Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104993**

ID профиля: **228947**

Вариант 17

① Чистовик.

N 1

$S = \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 = 10a_1+45d$

$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \end{cases} \Rightarrow 5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$

$d < 1{,}8$

$1{,}8 \cdot 1{,}8 = 3{,}24$ $\quad \sqrt{3{,}2} < 1{,}8$

$\begin{cases} a_1 \in Z \\ a_1+d \in Z \end{cases} \Rightarrow d \in Z$

прогрессия возр. $\Rightarrow d > 0$

$\Rightarrow d = 1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9 > 0 \\ a_1^2+6a_1-2 < 0 \end{cases}$

$D = 36+8 = 44$

$a_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$

$+ \quad -3-\sqrt{11} \quad - \quad -3+\sqrt{11} \quad +$

$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1 < \sqrt{11}-3 \\ a_1 > -3-\sqrt{11} \end{cases}$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$\Downarrow$

$0 < \sqrt{11}-3 < 1$

$-7 < -\sqrt{11}-3 < -6 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 < 1 \\ a_1 > -7 \\ a_1 \in Z \end{cases}$

$a_1 \in Z$

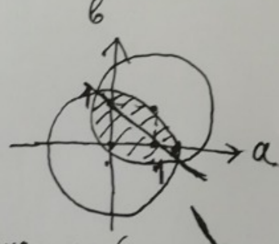
Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

№3 Чистовик (2)

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2(a+b)<2 \\ a^2+b^2 \le 2(a+b) \end{cases} \\ \begin{cases} 2(a+b) \ge 2 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b<1 \\ a^2-2a+b^2-2b \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b \ge 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b<1 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b \ge 1 \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

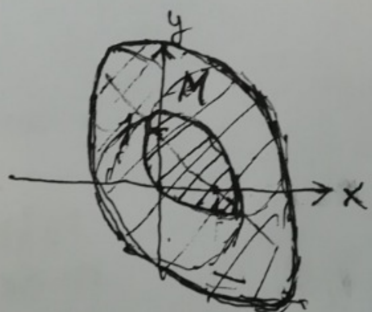


2) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

На графике это окружность с центром в закрашенной области и радиусом $\sqrt{2}$

⇓

фигура M – фигура, каждая точка которой удалена от закрашенной области графика в п.1 не более, чем на $\sqrt{2}$.



$S_M =$

21104993 (U228947 M1296149)

$a_6 a_{12} > S + 1$

$a_7 a_{11} < S + 17$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{a_1+(a_1+9d)}{2} 10 + 1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) > \frac{a_1+(a_1+16d)}{2} 10 + 17$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 > 10a_1 + 80d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d - 10a_1 + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1d - 10a_1 + 60d^2 - 80d - 17 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(16d-10) + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \\ a_1^2 + a_1(16d-10) + 60d^2 - 80d - 17 \end{cases}$$

$D_1 = 256d^2 + 100 - 320d - 220d^2 + 180d + 4 = 36d^2 - 140d + 104 = 4(9d^2 - 35d + 26)$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+9d}{2} 10 + 1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < \frac{2a_1+9d}{2} 10 + 17$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d < \sqrt{3,2}$

$d < 1,8$

$d = 1$

$$\begin{array}{r} 1,8 \\ \times\ 1,8 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45 \\ +\ 17 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ \end{cases}$$

$D = 36 + 8 = 44$

$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2}$

$a_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$

$0 < -3 + \sqrt{11} < 1$

$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$ кроме -3

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times\ 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ \times\ 34 \\ \hline \end{array}$$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$-7 < -3-\sqrt{11} < -6$

$-6; -5; -4; -2; -1$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\end{cases}$$

