^{\gamma_1}\cdot5^{\gamma_2}$

$$\begin{cases}\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1\\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1\\ \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=15\\ \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=18\end{cases}$$

~~$\text{Нод}(a;b;c)=$~~

из условия

~~$\min(\alpha_1$~~

$$\begin{cases}\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1\\ \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=15\end{cases}\Rightarrow$$ среди этих чисел есть 1 и 15, и третье число $1\le x\le15$

1) для единицы есть 3 возможности

2) для 15 есть 2 варианта, т.к. один уже занят 1

3) для x есть 1 вариант расположения и 15 вариантов значение

~~$\Rightarrow$ Всего из~~ ~~сметить~~ ~~$3\cdot2\cdot15=9$~~ ~~решений~~

5)

Чистовик

~~min~~

$\cancel{\begin{cases} \min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1 \\ \max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 18 \end{cases}}$

~~=> одно из чисел = 1~~

~~второе = 18~~

~~тогда третье $1 \le y \le 18$~~

~~1) Для единицы есть~~

а) $2 \le x \le 14$ в этом случае, все решения системы будут различны

В этом случае $13 \cdot 3 \cdot 2$ решений $= 78$

б) $x = 15$ будет ~~вся~~ всего 3 реш:

(15; 15; 1)

(15; 1; 15)

(1; 15; 15)

в) $x = 1$ также будет только 3 реш:

(1; 1; 15)

(1; 15; 1)

(15; 1; 1)

=> Эта система имеет: $78 + 6 = 84$ реш.

№6) Чистовик

$$\begin{cases} \min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1 \\ \max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 18 \end{cases}$$

одно из чисел – 1
второе – 18
третье $1 \le y \le 18$

1) Для 1 есть 3 варианта расположения
2) Для 18 есть 2 варианта, т.к. один уже занят 1
3) Для ~~x~~ y есть 1 вариант располож. и 18 вариантов значения

а) $2 \le \cancel{x}^{y} \le 1\cancel{8}^{7}$, в этом случае все решения различны и их $16 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

б) $\cancel{x}^{y} = 18$, будет 3 реш.

(1; 18; 18)
(18; 1; 18)
(18; 18; 1)

в) $y = 1$, 3 реш.

(1; 1; 18)
(1; 18; 1)
(18; 1; 1)

=> у этой системы $96 + 6 = 102$ реш.

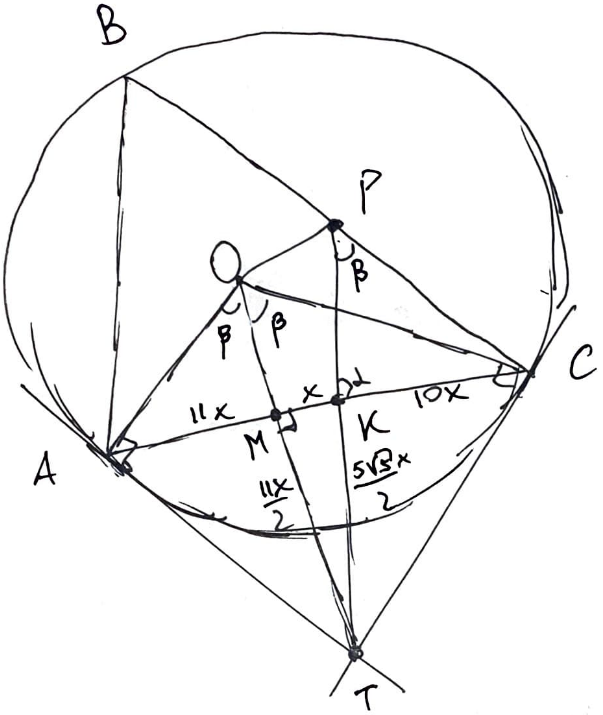
№7) Чистовик

Т.к. обе эти системы независимы друг от друга, то ~~в~~ таких троек чисел: $102 \cdot 84 =$

$= \underline{8568}$ – отв

8

Чистовик



1) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ – OA и OC – радиусы к касательным

=> OATC – вписанный и т.к. ~~OCPO~~ ACPO – тоже впис.

