Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21105017**

ID профиля: **343177**

Вариант 17

№1 Черновик

Обозначим первый член прогрессии за a_1, а шаг прогрессии за d, тогда $a_1 = a$; $a_2 = a + d$; ... $a_n = a + (n-1)\cdot d$

По условию члены прогрессии целые числа, значит a - целое, a_1 - целое, a_2 - целое => их разность тоже целое число

$a_2 - a_1 = (a+d) - a = d$ - целое

Прогрессия возрастающая => $d > 0$

Запишем условие:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+5d)(a+11d) > S+1 \\ (a+6d)(a+10d) < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+5d)(a+11d) > S+1 \\ S+17 > (a+6d)(a+10d) \end{cases}$$

Сложим эти два неравенства:

$$(a+5d)(a+11d) + S + 17 > S + 1 + (a+6d)(a+10d)$$

$$a^2 + 16ad + 55d^2 + S + 17 > S + 1 + a^2 + 16ad + 60d^2$$

$$(a^2 + 16ad + S) + 55d^2 + 17 > (a^2 + 16ad + S) + 1 + 60d^2$$

$$55d^2 + 17 > \cancel{60d}\ 60d^2 + 1$$

$$16 > 5d^2$$

Выше мы доказали, что d - целое число и больше нуля, значит неравенство имеет только одно решение: $d = 1$

Подставим $d = 1$ в исходные неравенства:

$$\begin{cases} (a+5)(a+11) > S+1 \\ (a+6)(a+10) < S+17 \end{cases} \qquad S = 10a + \frac{9\cdot 10}{2} d = 10a + 45$$

$$\begin{cases} \cancel{a+10}\ (a+5)(a+11) > 10a + 45 + 1 \\ (a+6)(a+10) < 10a + 45 + 17 \end{cases}$$

1

21105017 (U343177 M1305172)

Черновик.

№1

$a_6 a_{12} > S+1 \qquad a_7 a_{11} < S+17$

$a_6 a_{12} > \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 + 1$

$a_6 \cdot a_{12} > 5a_1 + 5a_{10} + 1 \qquad a_7 \cdot a_{11} < 5a_1 + 5a_{10} + 17$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > 5a_1 + 5a_1 + 9d + 1 \qquad (a_1+6d)(a_1+10d) < 5a_1 + 5a_1 + 9d + 17$

$a_1^2 + 11d \cdot a_1 + a_1 \cdot 5d + 55d^2 > 5a_1 + 5a_1 + 9d + 1$

$a_1^2 + 16d \cdot a_1 + 55d^2 > 10a_1 + 9d + 1 \qquad a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 9d + 17$

$a_1^2 + 16d \cdot a_1 + 55d^2 > 10a_1 + 9d + 1$

$10a_1 + 9d + 17 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

$\cancel{a_1^2} + 16\cancel{a_1}d + 55d^2 + \cancel{10a_1} + \cancel{9d} + 17 > \cancel{a_1^2} + 16\cancel{a_1}d + 60d^2 + \cancel{10a_1} + \cancel{9d} + 1$

~~$55d^2$~~

$55d^2 + 17 > 60d^2 + 1$

$16 > 5d^2$

$d < \sqrt{\frac{16}{5}}$

21105017 (U343177 M1305172)

Решим неравенства по отдельности: Ученик

1) $(a+5)(a+11) > 10a+45+1$

$a^2+16a+55 > 10a+45+1$

$a^2+6a+9 > 0$

$(a+3)^2 > 0$

$a \neq -3$

2) $(a+6)(a+10) < 10a+45+17$

$a^2+16a+60 < 10a+45+17$

$a^2+6a-2 < 0$

График функции – парабола ветвями вверх, значит неравенство выполнено, когда a лежит между корнями уравнения $a^2+6a-2=0$

$a^2+6a-2 = a^2+6a+9-11 = (a+3)^2-11$

$(a+3)^2-11=0$

$(a+3)^2=11$

$a+3 = \pm\sqrt{11}$

$a = -3 \pm \sqrt{11}$

Значит решение неравенства $a^2+6a-2<0$

$-3+\sqrt{11} > a > -3-\sqrt{11}$

a – целое число, значит

$-3+\sqrt{11} > a > -3-\sqrt{11}$ равносильно $-2 \geq a \geq -6$

Из первого неравенства следует, что $a \neq -3$, значит решениями исходного неравенства являются $a=-6$; $a=-5$; $a=-4$; $a=-2$

Ответ: $a=-6$; $a=-5$; $a=-4$; $a=-2$.

