Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104905**

ID профиля: **857956**

Вариант 17

(Чистовик) Вариант - 17

№1 a_1 - первый член прогрессии; K - разность прогрессии, где $a_1; K \in \mathbb{Z}$ (*) ; $K>0$ (т.к. прогрессия возрастающая)

тогда: $S = \frac{2a_1+9K}{2}\cdot 10 = 10a_1+45K$

$a_6 = a_1+5K$; $a_{12} = a_1+11K$; $a_7 = a_1+6K$; $a_{11} = a_1+10K$.

по условию: $S+1 < a_6a_{12} \Leftarrow S+17 < a_6a_{12}+16$; $S+17 > a_7a_{11}$

Тогда $a_7a_{11} < a_6a_{12}+16$

$a_7a_{11} = a_1^2+16a_1K+60K^2$ $\quad a_6a_{12} = a_1^2+16a_1K+55K^2$

тогда: $\cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1K}+60K^2 < \cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1K}+55K^2+16$

$5K^2<16 \Rightarrow K^2<3,2 \Rightarrow$ из (*) $K=1$

Тогда: $S=10a_1+45$; $a_6\cdot a_{12} = a_1^2+16a_1+55 \Rightarrow a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0 \Rightarrow a \neq -3$ (1)

$a_7\cdot a_{11} = a_1^2+16a_1+60 \Rightarrow a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62$

$a_1^2+6a_1-2<0$ (**)

Решим уравнение: $a_1^2+6a_1-2=0$

$a_{1,2} = -3\pm\sqrt{9+2}$

Тогда (**) вып. при $-3-\sqrt{11} < a < -3+\sqrt{11}$ $\quad 3<\sqrt{11}<4$ (2)

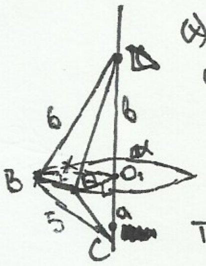
с учётом (1), и (2), и (*) : $a = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: a_1 может принимать значения: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

Чистовик Вариан - 17

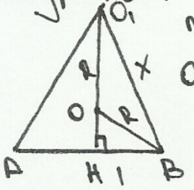
-2| Точки, лежащие на заданных расстояниях от данных точек лежат на окружности, находящейся в плоскости (α), перпендикулярной отрезку, соединяющему данные точки
Существует два варианта расположения окр. (т.к. $CA < AD$) и плоскости α
Пусть $O_1 = Пр_\alpha(D)$. Пусть $DO_1 = b$; $CO_1 = a$; $BO_1 = AO_1 = x$ (из равных $\triangle BDO_1$ и $\triangle ADO_1$)

1 сл

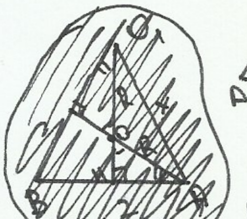


(α) радиус цилиндра из условия - радиус окр., описанной около $\triangle ABO_1$

Тогда, т.к. $\triangle BO_1A$ - равнобедренный; H - середина [AB]



по т. Пифагора:
$O_1H = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{x^2-1}$



$\Rightarrow OH = \sqrt{x^2-1} - R$

из $\triangle HOB$ по т. Пифагора получим уравнение:

$1 + (\sqrt{x^2-1} - R)^2 = R^2$, где $x > 1$

$1 + x^2 - 1 - 2R\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}} = g(x)$

Найдём минимум ф-ции, взяв $g'(x)$

$g'(x) = \frac{4x\sqrt{x^2-1} - \frac{4x^3}{2}\sqrt{x^2-1}}{4(x^2-1)} = 0$

т.к. $x>1$: $x\sqrt{x^2-1} - \frac{x^3}{2\sqrt{x^2-1}} = 0$

$x^2 - 1 - \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

- минимум ф-ции (происходит смена знака производной с "-" на "+")

$\Rightarrow R = 1$

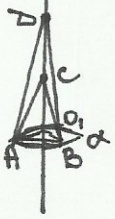
по т. Пифагора:

$a^2 + x^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 23 \Rightarrow a = \sqrt{23}$

$b^2 + x^2 = 36 \Rightarrow b^2 = 34 \Rightarrow b = \sqrt{34}$

$CD = a + b = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

2 сл R - радиус цилиндра из условия



аналогично 1 сл:

$x = \sqrt{2}$ $R = 1$

$a = \sqrt{23}$ $b = \sqrt{34}$

$CD = b - a = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$ или $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Чистовик Вариант – 17

① $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2\end{cases}$ – круг, радиуса $\sqrt{2}$, с центром $(a;b)$

3)

② Найдём пары чисел $(a;b)$, которые могут быть центрами:

$$a^2+b^2\leq \min(2a+2b;2)$$

• если $a+b<1$, то $a^2+b^2\leq 2a+2b$

$$a^2-2a+1+b^2-2b+1\leq 2$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2\leq 2$$ –

– круг с центром $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$

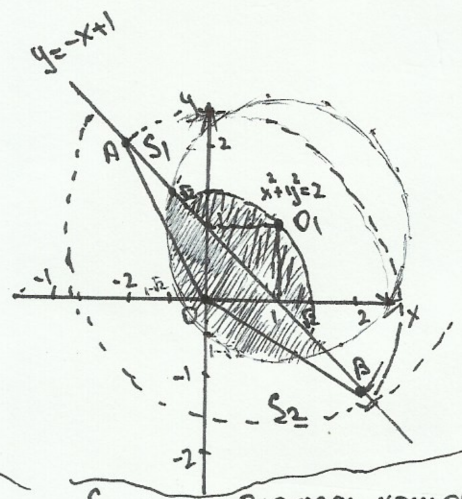
– пересечения с областью ниже прямой $y=-x+1$

• если $a+b\geq 1$: $a^2+b^2\leq 2$ – пересечение круга с центром в начале координат и области не ниже прямой $y=-x+1$

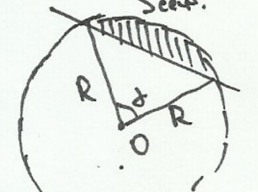
③ т.к. центр может находится в любой из точек заштрихованной области, то объединение кругов даст два круговых сегмента:

1) пересечение области выше прямой $y=-x+1$ и круга с центром $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$ – его площадь S_1

2) пересечение области ниже прямой $y=-x+1$ и круга с центром $(1;1)$ и радиусом $2\sqrt{2}$ его площадь S_2



Тогда $S=S_1+S_2$ (т.к. внутренние области круговых сегментов не пересекаются)



Площадь кругового сегмента: (α – в радианах)

$$S_{сегм}=\frac{\alpha}{\pi}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=$$

$$=R^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

Площадь S_1: Пусть A,B – точки пересечения секущей и окр. Тогда для них вып. система

$$\begin{cases}x^2+y^2=8\\ x+y=1\Rightarrow y=1-x\\ \Rightarrow x^2+1-2x+x^2=8\end{cases}$$

$$2x^2-2x-7=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+14}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$$

$$A\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2};\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)\quad B\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2};\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$OA=OB=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\sqrt{15})^2+(1+\sqrt{15})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2+30}=2\sqrt{2}$$

$$AB=\sqrt{15+15}=\sqrt{30}\Rightarrow\cos\widehat{AOB}=\frac{30-8-8}{2\cdot 8}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$$

$$\sin\widehat{AOB}=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$S_1=8\left(\arccos\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{15}}{16}\right)$$

Площадь S_2:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\ y=1-x\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x^2-2x+1+x^2=8\\ 2x^2-2x-7=0\end{matrix}\Rightarrow A \text{ и } B \text{ точки пересечения}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{AO_1B}=\cos\widehat{AOB}\Rightarrow S_1=S_2$$

