Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21105005**

ID профиля: **265485**

Вариант 17

Чистовик

В. 17. №1

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9b) = 10a_1 + 45b$, где a_1 - первый член. п.; a_{10} - десятый член п.; b - шаг п.

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \text{ (1)} \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \text{ (2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5b)(a_1+11b) - 1 > S \\ (a_1+6b)(a_1+10b) - 17 < S \end{cases} \Rightarrow a_1^2 + 16a_1 b + 55b^2 - 1 > a_1^2 + 16a_1 b + 60b^2 - 17$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 b} + \cancel{55b^2} > \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 b} + \underset{5b^2}{\cancel{60b^2}} - 16 \Rightarrow 5b^2 < 16$$

$$b^2 < \frac{16}{5}$$

$$b = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right., \text{ т.к. } b \in \mathbb{Z}$$

По условию, прогрессия возрастающая $\Rightarrow b > 0 \Rightarrow b = 1$.

(1): $a_1^2 + 16a_1 + 55b^2 > 10a_1 + 45b + 1$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 - 10a_1 - 45 - 1 > 0$

$\cancel{a_1^2 - 10a_1 + 25 > 0}$

$\cancel{(a_1 - 5)^2 > 0}$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3,\ a \in \mathbb{Z}$ (по усл.)

(2) $a_1^2 + 16a_1 b + 60b^2 < 10a_1 + 45b + 17$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 - 10a_1 - 45 - 17 < 0$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$\Rightarrow a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$

$a_1 \in [-6; 0],\ a \in \mathbb{Z}$

$$a_1 = \left[\begin{array}{l} -6 \\ -5 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right.$$

21105005 (U265485 M1300501)

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0;$ 1

Чистовик

В.17 №2

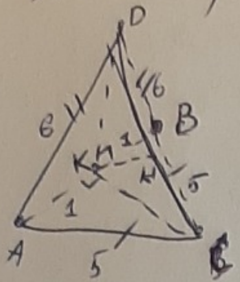
Дано:

ABCD-тетраэдр; $AB=2$; $AC=BC=5$; $AD=BD=6$; $CD \parallel$ оси; $r=r_{min}$

CD - ?

Решение:

$AC=BC$, $AD=BD \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow AB$ - диаметр, пусть k - середина AB
(т.к. $r=r_{min}$)



k' - основание перпендикуляра kk'.

Т.к. k - середина AB, то k - центр окружности, описанной у тр-ка ABk' (т.к. AB - диаметр, а пл-ть $ABk' \perp CD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow Ak = Bk = kk' = 1$

~~1) Случай расположения точек: $Dk'C$:~~ $\cancel{k'D = \sqrt{kk'^2 + kD^2} = \sqrt{-1+\sqrt{36-1}} =}$

$\cancel{k'C = \sqrt{kC^2 - kk'^2} = \sqrt{\sqrt{25-1}-1}}$

$\cancel{= \sqrt{\sqrt{35}-1}}$

$\cancel{= \sqrt{\sqrt{24}-1}}$

$kD = \sqrt{AD^2 - Ak^2} = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

$kC = \sqrt{AC^2 - Ak^2} = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$

$k'D = \sqrt{kD^2 - kk'^2} = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$

$k'C = \sqrt{kC^2 - kk'^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

1 случай, т. D и т. C по разные стороны от т. k': $CD = k'C + k'D =$
$= \sqrt{34} + \sqrt{25}$

2 случай, т. D и т. C по одну сторону от т. k': $CD = k'D - k'C =$
$= \sqrt{34} - \sqrt{25}$