2

21105017 (U343177 M1305172)

Шиповник

№2

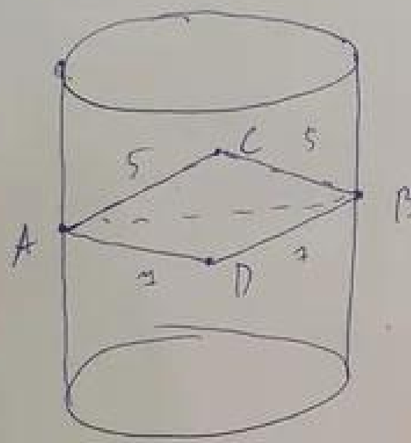
Так как $AC = CB = 5$ и $AD = DB = 6$, то серединная плоскость к отрезку AB проходит через точки C и D.

Тогда $AB \perp CD$, т.к. CD параллельна оси цилиндра, значит AB перпендикулярна оси цилиндра. Проведём через A плоскость α, перпендикулярную оси. В пересечении α, а AB — некоторая хорда на окружности цилиндра с радиусом r.

$AB \leq 2r$, т.к. хорда не может быть больше диаметра.

$$r \geq \frac{AB}{2} = 1.$$

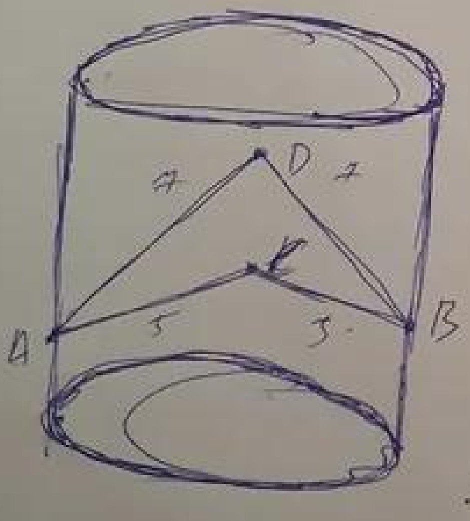
И может цилиндр существует с $r = 1$.



При этом возможны две конфигурации точек C и D, т.к. можно отрезки BD и BC отложить в одну из двух сторон.

Пусть высоты из D и C на плоскость, проходящую через AB перпендикулярно оси, обозначим h_D и h_C.

Тогда по теореме Пифагора.



