Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21105006**

ID профиля: **827409**

Вариант 17

№1. Чистовик 1.

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$, тогда $a_n = a_1 + d(n-1)$,

значит $a_6 = a_1 + 5d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \left(\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n\right)$

$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$;

Подставим ~~выражения~~ значения справа в нашу систему:

$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 \cdot d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 \cdot d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

Вычтем из нижней строчки верхнюю;

$5d^2 < 16$ (это аналогично выражению $a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$ и его последующей подстановке);

$d^2 < \frac{16}{5}$, $\left(\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} = 3{,}2\right)$

$d^2 < 3{,}2$, поскольку по усл. задачи числа целые, то единственное подходящее d - это 1; подставим в нашу изначальную систему:

$a_1^2 + 16a_1 + 55 < 10a_1 + 45 + 1$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 < 0$

$(a_1+3)^2 < 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

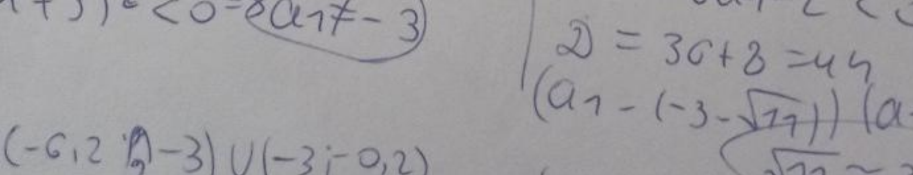
$D = 36 + 8 = 44$

$(a_1 - (-3-\sqrt{11}))(a_1 - (-3+\sqrt{11})) < 0$

$\sqrt{11} \simeq 3{,}2$;

$(a_1 + 6{,}2)(a_1 - 0{,}2) < 0$;

$a \in (-6{,}2; -3) \cup (-3; -0{,}2)$



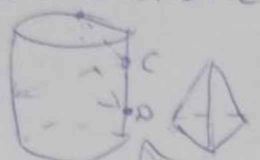
$\Rightarrow$ Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$.

21105006 (U827409 M1302504)

№1. Чистовик 2.

Дано:
Всевозможные тетраэдры ABCD;
$AB=2$; $AC=CB=5$;
$AD=DB=6$;
Все тетраэдры вписаны в цилиндр так, что $CD \parallel H$;
CD - ?, где (R-min)

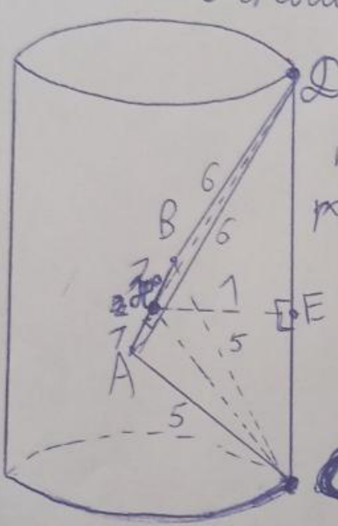
Решение:



1) Сначала заметим, что по условию $CD \parallel$ оси цилиндра, но при этом все вершины тетраэдра $\in$ боковой поверхности, из этих 2 условий очевидно, что CD лежит на боковой грани тетраэдра $\perp$ основанию (пример возможного расположения);

стремясь минимизировать радиус заметим, что $R_{min} = \frac{1}{2} AB = 1$;

тогда нарисуем более точный рисунок:



(~~Dc не~~ точки D и C лежат произвольно на боковой ~~ребре~~ оси);
тогда проведём высоты CH и DH;
и найдём DH и CH соответственно ~~CH~~ по теореме Пифагора ~~CH~~ для $\triangle CAH$ и $\triangle DHB$:

$$DH = \sqrt{BD^2 - HB^2} = \sqrt{35};$$
$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{24};$$

Заметим, что точка $H \in$ оси; тогда проведём $HE \perp DC$; $HE = R_{min} = 1$;
Тогда по теореме Пифагора для $\triangle HEC$ и $\triangle HED$:

$$EC = \sqrt{HC^2 - HE^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23};$$
$$DE = \sqrt{HD^2 - DE^2} = \sqrt{35-1} = \sqrt{34};$$

тогда $DC = DE + EC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$;

Ответ: $\boxed{\sqrt{23} + \sqrt{34}}$.