то ATCPO – вписанный

2) $\angle AOT = \angle TOC = \beta$ (т.к. $\triangle OAT = \triangle OCT$)

$\angle TOC = \angle TPC = \beta$ (вписанные, опир. на одну дугу)

$\angle ABC = \angle \frac{AOC}{2} = \beta$ (вписанный и центральный, опирающиеся на одну дугу)

9

Чистовик

3) $\Rightarrow PK \parallel AB$

$\Rightarrow$ ~~△S~~ $\triangle ABC \sim \triangle KPC$

$k = \cancel{\frac{AK}{KC}}$

$k = \frac{AC}{KC} = 1 + \frac{AK}{KC} = 1 + \frac{S_{APK}}{S_{KCP}} = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}$

$\Rightarrow S_{ABC} = k^2 \cdot S_{KPC} = \frac{121}{25} \cdot 5 = \frac{121}{5}$

4) $tg\beta = \frac{1}{2}$ ~~x~~. $AC - ?$

Пусть $AK = 12x$, тогда $KC = 10x$

Т.к. M – середина AC, то $AM = 11x$ и $MK = x$

5) Из прямоуг. △ AOM:

$$tg\beta = \frac{AM}{OM} = \frac{1}{2} = \frac{11x}{OM} \Rightarrow OM = 22x$$

6) Т.к. AOCT – вписанный, то произведения отрезков диагоналей равны:

$$OM \cdot MT = AM \cdot MC$$

$$22x \cdot MT = 11x \cdot 11x$$

$$MT = \frac{11x}{2}$$

7) По т. Пифагора △ MKT:

$$KT = \sqrt{\frac{121x^2}{4} + x^2} = \frac{5\sqrt{5}x}{2}$$

10

Чистовик

8) Т.к. $BPCT$ – вписан, то произведения отрезков диагоналей равны:

$$AK \cdot KC = KT \cdot KP$$

$$12x \cdot 10x = \frac{5\sqrt{5}}{2}x \cdot KP$$

$$KP = \frac{48\sqrt{5}}{5}$$

9) $$S_{PKC} = PK \cdot KC \cdot \sin\alpha$$

$$S_{MKT} = MK \cdot KT \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MKT}}{S_{PKC}} = \frac{MK \cdot KT}{PK \cdot KC} = \frac{x \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2}x}{\frac{48\sqrt{5}}{5}x \cdot 10x} = \frac{5}{48 \cdot 4}$$

$$S_{MKT} = \frac{5}{48 \cdot 4} \cdot S_{PKC} = \frac{5}{48 \cdot 4} \cdot 5 = \frac{25}{48 \cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot MK \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{11x}{2} = \frac{11x^2}{4}$$

$$\frac{25}{48 \cdot 4} = \frac{11x^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{25}{48 \cdot \cancel{4}\,11} =$$

$$x = \frac{5}{4\sqrt{33}}$$

$$\Rightarrow AC = 22x = \frac{22 \cdot 5}{4\sqrt{33}} = \frac{5\sqrt{33}}{6}$$

Ответ: а) $\frac{121}{5}$ б) $\frac{5\sqrt{33}}{6}$

3)

~~Чистовик~~ $\boxed{\text{Черновик}}$

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$

$6x-14=\sqrt{\frac{x}{3}+3}\ \Big|^2$

$36x^2-168x+196=\frac{x}{3}+9$

$36x^2-\frac{505}{3}x+187=0$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\, 12 \\ \hline 28 \\ 140 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times\, 3 \\ \hline 504 \end{array}$$