$1^2 + h_D^2 + 1^2 = AD^2 = 36$

$h_D = \sqrt{34}$

$1^2 + h_C^2 + 1^2 = AC^2 = 25$

$h_C = \sqrt{23}$

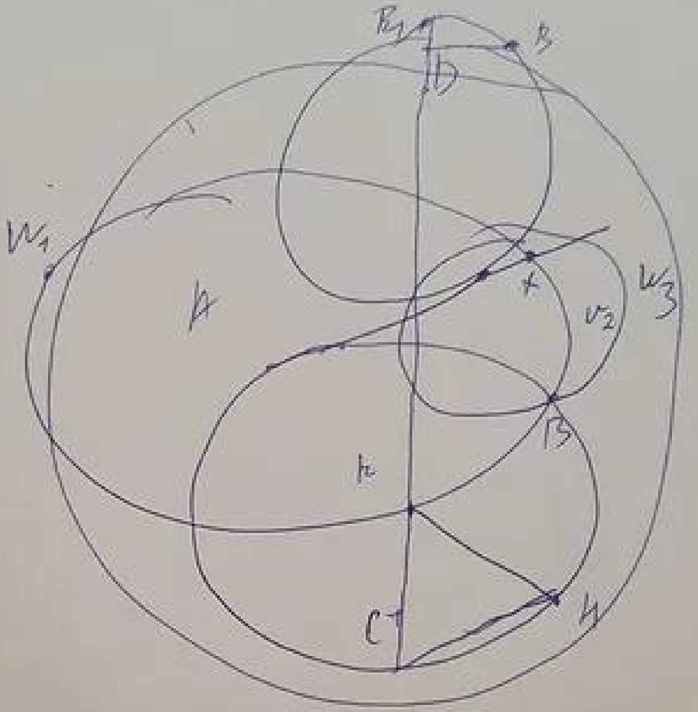
Тогда CD либо $h_D - h_C = \sqrt{34} - \sqrt{23}$, либо $h_D + h_C = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{23}$; $\sqrt{34} - \sqrt{23}$

3

21105017 (U343177 M1305172)

Tekenleer



4

№13 Циплёва

Построим множество точек (a, b) – T

Тогда $\forall (x, y) \in M$

$\exists (a,b) \in T$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$

$dist((x,y),(a,b)) \leq \sqrt{2}$

Построим для всех точек (a, b) окружность радиуса $\sqrt{2}$

$(x,y) \in$ нашему мн-ву, и любой такой (x,y) подойдёт

$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 \leq 2 \\ a^2+b^2 \leq 2a+2b \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-b^2 \leq 2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2. \end{cases}$

Пересечение окружностей с центрами в $(0;0)$ и $(1;1)$ это ~~[illegible]~~ №0 и №1 на картинке

Построим на границе пересечения окружность радиуса $\sqrt{2}$

(x,y) лежит в нашем мн-ве $\Rightarrow$ найдём S объединения

Это сектор окружности в $(0;0)$ радиуса $2\sqrt{2}$ и угол $Z(0,0)T$,

т.к. $(0,0)Z = Z(1,1) = Z(0,0)(1,1) \Rightarrow$ угол $Z(0,0)(1,1) = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ угол $Z(0,0)T = 120 = \pi \cdot \frac{2}{3}$

Тогда найдём S шара $YZTQ$ и 2-х секторов XZY и QTP, т.к. объединение наших кругов на границе покрывает всё с наших учётом [illegible]

$S_{YZTQ} = S_{Y(0,0)Q} - S_{Z(0,0)T} = \frac{8\pi}{3} \cdot 2\sqrt{2} -$

$- ((0,0)Z)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 16\pi - 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{4} = 16\pi - \sqrt{3}$

5

21105017 (U343177 M1305172)

Чистовик

$S_{\text{кгу}} = TP^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \sqrt{2}^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$S(M) = 2 \cdot \left(\frac{16\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 12\pi - 2\sqrt{3}$

Ответ: $12\pi - 2\sqrt{3}$.

6

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21105017**

ID профиля: **343177**

Вариант 17

№ 4 Чистяков

НОД $(a,b,c) = 6$

НОК $(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$

НОК содержит в разложении на простые множители только числа 2 и 3, значит числа ~~a, b~~ a, b и c тоже содержат в разложении на простые числа только числа 2 и 3

Пусть $a = 2^{a1}\cdot 3^{a2}$, $b = 2^{b1}\cdot 3^{b2}$, $c = 2^{c1}\cdot 3^{c2}$

НОД $= 6 = 2^1\cdot 3^1$, значит минимальное из $a1, b1, c1 = 1$.

Аналогично минимальное из $a2, b2, c2 = 1$

Число 2 входит в НОК в степени 15, значит максимальное из $a1, b1, c1$ равно 15.

Аналогично максимальное из $a2, b2, c2$ равно 16

Значит в числа a, b, c два входит в степенях 1, 15 и w, где $1 \le w \le 15$. Если $w = 1$, то существует 3 перестановки вхождений этих степеней в a, b, c

Аналогично если $w = 15$, есть 3 перестановки вхождений в a, b, c

Если $1 < w < 15$, то существует $3!$ перестановок вхождений этих степеней в a, b, c.