21105006 (U827409 M1302504)

№1 Черновик 1.

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$, тогда $a_n = a_1 + d(n-1)$,

значит $a_6 = a_1 + 5d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$;

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \left(\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n\right)$

Подставим $S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$;

выраженные справа значения в нашу систему:

$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 \cdot d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 \cdot d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

Вычтем из нижней строчки верхнюю; (это аналогично ~~[illegible]~~ выражению $a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2$ и подстановке)

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$, $\left(\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} = 3{,}2\right)$,

$d^2 < 3{,}2$, поскольку по усл. задачи числа целые, это единственное подходящее d — это 1, тогда $d = 1$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ подставим $d = 1$ в нашу систему:

$a_1^2 + 16a_1 + 55 < 10a_1 + 45 + 1$, $a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17$

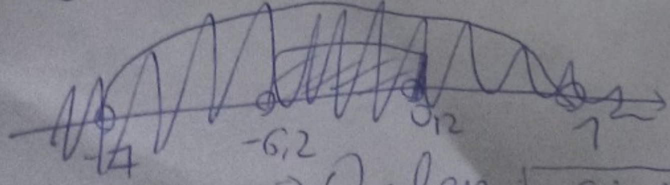
$a_1^2 + 6a_1 - 9 < 0$; $a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

~~$\begin{cases} (a_1+7)(a_1-1) < 0 \\ a_1 \in (-7; 1); 4 \end{cases}$~~

$D = 36 + 8 = 44$

$(a_1 - (-3 - \sqrt{11}))(a_1 - (-3 + \sqrt{11})) < 0$

$\sqrt{11} \approx 3{,}2$,



$(a_1 + 6{,}2)(a_1 - 0{,}2) < 0$

$a_1 \in (-6{,}2; 0{,}2)$

$\Rightarrow$ Ответ: $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$

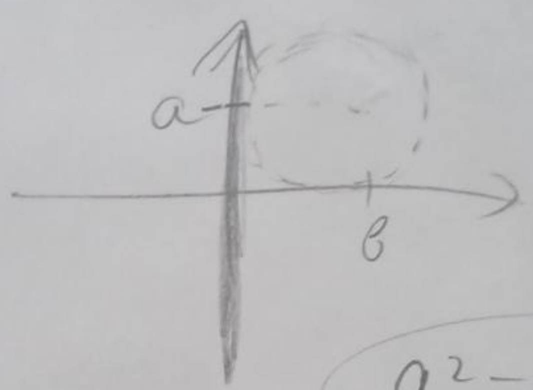
21105006 (U827409 M1302504)