Ответ: $CD = (\sqrt{34} \pm \sqrt{25})$ 2

Чистовик

В.17 №3

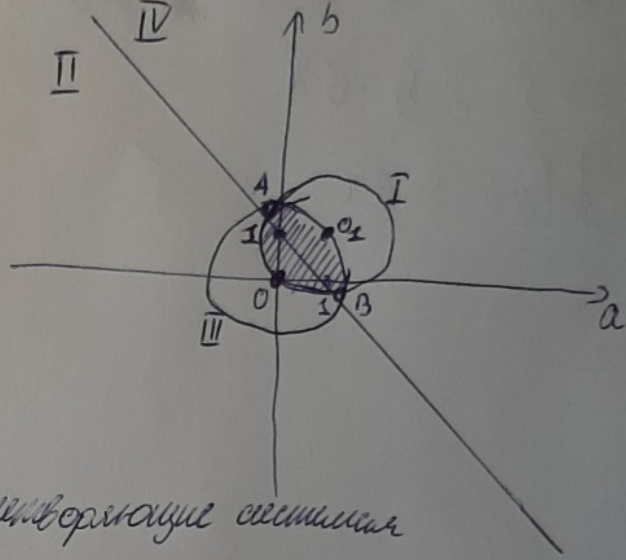
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ (a^2+b^2)\le \min(2a+2b,\ 2) & (2)\end{cases}$$

14 (2):

1) $\begin{cases}a^2+b^2\le 2(a+b) & \mathrm{I}\\ a+b\le 1 & \mathrm{II}\end{cases}$

2) $\begin{cases}a^2+b^2\le 2 & \mathrm{III}\\ a+b>1 & \mathrm{IV}\end{cases}$

Покажем на графике в Д.С.К.



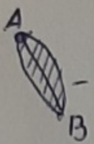
I: $a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

II $b\le 1-a$

III $a^2+b^2\le 2$

IV $b>1-a$



– a, b, удовлетворяющие системе

A, B – т. пересечения графиков A: $\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a+b=1\end{cases} \Rightarrow (1-b)^2+b^2=2 = 1-2b+2b^2=2 \Leftrightarrow$ $a=(1-b)$

$\Leftrightarrow 2b^2-2b-1=0$

$b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$

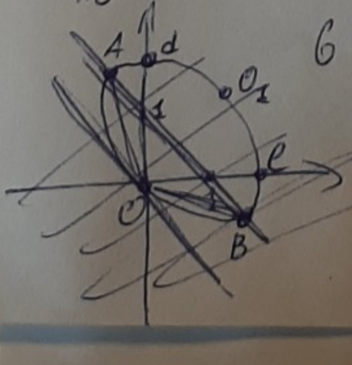
$\Rightarrow b=\left[\begin{array}{l}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow a=\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right);\ B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$

По Th.cos: $AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\angle AOB$

$6=2+2-2\cdot 2\cdot\cos\angle AOB \Rightarrow \cos\angle AOB=-\frac{1}{2}\Rightarrow \angle AOB=120^\circ$

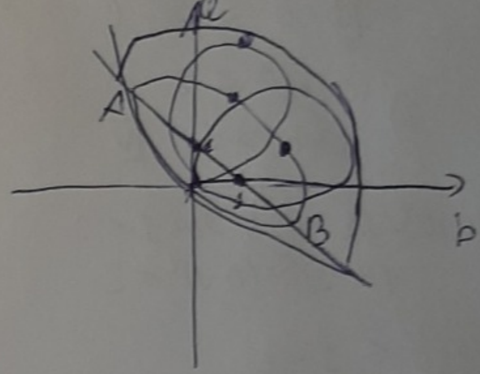


$\cancel{S=S_{\triangle AOB}+2\cdot S}$ }

Чистовик. Первое уравнение исходной системы накрывает окружности, радиуса $\sqrt{2}$, расположенные на дуге AB и 2 сектора радиуса $2\sqrt{2}$ с углом 120°. Концевые точки A и B — это ещё 2 сектора радиуса $\sqrt{2}$ с углом 30° (т.к. $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

Итого: $S_{\frac{1}{2}} = (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{2\pi}{2\cdot 3} + (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{6\cdot 2} = 3\pi$