Всего $13\cdot 3! + 3 + 3 = 84$ различных перестановки для двойки. Посчитаем то же самое для тройки

1 ~~Значит в числа a, b, c входит~~ Значит в числа a, b, c два входит в степенях 1, 16 и v, где $1 \le v \le 16$.

21105017 (U343177 M1305173)

Или $v = 1$, то существует 3 перестановки вхождения этих степеней в a, b, c.

Аналогично если $v = 16$, есть 3 перестановки вхождения в a, b, c.

Или $1 < v < 16$, то существует $3!$ перестановок вхождений этих степеней в a, b, c.

Всего $14 \cdot 3! + 3 + 3 = 90$ перестановок для двойки.

После выбора степеней вхождения числа a, b, c определяются однозначно, значит всего $84 \cdot 90 =$

$= 7560$ троек.

Ответ: 7560

2

№5 Чемакин

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

Обозначим $a = (5x-1)$ $b = 4x+1$ $c = \frac{x}{2}+2$

тогда $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_a b$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_b c$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2\log_c a$

Обозначим наименьшее из

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ за $t-1$

тогда 2 остальных будут t

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 =$

$= 2\log_a b\cdot 2\log_b c\cdot 2\log_c a$

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = \frac{\ln a}{\ln b}\cdot\frac{\ln b}{\ln c}\cdot\frac{\ln c}{\ln a} = 1.$

Значит $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 4$

$t\cdot t(t-1) = 4$ $t^3 - t^2 = 4$ $(t-2)(t^2+t+2) = 0.$

3

21105017 (U343177 M1305173)

Дискриминант t^2+t+2 больше 0 => корней нет, значит единственный корень $t=2$, значит все логарифмы равны 1 или 2.

Рассмотрим 2 случая.

1) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$. Ширшова

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$3=4{,}5x$

$x=\frac{2}{3}$

тогда $5x-1=\frac{7}{3}$, а $4x+1=\frac{11}{3}$

Но тогда $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{\sqrt{\frac{7}{3}}}\left(\frac{11}{3}\right)$

Это число не равно 1 и не равно 2, значит $x=\frac{2}{3}$ не подходит.

2) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$

$\frac{x^2}{4}+2x+4=5x-1$

$\frac{x^2}{4}-3x+5=0$

$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x=2 \quad x=-10$

4

При $x=-10$ $5x-1=-51<0$ => такой случай невозможен

21105017 (U343177 M1305173)

Чистовик

При $x=2$ получим:

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_3 9=2$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=\log_3 9=2$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_9 9=1.$$