Черновик 4.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}$$

$|x-a| = a$

$(1)+(1)$



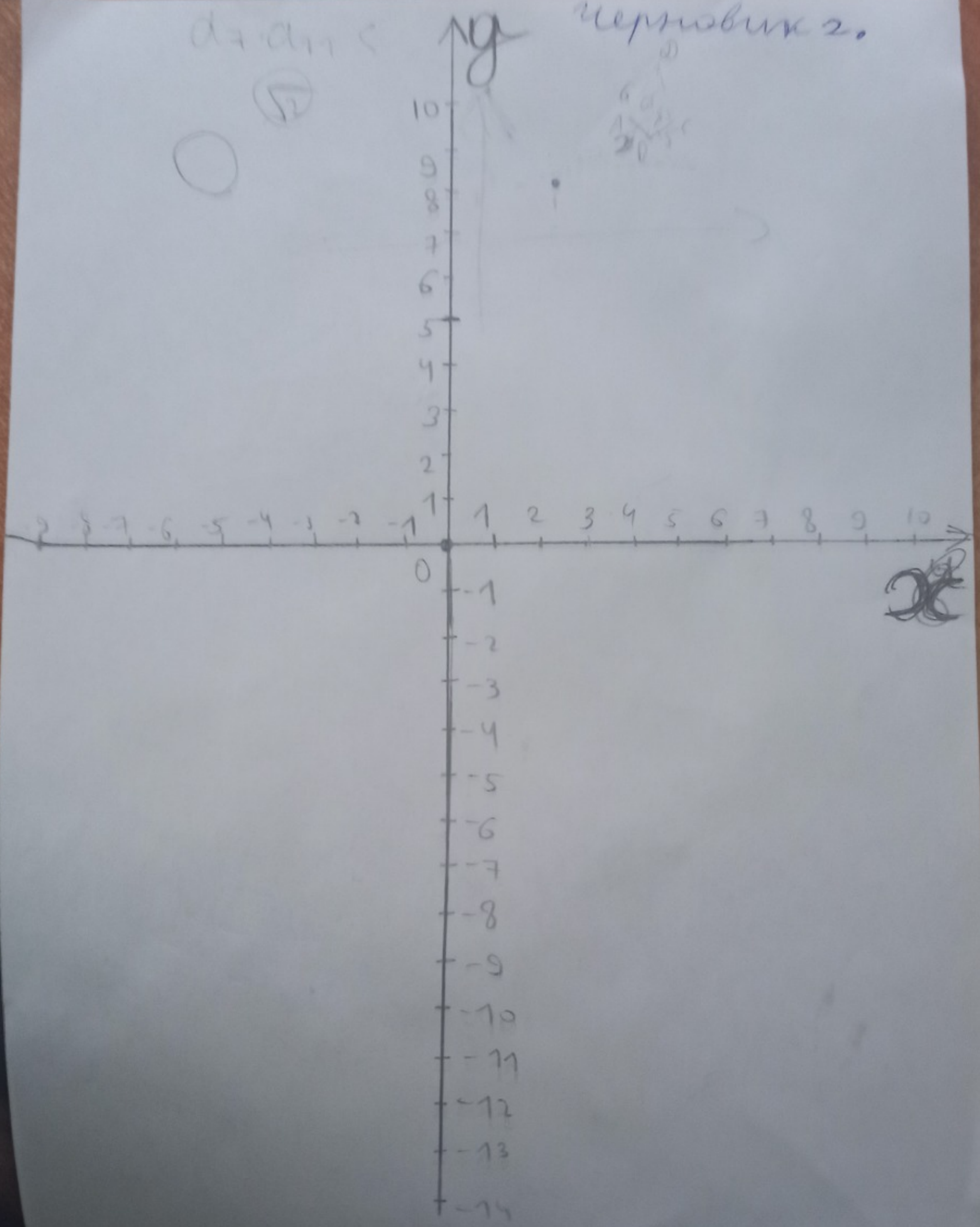
$a^2 = 2-b^2$

$(x-2+b^2)^2+(y-b^2) \le 2$

$(x+(b^2-2))^2+(y-b^2) \le 2$

21105006 (U827409 M1302504)

черновик 2.



Черновик 3.

$a_1; a_1+d; a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+9d}{2} \cdot n + 1$ 45 29

$a_1^2 + 16d \cdot a_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16d a_1 + 55d^2 - 10a_1 - 45d - 1 > 0$

$a_1^2 + a_1(16d-10) + (55d^2 - 45d - 1)$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16d a_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + a_1(16d-10) + (60d^2 - 45d - 17) < 0$

55
2
110

$\begin{cases} a_1^2 + a_1(16d-10) > 1 + 45d - 55d^2 \\ a_1^2 + a_1(16d-10) < 45d + 60d^2 + 17 \end{cases}$

45
4
180

$(16d-10)^2 = 100$

$= 256d^2 - 320d + 100$

$\begin{cases} x > 1 + 45d - 55d^2 \\ x < 17 + 45d - 60d^2 \end{cases}$

$- 220d^2 + 180d + 4 =$

$= 36d^2 - 140d + 104$

$x \in (17 + 45d - 60d^2, 1 + 45 - 55d^2)$

$a_1^2 + a_1(16d-10) + (55d^2 - 45d - 1) > 0$

$D =$

$\begin{cases} 36d^2 - 140d + 104 > 0 \\ \end{cases}$

21105006 (U827409 M1302504)