$2(a+b)$ $\quad$ $\cancel{a+}\ b<1-a$

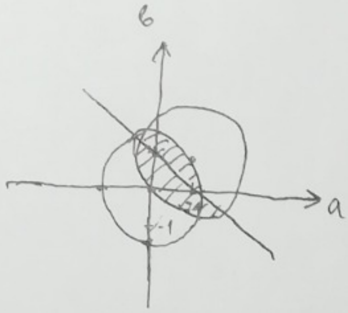
$a+b<1$

$\Downarrow$

$a^2+b^2\le 2(a+b)$ $\quad$ $a^2-2a+b^2-2b\le 0$

$a+b\ge 1$ $\quad$ $(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

$a^2+b^2\le 2$ $\quad$ $1-\sqrt{2}$

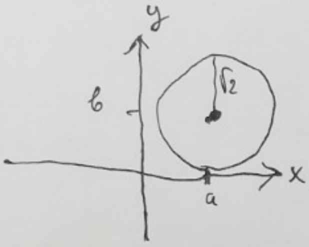


$b=1-a$ $\quad$ $a^2+a^2+1\le 2$

$a^2+a^2+1-2a\le\sqrt{2}$

$2a^2-2a+1-\sqrt{2}\le 0$

$D=4-8+8\sqrt{2}=8\sqrt{2}-4=4(2\sqrt{2}-1)$



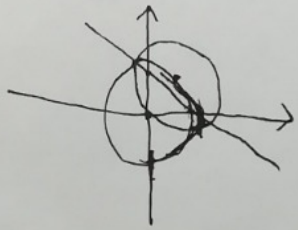
$a^2+a^2-2a+1\le 2$ $\quad$ $b=1-a$

$2a^2-2a-1\le 0$ $\quad$ $a^2+1-2a+a^2\le 2$

$D=4+8=12$ $\quad$ $2a^2-2a+1\le 2$

$a=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\le a\le\frac{1+\sqrt{3}}{2}$



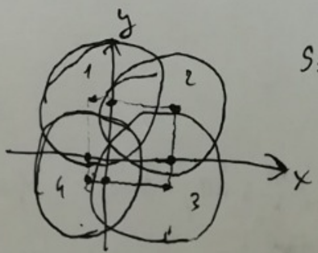
$\frac{2-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\le b\le\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\frac{2-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$(x-a)^2\le 2$

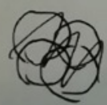
$\frac{1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

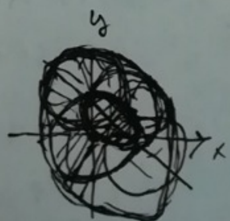
$\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\le 2$



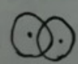
$S=1+2+3+4-12-13-14-23-24-34+123+124+234+134-$

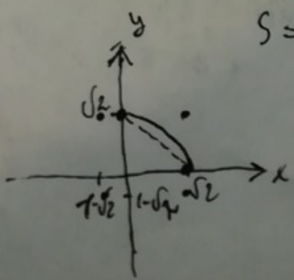
$-3\cdot 1234$





$S=2\pi\cdot 4-$





$\cancel{1+\sqrt{2}}$

$3-2\sqrt{2}+x^2=2$

$x^2=2\sqrt{2}-1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104993**

ID профиля: **228947**

Вариант 17

~~Чистовик~~ Черновик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6$, одно из чисел $a,b,c \vdots 2^{15}$, одно из чисел $a,b,c \vdots 3^{16}$

~~Задачи:~~

1) $a=2^{15}\cdot 3^{16}$

$b=2^{x}\cdot 3$, $x\in[1;15]$, $x\in N$

$c=3^{y}\cdot 2^{z}$, $y\in[1;16]$, $y\in N$, $z\in[1;15]$, $z\in N$

$2^{15}\cdot 3^{16}$ $2^{x}\cdot 3$

$2^{15}\cdot 3^{16}$ $2^{x}\cdot 3$ $3^{y}\cdot 2^{z}$

$2^{15}\cdot 3^{16}$ $2^{x}\cdot 3^{y}$ $3^{z}\cdot 2^{x}$

~~... в числе b и z в числе c не могут быть ≠ 1, т.к. тогда НОД(a;b;c)≠6~~

$15\cdot 16\cdot 15$

$b=c \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 15$

$a=c \Rightarrow y=15, c=16 \Rightarrow 1$ $\Rightarrow 16$

1) $a=2^{15}\cdot 3^{16}$
$b=2^{x}\cdot 3^{y}$
$c=2^{z}\cdot 3$

4) $a=2^{15}\cdot 3^{x}$
$b=3^{16}\cdot 2$
$c=2^{y}\cdot 3^{z}$

2) $a=2^{15}\cdot 3^{16}$
$b=2^{x}\cdot 3^{y}$
$c=2\cdot 3^{z}$

5) $a=2^{15}\cdot 3$
$b=3^{16}\cdot 2^{x}$
$c=2^{y}\cdot 3^{z}$

3) $a=2^{15}\cdot 3^{x}$
$b=3^{16}\cdot 2^{y}$
$c=2\cdot 3$

2) $a=2^{15}\cdot 3^{z}$,
$b=3^{16}\cdot 2$
$c=2^{x}\cdot 3^{y}$

~~$C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=20$~~

C

1) $a=2^{15}\cdot 3^{16}$
$b=2^{x}\cdot 3^{y}$
$c=2^{z}\cdot 3^{p}$

$\boxed{x,y,z,p}=1$

1) $15\cdot 16\cdot 15$ - всего
повт. $15+1=16$
с тем. до пер. $224\cdot 16\cdot 6+16\cdot 3$