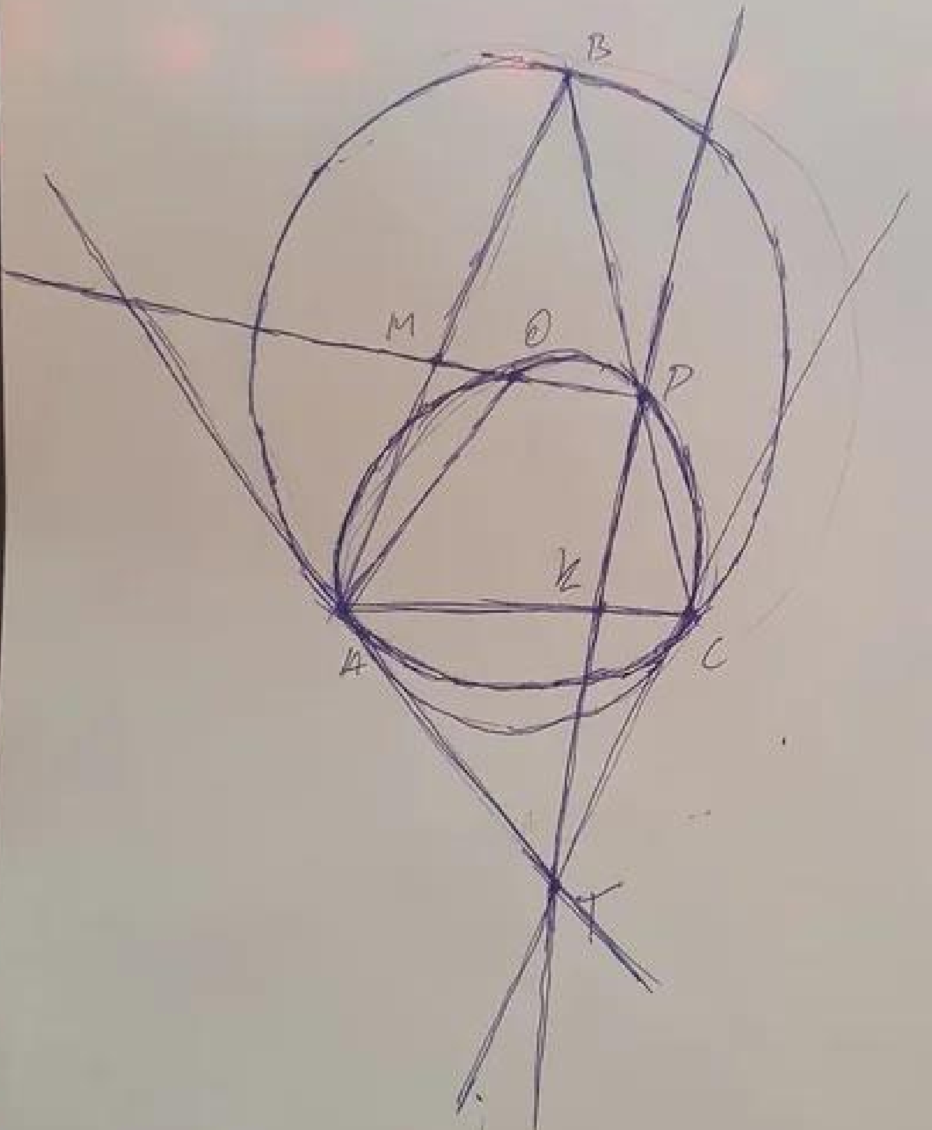
Значит $x=2$ подходит.

Ответ: $x=2$.