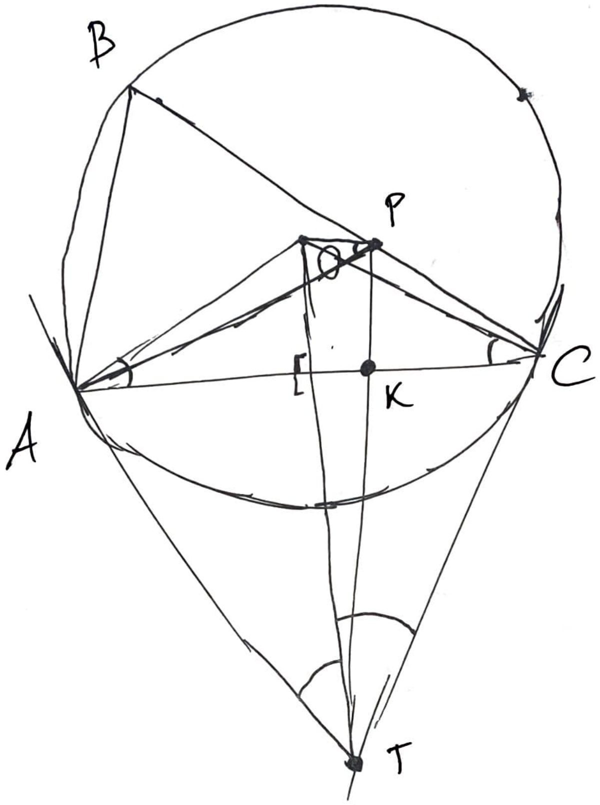
2

$$\begin{array}{r} 36 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$168 + \frac{1}{3} = \frac{501}{3}$

$S_{APK} = 6$

$S_{APC} = 5$



$$\begin{array}{r} 15 \\ 6 \\ \hline 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 6 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

$\frac{5}{3} + 3 = \frac{14}{3}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 14 \\ \hline 22 \end{array}$$

Черновик

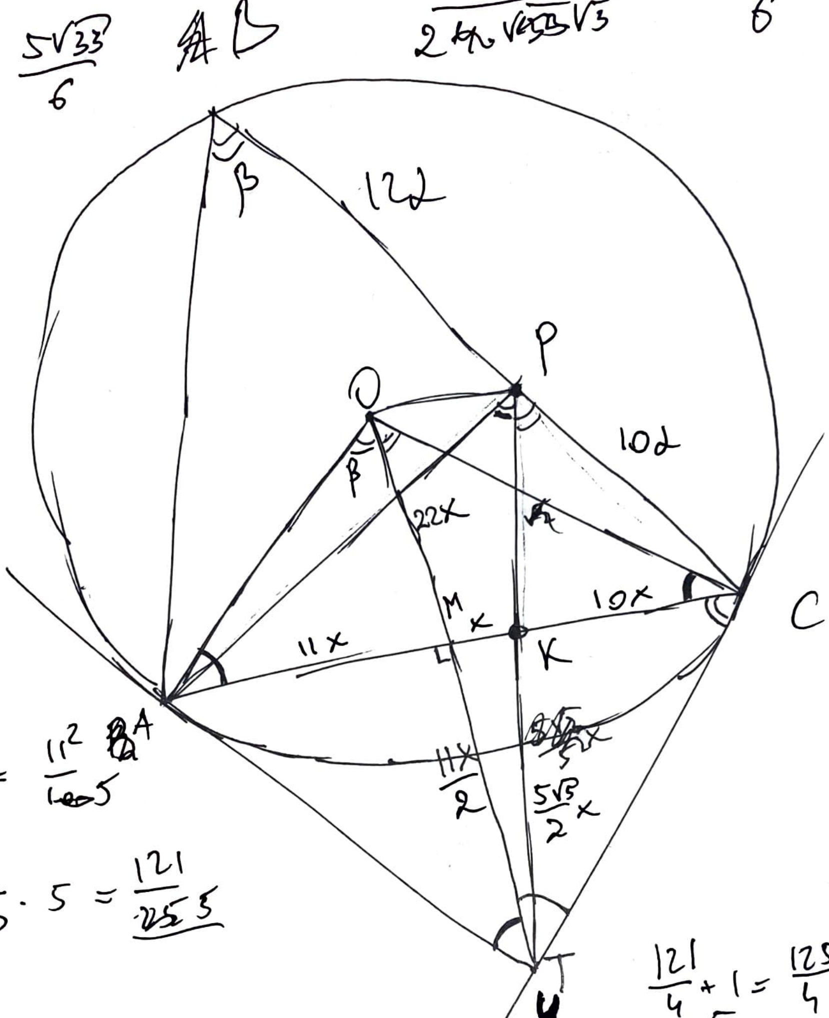
$$\begin{array}{r} 102 \\ 84 \\ \hline 408 \\ 8160 \\ \hline 8568 \end{array}$$