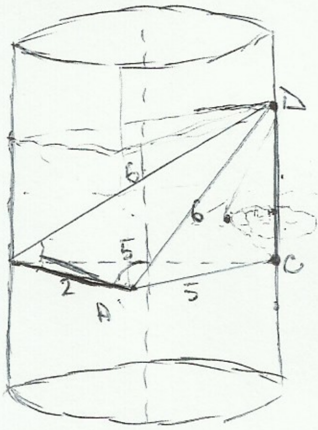
$$\Rightarrow S=16\left(\arccos\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{15}}{16}\right)$$

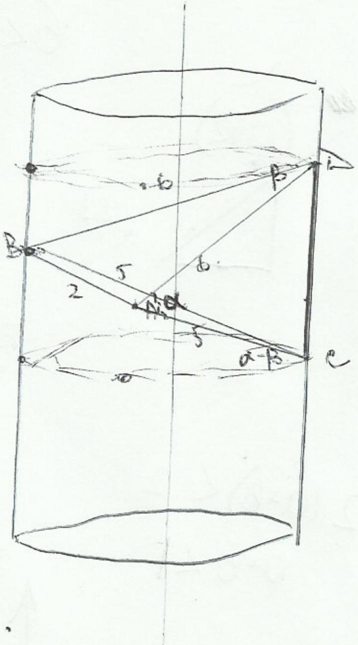
Ответ: $S=16\cdot\left(\arccos\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{15}}{16}\right)$

Черновик.

$a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16a_1K + 55K^2$

$$\begin{array}{r} 45 \\ +17 \\ \hline 62 \end{array}$$





$6\cos\beta = 5\cos(\alpha-\beta)$

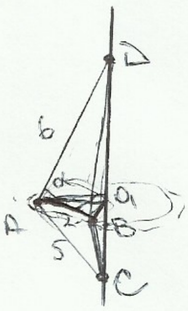
$6\cos\beta = 5\cos\alpha\cos\beta + 5\sin\alpha\sin\beta$

$x^2+b^2=36$

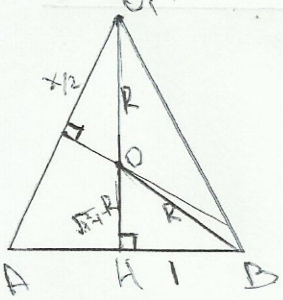
$x^2+a^2=25$

$\sqrt{35}$

$\cancel{\sqrt{35}}$



$b^2-a^2=11$



$1+(\sqrt{x^2-1}-R)^2 = R^2$

$1+x^2-1-2R\sqrt{x^2-1}=0$

$2R\sqrt{x^2-1}=x^2$

$4R^2x^2-4R^2=x^4$

$x \geq 1$

$R = \dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}} = g(x)$

$g'(x) = \dfrac{\cancel{4}x\sqrt{x^2-1} - \cancel{4}\frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{\cancel{4}\,x^2-1}$

$x\sqrt{x^2-1} - \dfrac{x^3}{2\sqrt{x^2-1}} = 0$

$x^2-1-\dfrac{x^2}{2}=0$

$\dfrac{x^2}{2}=1$

$x^2=2$

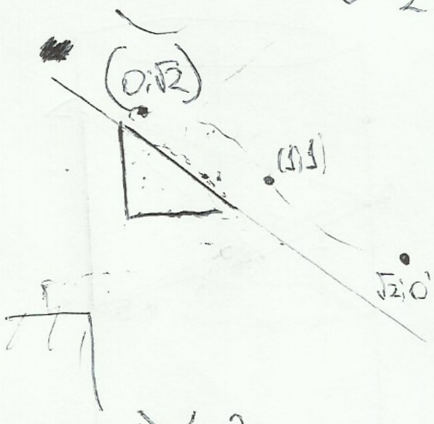
$x=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $R=1$