$\Rightarrow S = 2 \cdot S_{\frac{1}{2}} = 6\pi.$



Ответ: $S = 6\pi$

21105005 (U265485 M1300501)

$S = S_{10}$ Условие $a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17 = (S+1)+16$

$a_1 - ?$

$S = 10a_1 + \frac{(1+10)}{2} \cdot 10 = 55$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$\frac{(1+9)}{2} \cdot 9 = 45$

$S = \frac{(a_1 + a_{10})}{2} 10 = 5(a_1 + a_{10}) =$

$= 5(2a_1 + 9b)$

$(a_1 + 5b)(a_1 + 11b) = a_1^2 + 55b^2 + 16a_1 b$

$(a_1 + 6b)(a_1 + 10b) = a_1^2 + 60b^2 + 16a_1 b$

$a_1^2 + 60b^2 + 16a_1 b < S + 1 < a_1^2 + 55b^2 + 16a_1 b$

-16

$a_1^2 + 60b^2 + 16a_1 b - 16 < a_1^2 + 55b^2 + 16a_1 b$

$5b^2$

$5b^2 < 16$

$b^2 < \frac{16}{5}$

$b^2 = \{0; 1; 2; 3;\}$

$b = \{0; 1; -1\}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\, 16 \\ \hline 96 \\ +\,160 \\ \hline 256 \end{array}$

$a_{1,2} = -8 \pm \sqrt{21 + 5(2a_1 + 9)}$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 = 21 + 10a_1 + 45$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{2}$

$b = 1$:

$(a+5)(a+11) > S+1$

$a^2 + 16a + 55 > S+1$

$a^2 + 16a + 60 < S+17$

$\begin{cases} a^2 + 16a + (54 - S) > 0 & 1) \\ a^2 + 16a + (43 - S) < 0 \end{cases}$

1) $a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 216 + 4S}}{2} = -8 \pm \sqrt{10+S}$

2) $a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 172 + 4S}}{2} = -8 \pm \sqrt{21+S}$

$S = \left[\begin{array}{l} -10 \\ -9 \\ -6 \\ -1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 6 \\ 15 \\ 26 \\ 39 \end{array}\right.$

$S = \left[\begin{array}{l} -21 \\ -20 \\ -17 \\ -12 \\ -5 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 4 \\ 15 \\ 28 \end{array}\right.$

$a_1 = -8 \pm \sqrt{10 + 5(2a_1 + 9)}$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 = 10 + 10a_1 + 45$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 = 0 \quad a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = a_1 = -3$

5

Черновик

№1 В.17

$S=\frac{(a_1+a_{10})}{2}\cdot 10=5(a_1+9b)=10a_1+45b$, где a_1 – первый член прогр. а b – шаг прогр.

1) $\begin{cases} a_6\cdot a_{12}>S+1 \implies (a_1+5b)(a_1+11b)>10a_1+45b+1 \\ a_7\cdot a_{11}<S+17 \end{cases}$
2)

6

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21105005**

ID профиля: **265485**

Вариант 17

чистовик

В 17 №5

$\log_{\sqrt{5x+1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$;

Заметим, что произведение трёх логарифмов равно 4.

Пусть тогда равные логарифмы равны t: $t^2(t-1)=4$ =>

$= t^3-t^2-4=0 = \cancel{(t-2)(t^2+t+2)}\ (t-2)(t^2+t+2)$

$\overset{\shortparallel}{0}\ 1 \qquad \overset{\shortparallel}{0}\ 2$

2) t^2+t+2, $D=1-8=-7$ => $t^2+t+2>0$

=> $t=2$

=> два логарифма равны 2 и один логарифм равен 1 => аргумент равен основанию.

1) $\log_{\sqrt{5x+1}}(4x+1)=1$: $\sqrt{5x+1}=4x+1$ => $5x+1=16x^2+8x+1$ =>

=> $16x^2+3x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-128}}{32}$ – корней нет.

