Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104863**

ID профиля: **204095**

Вариант 17

Чистовик. №1.

$a_1, a_2 \dots a_n$ – ар. пр.

пусть d – разность этой прогрессии

$\cancel{S_{10} = \frac{a_1 + a_{n}}{}}$ $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$; $a_{10} = a_1 + d(10-1)$

S_{10} $\frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d - 10a_1 > -55d^2 + 45d + 1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 16a_1d + 60d^2$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < a_1 \cdot 10 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16a_1d - 10a_1 < -60d^2 + 45d + 17$

Получим систему:

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d - 10a_1 > -55d^2 + 45d + 1 \\ a_1 + 16a_1d - 10a_1 < -60d^2 + 45d + 17 \end{cases} \Rightarrow -60d^2 + 45d + 17 > -55d^2 + 45d + 1$

$5d^2 < 16 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5}$; $d \in \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Но по усл. прогрессия возрастающая $\Rightarrow$

$\Rightarrow d > 0$; $d \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$\frac{4}{\sqrt{5}} \vee 1$; $\cancel{4 \vee}$ $4 \vee \sqrt{5}$; $16 \vee 5$; $16 > 5 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} > 1$

$\frac{4}{\sqrt{5}} \vee 2$; $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \vee 4$; $\frac{16}{5} \vee 4$; $16 \vee 20$; $16 < 20 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

1

Чистовик.

Учитывая, что прогрессия состоит ~~из~~ только из целых чисел: ~~…~~ $d \in \mathbb{Z}$

$$d \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right), \ d \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ \begin{matrix} d \in (0; 1], \\ d \in \mathbb{Z} \end{matrix} \ \Rightarrow \ \underline{d = 1}$$

Подставим $d = 1$ в нашу систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 > -9 \\ a_1^2 + 6a_1 < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases}$$

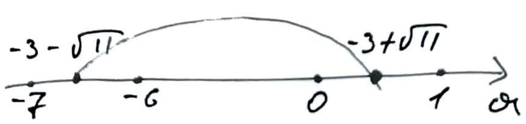
$D_1 = 9 + 2 = 11$; ~~…~~

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -3-\sqrt{11} \\ a_2 = -3+\sqrt{11} \end{array}\right.$$

Но $a_1 \in \mathbb{Z}$ (прогрессия состоит и целых чисел)

$-3-\sqrt{11} > -3-\sqrt{16} = -7$ $\qquad$ $-3+\sqrt{11} < -3+\sqrt{16} = 1$

$-3-\sqrt{11} < -3-\sqrt{9} = -6$; $\qquad$ $-3+\sqrt{11} > -3+\sqrt{9} = 0$



Учитывая, что $a \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\} \\ a \neq -3 \end{cases}$

Итак, $a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

2

Чистовик   №3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2) & (2) \end{cases}$$

Построим нерав-во (2) в координатной плоскости Oab:

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

1). $2a+2b \geq 2 \Leftrightarrow a+b \geq 1 \Leftrightarrow b \geq 1-a$

$a^2+b^2 \le 2$ (при $2a+2b=2$ $\min(2a+2b, 2)=2$)

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ b \geq 1-a \end{cases}$ | Первое нерав-во системы задаёт круг с ц. в т. $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Второе нерав-во задает полуплоскость, ограниченную прямой $b=1-a$ и расположенную выше неё

2) $2a+b\cdot 2 < 2 \Leftrightarrow a+b<1 \Leftrightarrow b<1-a$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