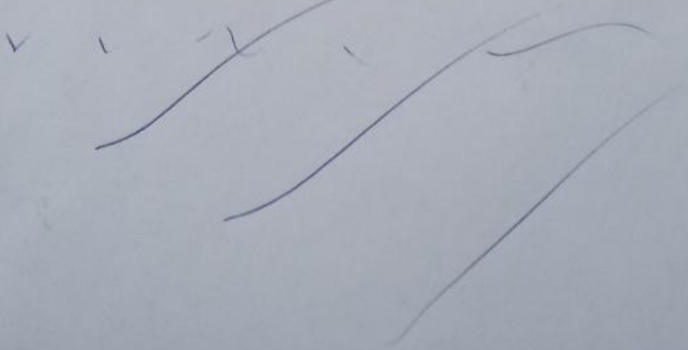
№3 10/17 черновик 5.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2).\end{cases},$$

рассмотрим отдельно 2 случая:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\\ 2a+2b\le 2\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \cancel{2a+2b}\ 2\\ 2a+2b>2\end{cases}$$

, тогда заметим, что в обоих системах 1 строка - уравнение окружности $(x^2+y^2=R^2)$;



21105006 (U827409 M1302504)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21105006**

ID профиля: **827409**

Вариант 17

Черновики

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 6; \\ НОК(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

a : 6
b : 6
c : 6

NЧ

6

$$\frac{2^{15} \cdot 3^{16}}{a} = 2^{14} \cdot 3^{15}$$

12 (2)
18 (3)
30 (5)

$2^{14} \cdot 3^{15}$,

2·3 5 =

15·2 =

180

пусть число a состоит из $2^{14} \cdot 3^{15}$, отсюда очевидно, что числа (a, b, c) состоят из $2^n ; 3^n$ или из их набора

~~15·2~~ = 30.

180

пусть a = 2

21105006 (U827409 M1302505)

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b, c) = 6; \\ \text{НОК}(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a : 6$
$b : 6$
$c : 6$

№4

6

12 (2)
18 (3)
30 (5)

$2 \cdot 35 =$

$15 \cdot 2 =$

80

$\cancel{15 \cdot 2} = 30.$

180

$$\frac{2^{15} \cdot 3^{16}}{a} = 2^{14} \cdot 3^{15}$$

$2^{14} \cdot 3^{15}$,

пусть число a состоит из $2^{14} \cdot 3^{15}$, отсюда очевидно, что числа (a, b, c) состоят из $2^n ; 3^n$ или из их набора

пусть $a = 2$

Черновик 3

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$,

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$\frac{1}{\log_{(4x+1)}(\sqrt{5x-1})} = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$1 - \log_{(4x+1)}$

21105006 (U827409 M1302505)

черновик 1

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1), \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2, \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$$\frac{1}{\log_{(4x+1)}\sqrt{5x-1}} = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$5x-1=1$

$x=\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{2}{5} \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right) \log$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$

Шестовик. И.

б) Из предыдущего пункта мы нашли, что $\angle AOE = \angle EOC = \frac{\alpha}{2}$, но ΔAOC – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ OE – биссектриса и высота, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ В прямоуг. ΔEOC: $\frac{EC}{OE} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5}{7}$, (т.к. $\frac{\alpha}{2} = arctg\left(\frac{5}{7}\right)$);

~~$S_{\Delta AOE}$~~ Вспомним, что $AC = 5x$; где ($AK = 3x$; $k(-2a)$);

тогда: $OE = \frac{5}{2}x \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{2}x$;

тогда $S_{\Delta AOC} = \frac{3}{2} S_{APC} = 10 \cdot \frac{3}{2} = 15$;

(отношение высот)

$S_{AOC} = \frac{1}{2} OE \cdot AC = 5x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}x = 15$;

$\frac{7}{4}x = 3 \Rightarrow x = \frac{12}{7}$;