2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1$: $4x+1=\frac{x^2}{4}+2x+4$ => $\frac{x^2}{4}-2x+3=0$

$x^2-8x+12=0$

$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm4}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\6\end{array}\right.$

3) $\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=1$ => $\frac{x}{2}+2=5x-1$ => $x+4=10x-2$ => $x=\frac{2}{3}$.

Ответ: $x=\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}\\2\\6\end{array}\right.$

Чистовик

№4

Т.к. НОК$(a;b;c;) = 2^{15} \cdot 3^{16}$, то все числа $\leq 2^{15} \cdot 3^{16}$ и при разложении на простые множители есть $2^n \cdot 3^k$, где $k \in \mathbb{Z}, \in [1;16]$
$n \in \mathbb{Z}, \in [1;15]$

Т.к. НОД$(a;b;c;) = 6$, то все числа ≥ 6

=> всех возможные тройки вида: $\begin{cases} 6 \\ 2^{15} \cdot 3^{16} \\ 2^{n_1} \cdot 3^{k_1} \end{cases}$ – всего таких троек: $15 \cdot 16 = 240$; Т.к. из каждой тройки можно 3 способами выбрать число a и ещё двумя число b, то число наборов: $240 \cdot 6 = 1440$.

~~Ответ: 1440~~.

Рассмотрим тройки вида $\begin{cases} 2 \cdot 3^{k_2} \\ 3 \cdot 2^{n_2} \\ 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$ – всего таких троек $15 \cdot 16 = 240$, а наборов: $240 \cdot 6 = 1440$, но случаи, когда $k_2 = 1$, а $k_1 = 1$, а $n_1 = n_2$ – всего таких случаев 15, а аналогичных случаев, когда $n_2 = 1$, $n_1 = 1$, а $k_1 = k$ – 16

=> новых наборов: $1440 - 15 - 16 = 1409$.

2

Чистовик

В.17 №6

Дано:

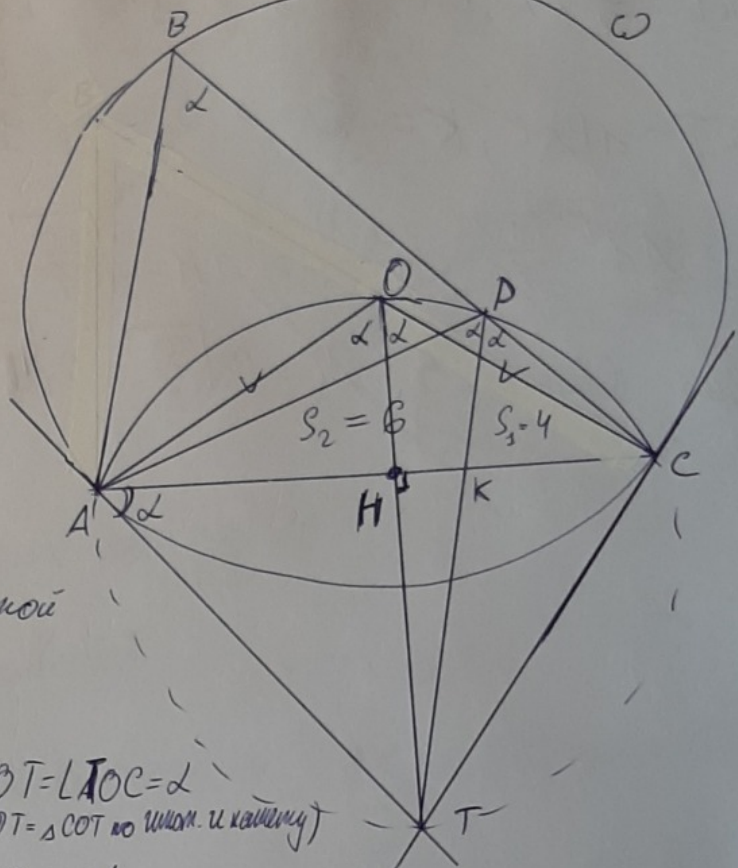
$\triangle ABC$ - остроугол.