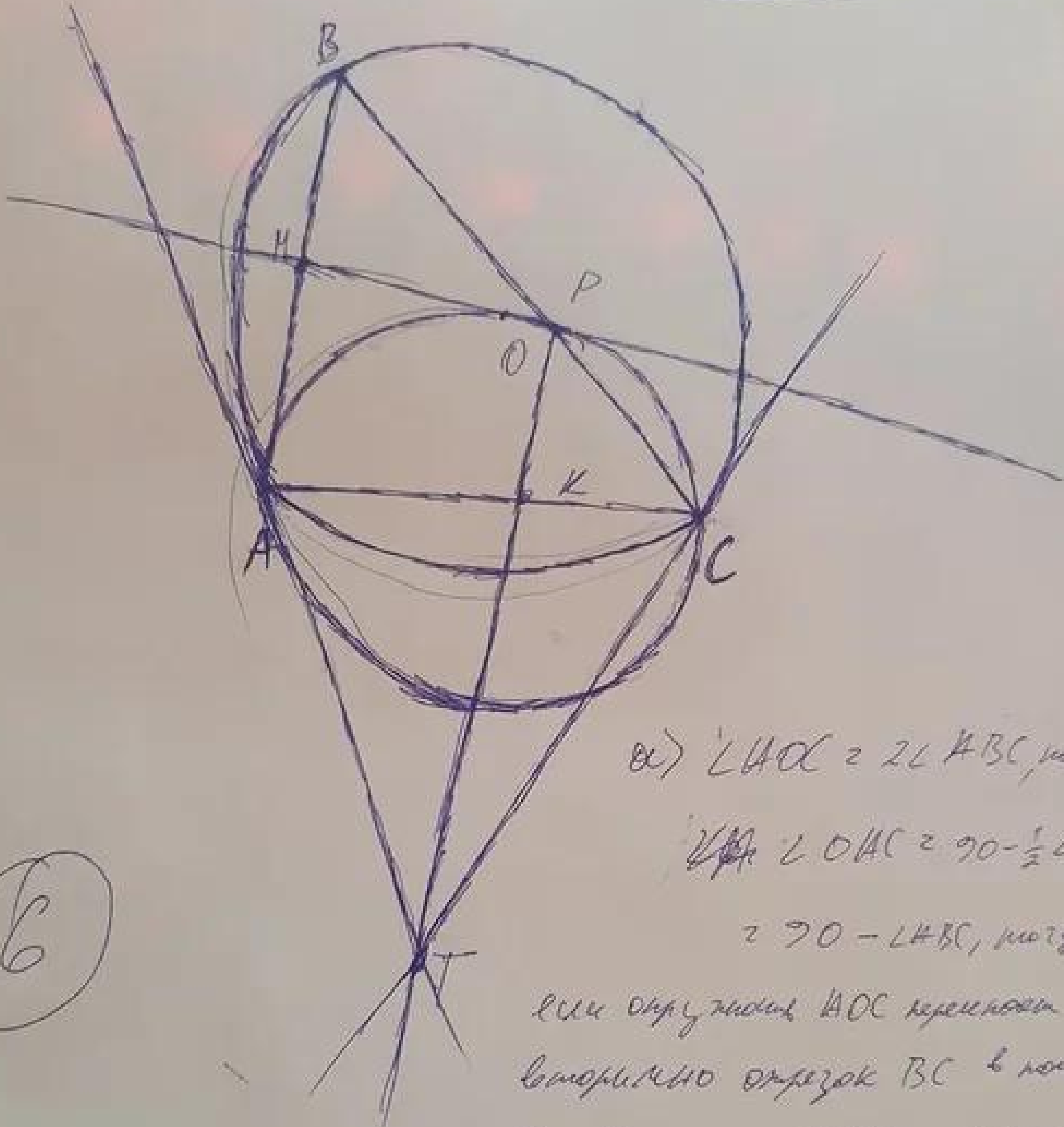
5

16.

черновик



лв. Чистовик



6

а) $\angle AOC = 2\angle ABC$, тогда

~~...~~ $\angle OAC = 90 - \frac{1}{2}\angle AOC =$

$= 90 - \angle ABC$, тогда

если окружность AOC пересекает вторично отрезок BC в точках P и C, то $\angle OPB = \angle OAC = 90 - \angle ABC$,

значит $OP \perp AB$, тогда OP − серединный перпендикуляр к AB, так пусть M − середина AB, тогда $AP = BP$

$\frac{AP}{PC} = \frac{\sin\angle ATP}{\sin\angle PTC}$ (т.к. точки находятся на 1 окружности) $= \frac{AK}{KC}$ (т.к. $\triangle ATC$ − равнобед.) $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$. $S_{\triangle APK} = 6$, а $S_{\triangle CPK} = 25$, то

21105017 (U343177 M1305173)

Чистовик

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{4}$, тогда $\frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$

$S_{\triangle ABP}$ относится к $S_{\triangle ADC}$ также, как $\frac{BP}{PC}$, а если

$BP = AP$, как $\frac{6}{4}$.

Тогда $S_{\triangle ABD} = \frac{6}{4}(6+4)$ и площадь всего $\triangle$ =

$= 10 + \frac{6}{4}(6+4) = 25$

Ответ: 25.

б) Пусть $BM = x$, тогда $tg\,\angle ABC = \frac{4}{3}$, $BH = \frac{5}{7}x$, тогда

$S_{\triangle BMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot 10$ (по 1-му пункту)

Тогда $x = \sqrt{\frac{21}{1}}$, тогда $BA = 4x = 4\sqrt{\frac{21}{1}}$ $BC = BD + \frac{4}{6}BD =$

$= -$

4