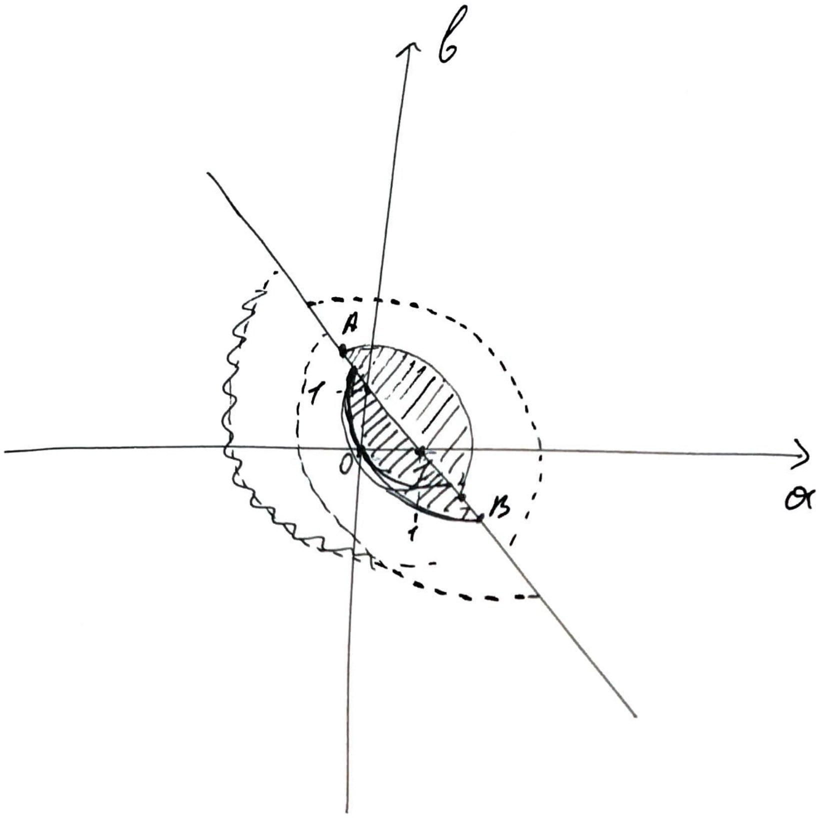
$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

$\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \\ b<1-a \end{cases}$ | Первое нерав-во задаёт круг с ц. в т. $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Второе нерав-во задаёт полуплоскость, огр. прямой $b=1-a$ и расп. ниже неё

3

Чистовик



~~[illegible]~~

Теперь найдём все пары (x, y) такие, что для них существуют a, b, изображенные на графике и все это обращают нерав-во $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ в ~~[illegible]~~ верное.

Ясно, что решения перестанут находиться, ~~[illegible]~~ огр., которую задает нерав-во (1) когда будет удалена от дуг изображенных огр.: (~~[illegible]~~ частей огр.) на расстояние, превышающее её радиус.

4

Чистовик.

Нерав-во (1) задаёт ~~окр.~~ круг с ц. в т. $(x;y)$ радиуса $\sqrt{2}$.

Получается, все пары (x,y) расположены внутри ~~окр.~~ круга радиуса $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ и центром либо в точке $(0;0)$, либо в т. $(1;1)$. Покажем это на графике.

~~Это~~ Найдём площади таких кругов:

~~Круг~~ $S_1 = S_{кр.}$, с ц. в т. $(1;1)$ радиуса $2\sqrt{2}$

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 8}{2} = 4\pi$$

$$\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 = 2 \\ b = 1-a \end{cases}$$

$(a-1)^2 + a^2 = \cancel{a}^2$;

$a^2 - 2a + a^2 + 1 = 2$

$2a^2 - 2a - 1 = 0$

$D = 4+8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

$a_1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $a_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $b_2 = \frac{2-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

~~$S_2 = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$~~

$S_2 = S$ сектора AB (большего) $-$

$- S_\Delta$ ~~(неразборчиво)~~ равнобедр., со сторонами $2\sqrt{2}$; $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

S сектора большего $= \frac{\alpha}{2} \cdot R^2$

α – угол против осн. равнобедр. Δ.

5

$S_{об} = S_1 + S_2$

Черновик

№ 3

$x^2+y^2\le 2x+2y$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1\le 2$

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ ~~окр.~~ круг

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$ (3)

(3) – ~~окр.~~ круг с ц. в т. $(a;b)$ радиуса $\sqrt{2}$

Нет решений:

~~Если~~ 1. d от $a^2+b^2=2$ до 0 $(a-x)^2+(b-y)^2=2$ $>\sqrt{2}$

$$\cancel{\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^2-2ax+x^2+b^2-2by+y^2=2 \end{cases}}$$

(меньше или равно)

x, y движутся по окр. радиус которых на $\sqrt{2}$ больше радиусов первых окр. т.е. $\underline{2\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2\le 2\sqrt{2} \\ x^2+y^2\le 2\sqrt{2} \end{cases}$$ – изобр., посчитать площадь.