O - центр окр. ω

$S_{\triangle} PKC = 4$ $S_{\triangle} PAK = 6$

Найти

$S_{\triangle ABC}$ - ?



1) OA, OC - радиусы
AT, CT - касательные $\Big\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$

$\Rightarrow$ т. A, O, C, T лежат на одной окр-ти, диаметра OT.

Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOT = \angle TOC = \alpha$
(т.к. $\triangle AOT = \triangle COT$ по гипот. и катету)

$\Rightarrow \underline{\angle AOC = 2\alpha = \angle APC}$. $TC = TA$ как касательные из одной точки $\Rightarrow \angle APT = \angle CPT$ (т.к. равные хорды) $= \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle KPC = \alpha \Rightarrow AB \parallel KP \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$, $k = \frac{KC}{AC} = \frac{KC}{AK+KC} =$

$= \frac{4}{6+4} = \frac{2}{5}$ (т.к. $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ имеют общую высоту, отношение площадей равно отношению оснований) $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle KPC}}{k^2} = \frac{4}{\frac{4}{25}} = 25$

$\underline{S_{\triangle} ABC = 25}$

2) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$; AC - ?

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AH}{OH} = \frac{CH}{OH} = \frac{7}{5} \Rightarrow OH = \frac{5}{7} AH = \frac{5}{14} AC =$ [illegible] $\left(x = \frac{AH}{7}\right)$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5} = \frac{TH}{AH} \Rightarrow TH = \frac{7}{5} AH =$ [illegible]

3

$\cancel{S_{\triangle AKT} = \frac{3}{2}}$ $AK = \frac{6}{10} AC = \frac{6}{5} AH$

$S_{\triangle AKT} = \frac{1}{2} AK \cdot TH = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} AH \cdot \frac{7}{5} AH = \frac{21}{10} AH^2$

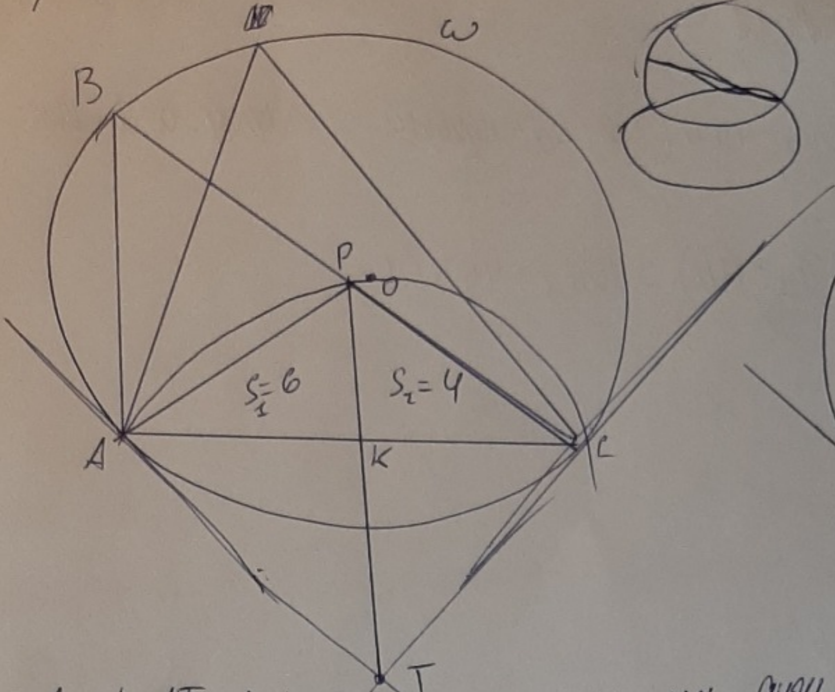
$\triangle AKT \sim \triangle PKC$, $K = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{\triangle PKC} = \frac{4}{9} \cdot S_{\triangle AKT} = \frac{4}{9} \cdot \frac{21}{10} AH^2 = 4$