Черновик

$\frac{22}{\sqrt{11}}$

$\frac{11 \cdot 5}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{33}}{6}$

$\frac{2\sqrt{11} \cdot 5}{2\sqrt{11}\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{33}}{6}$



13
6
+8
84

16
6
96

102
84
408
816
8568

$\frac{S}{5} = \frac{22}{10} = \frac{11^2}{5}$

$S = \frac{121}{10} \cdot 5 = \frac{121}{2 \cdot 5}$

$\angle ABC =$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$

$AC - ?$

$x - ?$

$\frac{121}{4} + 1 = \frac{125}{4}$

$12x \cdot = \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot y$

$y = \frac{48\sqrt{5}}{5}$

$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} - ?$

$\frac{AP}{PC} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

$OM = 22x$

$x^2 = \frac{25}{48 \cdot 11}$

$x = \frac{5}{4\sqrt{33}}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{11x}{OM} = \frac{1}{2}$

$\frac{121}{4} + 1 = \frac{125}{4}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$2x \cdot MT = 11x \cdot 11x$

$\frac{5\sqrt{5}}{2}x$

$AK = 12x$

$KC = 10x$

MT

$\frac{6}{S_{MKT}} = \frac{10x \cdot}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{1}$

$S_{MKT} = \frac{3}{2} = \frac{11x^2}{4}$

$\frac{S}{5} = \frac{\frac{48}{5} \cdot 2}{x \cdot \frac{}{2}} = \frac{48}{5} \cdot 4 =$

$x = \ \cdot PK$

$PK = x\sqrt{2}$

$\frac{S}{5} = \frac{x \cdot \frac{}{2}}{2x \cdot \frac{48}{5}} = \frac{5}{48 \cdot 4}$

$S = 48 \cdot 4$

$S = \frac{25}{48 \cdot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11x}{2} \cdot x$

Черновик

№2.

a

$\cancel{a}$

$\cancel{a-1}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\frac{x}{3}+3>0$

$\frac{x}{3}+3\neq 1$

$6x-14>0$

$6x-14\neq 1$

$x-1>0$

$x-1\neq 1$

$2\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\cdot\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$

$= a^3-a^2-4=0$

$a^3-2a^2+a^2-4=0$

$a^2(a-2)+(a-2)(a+2)=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$\cancel{a^3-4a^2}$ $a^3-2a^2+a^2-4=0$

$a^2(a-2)+(a-2)(a+2)=0$

$(a-2)$

НОД$(a;b;c)=15$

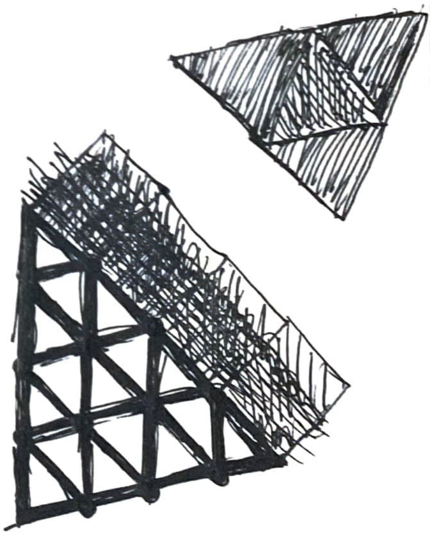
НОК$(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18}$