Черновик

$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b;2)$

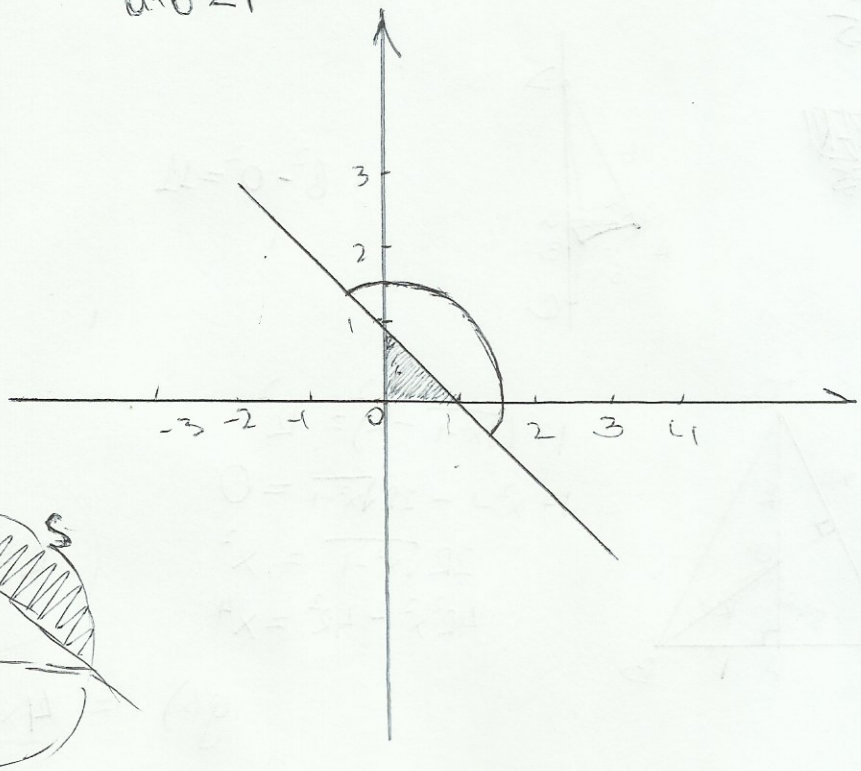
$a<2$
$b<2$

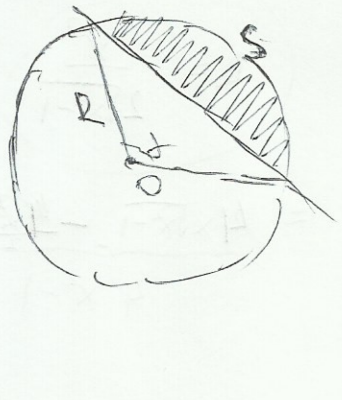
a^2+b^2



$2(a+b)<2$

$a+b<1$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104905**

ID профиля: **857956**

Вариант 17

Чистовик Вариант - 17

-4] Найти кол-во троек $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе: $a,b,c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 & (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} & (2) \end{cases}$$

Из (2) в разложениях a, b, c на простые множители присутствуют только 2 и 3
$\Rightarrow$ числа можно предстовить в виде

$$a = 2^{l_1}\cdot 3^{m_1}; \quad b = 2^{l_2}\cdot 3^{m_2}; \quad c = 2^{l_3}\cdot 3^{m_3}$$

(I) Рассмотрим тройку чисел $l_1; l_2; l_3$
Из (1) и (2) среди этих чисел есть 1 и 15, а оставшееся является натуральным числом из отрезка $[1;15]$ (15 вариантов)
$\Rightarrow$ кол-во вариантов выбрать тройку чисел $(l_1; l_2; l_3)$: $\underbrace{3!}_{\text{перестановки}}\cdot 15 = \underline{\underline{90}}$ (с повторами)

Но варианты с 3-м числом равным 1 и 15 подсчитаны несколько раз (дважды):
(1 1 15); (1 15 1); (15 1 1) (1 15 15); (15 1 15) (15 15 1) (6 комбинаций)
$\Rightarrow$ количество вариантов без повторений: $\boxed{84}$