2) $15\cdot 16\cdot 16$
$16+1=17$
уп. $15\cdot 16$
$(15\cdot 16\cdot 15-17)\cdot 6+17\cdot 3$

3)

Чистовик. (1)

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c$

$a \cdot b \cdot c = 4$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x > 1 \\ 5x \neq 2 \\ 4x > -1 \\ 4x \neq 0 \\ \frac{x}{2} > -2 \\ \frac{x}{2} \neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{2}{5} \\ x > -\frac{1}{4} \\ x \neq 0 \\ x > -4 \\ x \neq -2 \end{cases}$

$a \cdot b \cdot c = y \cdot y (y-1) = 4$

$y^3 - y^2 - 4 = 0$

$(y-2)(y^2+y+2) = 0$

$y = 2$

$\Downarrow$

1) $\begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \\ (4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \frac{x}{2}+2 = 5x-1 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 2$ не является решением

2) $\begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \\ 4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 2$ является решением

3) $\begin{cases} \sqrt{5x-1} = 4x+1 \\ (4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1 \end{cases}$

$\sqrt{5x-1} = 4x+1$

$\begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ 16x^2+8x+1-5x+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x \geq 1 \\ 16x^2+3x+2=0 \end{cases}$

$D = 9 - 128 < 0$

$\Downarrow$

$\varnothing$

Ответ: при $x = 2$,

НОД $(a, b, c) = 6$

НОК $(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a \vdots 6$
$b \vdots 6$
$c \vdots 6$

1) $a = 2^{15} \cdot 3^{16}$ 2) $a = 2^{x} \cdot 3$
$a \vdots b$ $b = 3^{y} \cdot 2$
$a \vdots c$ $c = 2^{c} \cdot 3^{d}$

1) $a = 2^{15} \cdot 3^{16}$
$b = 2^{x} \cdot 3, \; x \in [1; 15]$
$c = 3^{y} \cdot 2, \; y \in [1; 16]$

$15 \cdot 16$

2) $a = 2^{15} \cdot 3$
$b = 3^{16} \cdot 2$
$c = 2^{x} \cdot 3^{y}, \; x \in [1; 15]$
$y \in [1; 16]$

$15 \cdot 16 \cdot 4 - 1$

3) ~~$a = 2^{15}$~~

$\left[\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \vdots 2^{15}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \vdots 6\right.$

$\left[\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \vdots 3^{16}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^{15} \cdot 3 \\ b = 3^{16} \cdot 2 \\ c = 2^{x} \cdot 3^{y} \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2^{15} \cdot 3^{16} \\ b = 2^{x} \cdot 3 \\ c = 3^{y} \cdot 2 \end{cases}$

$15 \cdot 16 \cdot 2 - 1 =$
$= 16 \times 30 = 480$, $480 - 1 =$
$= 479 \cdot 6$

$479 \times 6 = 2874$

$480 \times 6 = 2880$

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1), \; \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2, \; \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)$

$2\log_{(5x-1)}4x+1 \cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \qquad \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$4\log_{(5x-1)}\frac{x}{2}+2$

4

$\begin{cases} \sqrt{5x-1} = 4x+1 \\ 4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 5x-1 \end{cases}$

$4x+1 = 5x-1$
$4x+1 = \sqrt{5x-1}$
$5x-1 = \sqrt{5x-1}$

$\left[\begin{array}{l} 5x-1=0 \\ 5x-1=1 \end{array}\right.$ не в ОДЗ

$\begin{cases} \sqrt{5x-1} = 4x+1 \\ \frac{x}{2}+2 = 5x-1 \\ (4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{cases}$

$(4x+1)^2 = (5x-1)^2$
~~$4x+1 = \sqrt{5x-1}$~~
$(4x+1)^2 = 5x-1$
$(5x-1) = (5x-1)^2$

21104993 (U228947 M1296150)