$abc=3^{16}\cdot 5^{19}$

$a=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$

$b=3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$

$c=3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$



$\cancel{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1}$

$\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=$

$\cancel{\min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=1}$

$\min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1$

$\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=15$

$\cancel{\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3}$

~~min d_1+~~

~~min d_1+~~

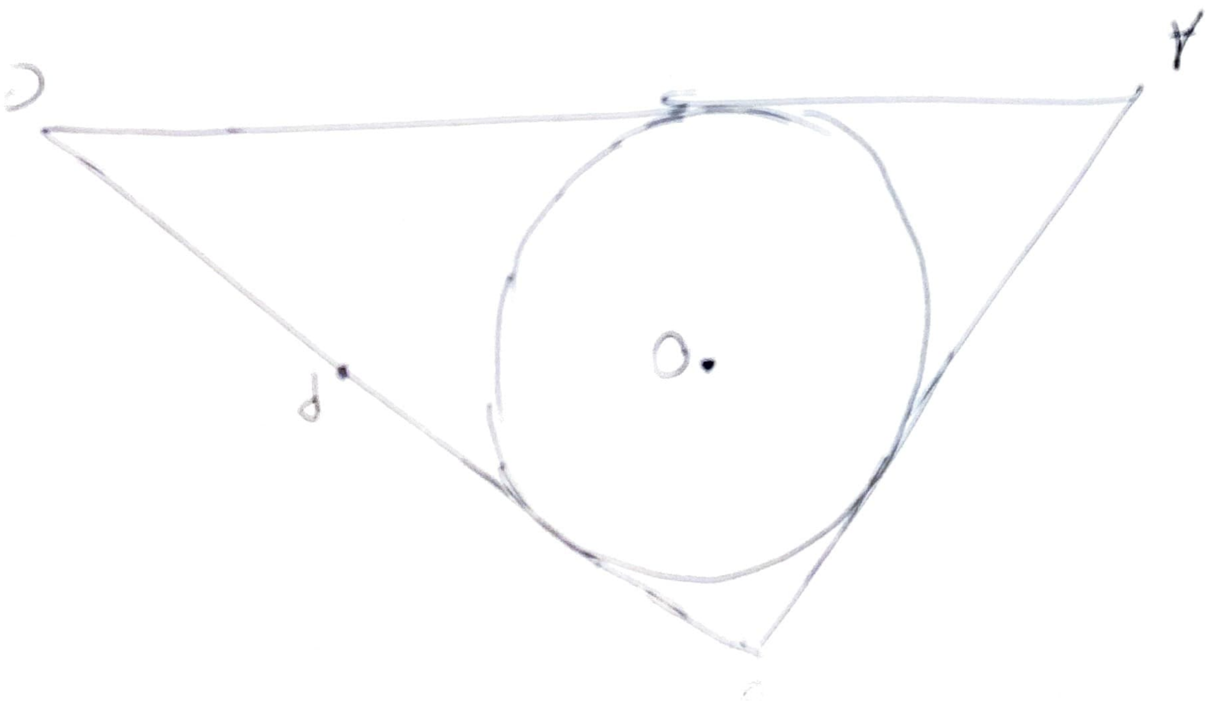
Черновик

~~$\min(\beta_1; d_2; d_3) = 1$~~

$$\begin{cases} \min(d_1; \beta_1; \gamma_1) = 1 \\ \min(d_2; \beta_2; \gamma_2) = 1 \\ \max(d_1; \beta_1; \gamma_1) = 15 \\ \max(d_2; \beta_2; \gamma_2) = 18 \end{cases}$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 16$$

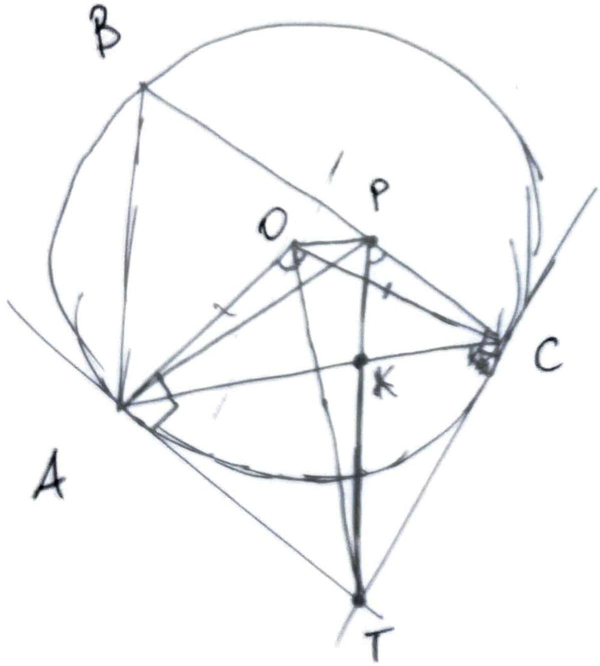
$$1 \le d_1, \beta_1, \gamma_1 \le 15$$



AOPC - впис.

Черновик

T AOPC - впис.



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

S_{ABC} - ?

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$