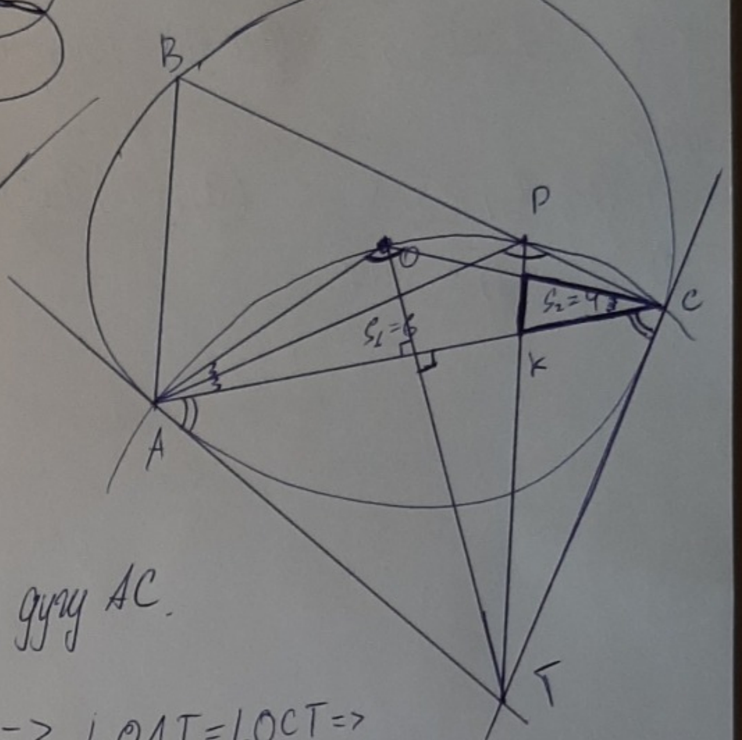
$\Rightarrow AH^2 = \frac{90}{21} = \frac{30}{7} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{30}{7}} \Rightarrow AC = 2AH = 2\sqrt{\frac{30}{7}}$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 25$; $AC = 2\sqrt{\frac{30}{7}} = 2\sqrt{4\frac{2}{7}}$

 4

Черновик





$\angle KAT = \angle KCT$ т.к. смотрят на дугу AC.

$\angle OAK = \angle OCK$ т.к. $\triangle AOC$ равнобед. $\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT \Rightarrow$

$\parallel$ $90°$ т.к. OA-радиус, а AT-касательная

A, O, C, T лежат на одной окр-ти $\Rightarrow$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{4} = \frac{AK}{KC}$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - t^2 - 4 & t-2 \\ \cline{2-2} -\; t^3 - 2t^2 & t^2+t+2 \\ \cline{1-1} t^2 - 4 & \\ -\; t^2 - 2t & \\ \cline{1-1} 2t - 4 & \\ 2t - 4 & \end{array}$$

Б

Черновик

№1 В.17

$S = \frac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + 9b) = 10a_1 + 45b$, где a_1 – первый член прогр. а b – шаг прогр.

$$\begin{cases} 1)\ a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \Rightarrow (a_1 + 5b)(a_1 + 11b) > 10a_1 + 45b + 1 \\ 2)\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \end{cases}$$

6

21105005 (U265485 M1300502)

~~Чистовик~~ черновик   В. 17 №4

$a = \cancel{2^k}\, 3^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot \cancel{3}\,2^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 2^{\gamma_2}$

В таких тройках должны находиться числа, которые делятся на 2, на 3 (но не делятся на $2^k, 3^k$, (где $k \geq 1$)), дел-ся $2^{15}, 3^{16}$ (но не дел на $2^k, 3^n$ (где $k > 15$, $n > 16$)). Получаем, что для 2-х чисел известны наибольшая и наименьшая степени, а третье включает от 3 до 3^{16} (от 2 до 2^{15})

27