№5

$y = \cancel{3x} - 1$

$3x = 5$

$x = \frac{5}{3}$

$4 = x^2(x-1)$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$D = 1 -$

$x^3 - x^2 - 4 \mid x-2$

$x^3 - 2x^2 \quad \mid x^2 + x + 2$

x^2

x^2

$2x - 4$

$2x - 4$

0

$\cancel{(x^2+x+2)(x-2)} = x^3$

$\cancel{(x^2+x+2)(x-2) = x^3 - x^2} - 4$

$D = 1 - 8$

$x = 2$

1) $\sqrt{5x-1} = 4x+1$

$(4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\frac{x}{2} + 2 = 5x - 1$

$(5x-1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$16x^2 + 8x + 1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4$

$\frac{63x^2}{4} + 6x - 3 = 0$

$9^2 = 3^2$

$3 = 9$

Нок ...

№4 Чистовик 2

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a \vdots 6;\ b \vdots 6;\ c \vdots 6$, хотя бы одно из чисел $a;b;c \vdots 2^{15}$, хоть одно из чисел $a;b;c \vdots 3^{16}$

1) $a=2^{15}\cdot 3^{x}$, $x\in[1;16]$, $x\in N$
$b=3^{16}\cdot 2^{y}$, $y\in[1;15]$, $y\in N$
$c=2^{z}\cdot 3$, $z\in[1;15]$, $z\in N$

$\Downarrow$

всего способов $16\cdot 15\cdot 15$
из них $a=b$ в 1 случае
$a=c$ в 1 случае

$\Downarrow$

~~во~~ всевозможных перестановок
$(16\cdot 15\cdot 15-2)\cdot 6+2\cdot 3$

2) $a=2^{15}\cdot 3^{x}$, $x\in[1;16]$, $x\in N$
$b=3^{16}\cdot 2^{y}$; $y\in[1;15]$; $y\in N$
$c=2\cdot 3^{z}$, $z\in[1;16]$, $z\in N$
всего $16\cdot 15\cdot 16$ способов
из них в п.1 учтено $16\cdot 15$
и $a=b$ в 1 случае
$b=c$ в 1 случае

$\Downarrow$

перестановок $(16\cdot 15\cdot 15-2)\cdot 6+2\cdot 3$

3) $a=2^{15}\cdot 3^{x}$ $x\in[1;16]$, $x\in N$
$b=3^{16}\cdot 2$
$c=2^{y}\cdot 3^{z}$ $y\in[2;15]$, $z\in[2;16]$, $y,z\in N$

всего способов $16\cdot 15\cdot 16$
в п.1 учтено $16\cdot 15$
в п.2 учтено

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6$, хотя бы 1 из чисел $a,b,c \vdots 2^{15}$, хотя бы 1 из чисел $a,b,c \vdots 3^{16}$

1) $a = 2^{15}\cdot 3^{x}$, $x\in[1;16]$, $x\in N$
$b = 3^{16}\cdot 2^{y}$, $y\in[1;15]$; $y\in N$
$c = 2^{p}\cdot 3^{q}$, $p\in[1;15]$, $q\in[1;16]$, $p;q\in N$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ p=1 \\ q=1 \end{array}\right.$$

1) $x=y=p=q=1$
1 способ

2) 3 из $xypq=1$
~~4 способа~~ $2\cdot 15+2\cdot 14$ способов

3) 2 из $xypq=1$
~~способов~~ $15\cdot 15+14\cdot 14+4\cdot 15\cdot 14$ способов

4) $x=1$
$14\cdot 14\cdot 15$ способов

5) $y=1$
$15\cdot 14\cdot 15$ способов

6)

21104993 (U228947 M1296150)

Черновик ②

$, b; c \vdots 3^{16}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{14} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6$, хотя бы 1 из чисел $a, b, c \vdots 2^{15}$, хотя бы 1 из чисел $a, b, c \vdots 3^{14}$

$a = 2^x \cdot 3^y$

$b = 2^m \cdot 3^n$ => способов $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 14 + C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 14 +$

$c = 2^p \cdot 3^q$

(выбрать максимальные степени 2 и 3) (если есть 2^1)

$\cancel{+ C_6^5 \cdot C_5^2 + C_3^1 \cdot 13 + C_3^1 \cdot 14 + C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 13 + C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 14} +$

$+ C_6^3 \cdot C_5^3 + C_6$

$+ C_6^2 \cdot C$