(II) Рассмотрим тройку чисел $m_1; m_2; m_3$
Из (1) и (2) среди этих чисел есть 1 и 16, а оставшееся является натуральным числом из отрезка $[1;16]$ (16 вариантов)
$\Rightarrow$ кол-во вариантов выбрать тройку чисел $(m_1; m_2; m_3)$: $3!\cdot 16 = 96$ (с повторами)
аналогично I кол-во вариантов без повторов $\boxed{90}$

Кол-во варианов выбрать тройку чисел $(a;b;c)$: $84\cdot 90 = \underline{\underline{7560}}$

Ответ: 7560 способов

Чистовик Вариант - 17

-5| Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два числа из них равны, а третье меньше их на 1

Рассмотрим пары чисел и приравняем их:

ОДЗ: $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>1/5 \\ x\neq 2/5 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x>1/5 \\ x\neq 2/5 \end{cases}$

1сл $2\log_{(5x-1)}(4x+1) = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$ и $2\log_{(5x-1)}(4x+1) = 1+\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

на ОДЗ: $\Leftarrow$ $\frac{1}{\log_{(4x+1)}(5x-1)} = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\begin{cases} \frac{\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)} = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\ln(4x+1)} \\ \frac{2\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)} = 1+\frac{\ln(5x-1)}{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{c}{a} \Rightarrow a^2=bc \\ 2ac=b^2+bc \end{cases}$

Пусть $\ln(4x+1)=a$
$\ln(5x-1)=b$
$\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)=c$

$a^2-2ac+b^2=0$

$c=\frac{a^2+b^2}{2a}$

Тогда $b^3+a^2b-2a^3=0$

$b=a$ - корень; разделим по схеме Горнера:

a	1	0	a^2	$-2a^3$
	1	a	$2a^2$	0

$\underbrace{b^2+ab+2a^2}_{>0 \text{ - при любых } b}=0$

Тогда $c=a$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x+1=5x-1 \\ 4x+1=\frac{x}{2}+2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{2}{7} \end{cases}$ - нет решений!

2сл

$\begin{cases} 2\log_{(5x-1)}(4x+1) = \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) \\ 2\log_{(5x-1)}(4x+1) = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)+1 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2=2ac \\ 2\frac{c}{a}+1 = \frac{b}{c} \Rightarrow 2c^2+ac=ab \Rightarrow 2c^2+\frac{b^2}{2}=ab \Rightarrow a=\frac{4c^2+b^2}{2b} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{2b^3=8c^3+2b^2c} \Leftarrow 2b^3-2b^2c-8c^3=0 \Leftarrow b^3-b^2c-4c^3=0$

$\boxed{b=2c}$ - корень Разделим по схеме Горнера

2c	1	$-c$	0	$-4c^3$
	1	c	$2c^2$	0

$b^2+bc+2c^2=0 \Leftarrow \underbrace{b^2+bc+c^2}_{>0}+\underbrace{c^2}_{>0}=0$ при любых b

Тогда: $a=\frac{8c^2}{4c}=2c$

$\Rightarrow \begin{cases} (5x-1)^2=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ (4x+1)=(5x-1) \end{cases} \Leftarrow \boxed{x=2}$

3сл $\begin{cases} 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) \\ 2\log_{(5x-1)}(4x+1) + 1 = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) \end{cases}$

Чистовик Вариант -17

-5) (продолжение)

3сл
$$\begin{cases} 2\frac{c}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow ab = 2c^2 \\ 2\frac{a}{b} + 1 = 2\frac{c}{a} \Rightarrow 2a^2 + ab = 2bc \Rightarrow a^2 + c^2 - bc = 0 \end{cases}$$