$AC = 5x = \frac{12 \cdot 5}{7} = \frac{60}{7}$; Ответ: $\frac{60}{7}$;

21105006 (U827409 M1302505)

№4. Шестович. 1.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=6 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

; заметим, что $6 = 2\cdot 3$,

тогда приведу пример для понятности: пусть $a=6\cdot 2$; $b=6\cdot 3$; $c=6\cdot 5$,

тогда $\text{НОК}(a,b,c)=6\cdot 2\cdot 3\cdot 5$;

то есть, если мы разделим $\frac{\text{НОК}(a,b,c)}{6}$ на 6, то получим произведение уникальных множителей чисел a,b,c: $\frac{\text{НОК}(a,b,c)}{6}=(2^{14}\cdot 3^{15})$,

из этого также следует отсутствие любых других делителей в числах a,b,c;

тогда:

$a=2^{a_1}\cdot 3^{b_1}$

$b=2^{a_2}\cdot 3^{b_2}$

$c=2^{a_3}\cdot 3^{b_3}$

теперь давайте подумаем сколько всего есть различных троек (a,b,c) дающих верное соотношение - ?

Рассмотрим случай, когда 3 числа равны $2^i;2^k;2^j$, когда 3 числа равны $3^i;3^j;3^k$; и когда часть чисел $2^i;2^k;3^j$ и т.д.;

то есть при составлении чисел мы используем (2,3,1)-числа; тогда имеем: $(2^{14}, 3^{15})$ - вариантов;

и тогда в силу написанного выше домножим ответ на 36, чтобы учесть перестановки и отт. случаи;

тогда $(2^{14}\cdot 3^{15})\cdot 36 = 7560$

Ответ: 7560 вариантов.

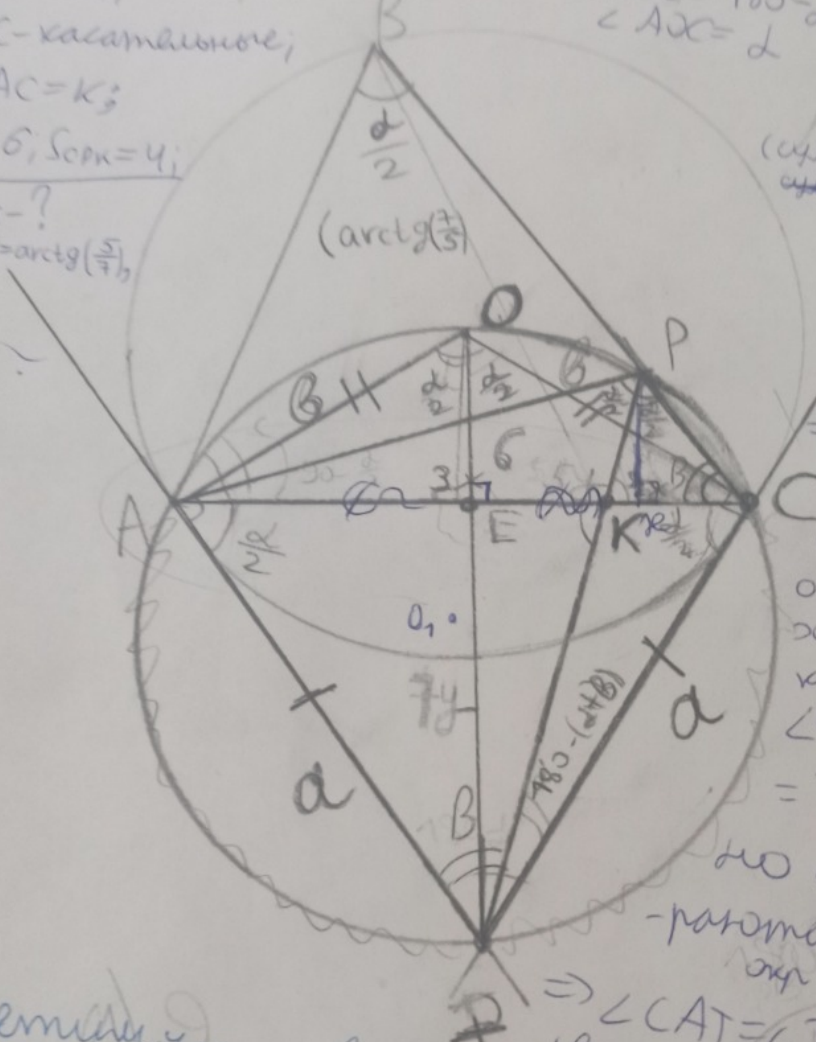
21105006 (U827409 M1302505)

№6. Решение: чистовик 3.

Дано:
ΔABC - остроуг.;
вписан в окр. с центром O;
$A, O, C \in O_1$;
AT, TC - касательные;
$TP \cap AC = K$;
$S_{APK} = 6$; $S_{CPK} = 4$;

а) S_{ABC} - ?
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}(\frac{5}{7})$, AC - ?

а) Пусть $\angle AOC = \alpha$, тогда заметим, что $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ (радиус в точку касания);
$\angle ATC = 180 - (\angle OAT + \angle OCT) - \angle AOC = 180 - \alpha$;
$\angle AOC = \alpha$ $\Rightarrow$ $T \in$ окружности с центром O_1; (сумма углов 180°, ~~сумма~~ в окр $180 \cdot 2 = 360$);



Проведем OT;
$AO = OC = R$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta AOC$ - р/б. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AOT = \angle COT$;
По теореме о угле между хордой и касательной:
$\angle CAT = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{\alpha}{2}$;
но $\angle CAT$ и $\angle TOC$ опи-раются на дугу TC в окр. с центром O_1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CAT = \angle TOC = \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ TPC; (вписанные, опираются на одну дугу).

Заметим, что в ΔPKC и ΔABC:
$\angle ABC = \angle KPC = \frac{\alpha}{2}$ (из предыдущего);
$\angle C$ - общий
$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PKC$ $\Rightarrow$ (по 2 углам)

$\Rightarrow \frac{KC}{AC} = k$; Проведем высоту PH;
тогда $\begin{cases} S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot AK \\ S_{PKC} = \frac{1}{2} PH \cdot KC \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$;
но тогда $\frac{KC}{AC} = \frac{2}{5}$;

$k = \frac{2}{5}$,
но $\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{4}{25}$ $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{4} S_{PKC} = \frac{25}{4} \cdot 4 = 25$ $\Rightarrow$ Ответ: а) 25.

21105006 (U827409 M1302505)

№5. Чистовик. 2

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2 = 2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)$

$\log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1) \neq 0$

Для начала учтём все ОДЗ, чтобы потом не пролететь по отбору корней)

$$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1. \\ 4x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (\frac{1}{5}; \frac{2}{5}) \cup (\frac{2}{5}; +\infty);$$

ОДЗ представляет произведение всех 3 логарифмов; тогда:

$2\log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4;$

Воспользуемся условием задачи. (по условию 2 числа равны а одно меньше их на 1, пусть $z_1 = z_2$; а z_3 - другое число тогда):

$$\begin{cases} 2\log_{(5x-1)}(4x+1) = 2\log_{(4x+1)}(\frac{x}{2}+2) \\ \log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1) = 2\log_{5x-1}(4x+1) - 1 \\ \log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1) = 2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) - 1 \end{cases}$$

или аналог. системы для ост. случаев; = Заменим логарифмы на z_1, z_2, z_3;

Рассмотрим все случаи:

тогда $\begin{cases} 2z_1 = 2z_2 \\ z_3 = z_1 - 1 \\ z_3 = z_2 - 1 \end{cases}$, откуда $z_1 = z_2 = 2$;

$2\log_{5x-1}(4x+1) = 2$ | $2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) = 2$ | $\log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1) = 2$

$x = 2$ | $x = \frac{2}{7}$ | $x = 2 \parallel x = 10;$

проверяя все найденные x увидим, что подходит только $x = 2 \Rightarrow$ Ответ: 2