$b = \frac{a^2+c^2}{c}$

тогда: $a^3 + ac^2 = 2c^3$

аналогично 1сл $a = c \Rightarrow b = 2c$ ~~...~~ - нет решений

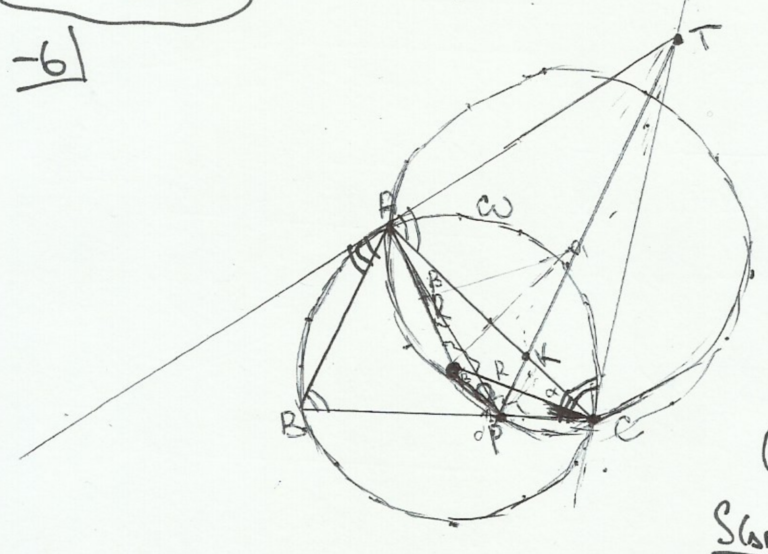
$$\begin{cases} 4x+1 = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ (5x-1) = (4x+1)^2 \end{cases}$$

- нет решений

Ответ $x = 2$

Чистовик   вариант – 17

–6)



$S(\triangle APK) = 6$; $S(\triangle CPK) = 4$; $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$

Найти: $S(\triangle ABC)$; AC

$\angle AOC = \angle APC$ (как вписанные, опирающиеся на равные дуги)

$\frac{AK}{KC} = \frac{S(\triangle AKP)}{S(\triangle CPK)} = \frac{3}{2}$ (как треугольники с одной высотой)

$\Rightarrow KC = \frac{2}{5}AC$

$(AB) \parallel (KP) \Rightarrow \triangle PKC \sim \triangle ACC$

$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle KPC)} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow S(\triangle ABC) = 25$

Черновик

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\frac{\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)}$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) = \frac{\ln(5x-1)}{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}$$

$$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\ln(4x+1)}$$

$\cancel{\log_{\frac{x}{2}+2}}$

$\cancel{\log_{(5x-1)}(4x+1) = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

$\cancel{\log_{(4x+1)}}$ $\cancel{\frac{1}{\log_{(4x+1)}(5x-1)}}$

Пусть $\ln(4x+1) = a$
$\ln(5x-1) = b$, тогда
$\ln\left(\frac{x}{2}+2\right) = c$.

$2a$

$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{b}}{a}$

$a^2 = bc$

$2ac = b^2 + bc$ $a=b=c$

$2\frac{a}{b} = \frac{b}{c} + 1$

$a^2 - 2ac + b^2 = 0$

$\ln(4x+1)\cdot\ln(4x+1) = \ln\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\ln(5x-1)$

$c = \frac{a^2+b^2}{2a}$

$b^3 + a^2b - 2a^3 = 0$

$2a^3 = a^2b + b^3$

$b = a$

$$\frac{2\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)} = \frac{\ln(5x-1)}{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)} + 1$$

	1	1	0	a^2	$-2a^3$
a	1	a	$2a^2$	0	

$$2\ln(4x+1)\ln\left(\frac{x}{2}+2\right) = \ln^2(5x-1) + \ln(5x-1)\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$2\ln(4x+1)\ln\left(\frac{x}{2}+2\right) = \ln^2(5x-1) - \ln^2(4x+1)$$

$b^2 + ab - 2a^2 = 0$

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = k$.

$b_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+8a^2}}{4}$

$\log_{(4x+1)}(5x-1) = \frac{1}{k}$

$$\begin{cases} 5x-1 = (4x+1)^{\frac{1}{k}} \\ \frac{x}{2}+2 = (4x+1)^k \end{cases}$$

$(5x-1)^k = 4x+1$

1

$x=2$

$$\begin{cases} (5x-1) = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ (4x+1) = [illegible]\ (5x-1) \end{cases}$$