Черновик

$$\begin{cases} a^2+16a-10a > -60+45+17 \\ a^2+16a-10a > -55+45+1 \end{cases}$$

$a^2+6a > 2$

a^2+16

$$\begin{cases} a^2+16ad-10a < -60d^2+45d+17 \\ \underbrace{a^2+16ad-10a}_{t} > -55d^2+45d+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t < -60d^2+45d+17 \\ t > -55d^2+45d+1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$-60d^2+45d+17 > -55d^2+45d+1$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$; $d \in \left(-\frac{4}{\sqrt5}; \frac{4}{\sqrt5}\right)$, $d>0$; .... $d=1$

$$\begin{cases} a^2+6a < 2 \\ a^2+6a > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+6a-2<0 \\ a^2+6a+9>0 \end{cases}$$

$a^2+6a-2<0$

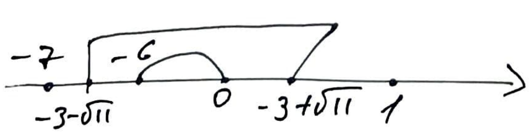
$D_1 = 9+2=11$

$a_1 = -3-\sqrt{11}$; $a_2 = -3+\sqrt{11}$; $a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$

$a^2+6a+9>0 \Leftrightarrow (a+3)^2>0 \Leftrightarrow \underline{a \neq -3}$

$-7 < -3-\sqrt{11} < -6$

$0 < -3+\sqrt{11} < 1$



Отв.: $\rightarrow \underline{a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}}$

Черновик №1.

$a_1, a_2, a_3 \dots a_{10}$ $d>0$ $d \in \mathbb{Z}$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5a_1 + 5a_{10}$ | $a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_1 + 2d$
$a_4 + a_1 + 3d$
$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$

$\cancel{S = a_1 + a_1 + d}$ $S = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \underline{10a_1 + 45d}$

$a_6 = a_1 + 5d$
$a_{12} = a_1 + 11d$; $(a_1 + 5d)(a + 11d) > 10a + 45d + 1$

$a^2 + 16da + 55d^2 > 10a + 45d + 1$

$\underline{a^2 + 16ad - 10a + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \quad (1)}$

$a_7 \cdot a_{11} = (a + 6d)(a + 10d) > 10a + 45d + 17$

$a^2 + 16ad + 60d^2 > 10a + 45d + 17$

$\left\{\begin{array}{ll} \underline{a^2 + 16ad - 10a \overset{<}{\cancel{\ }} - 60d^2 + 45d + 17} & (2) \\ a^2 + 16ad - 10a > -55d^2 + 45d + 1 & (1) \end{array}\right.$ $-$

$5d^2 - 16 < 0$

$5d^2 < 16$

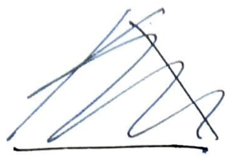
$d^2 < \frac{16}{5}$; $d \in (\frac{-4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}})$ но $d > 0$

$d \in (0; \frac{4}{\sqrt{5}})$; $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\frac{4\sqrt{5}}{5} \vee 2$; $4\sqrt{5} \vee 10$; $2\sqrt{5} \vee 5$

$2 > \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \underline{d = 1}$ $20 \vee 25$

~~Чистовик~~ Черновик.



$S_{кр} = \pi R^2$ $\quad\quad$ $\pi : \frac{\alpha}{2}$

$S_{сек} = \cancel{\frac{\pi}{2\pi}} \frac{\alpha}{2} R^2$

Черновик №3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,\ 2)\end{cases}$$

$$x^2-2ay+a^2+y^2-2by+b^2\le 2$$
$$a^2+b^2\le 2+ay+by-x^2-y^2$$

1) $2a+2b\ge 2 \iff a+b\ge 1$

Тогда $\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a+b\ge 1\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ 2a+2b\ge 2\end{cases}$

$$2a+2b\ge a^2+b^2$$
$$2a-a+2b-b\ge 0$$
$$a(2-1)+b(2-1)\ge 0$$
$$a+b\ge 0$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a^2+2ab+b^2\ge 1\end{cases} \iff \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a^2+b^2\ge 1-2ab\end{cases}$$

$2\ge 1-2ab$

$2ab\ge -1$; $ab\ge -\frac{1}{2}$

$\begin{cases}a+b\ge 1\\ ab\ge -\frac{1}{2}\end{cases}$;

Пусть сначала $b\ \cancel{a}>0$

$a\ge \cancel{}\ 1-b$

$a\ge -\frac{1}{2b}$

$\cancel{}\ -\frac{1}{2b}+b-1\le 0 \quad |\cdot 2b$

$-1+2b^2-2b\le 0$; $2b^2-2b-1\le 0$

$D=4+8=12$; $D_1=1+2=3$

$b_1=\frac{1-\sqrt3}{2}$; $b_2=\frac{1+\sqrt3}{2}$; $b\in(0;\frac{1+\sqrt3}{2})$

$2+ay+by-x^2-y^2-\min(2a+2b,\ 2)\ge 0$

$2+ay+by-x^2-y^2\ge \min(2a+2b,\ 2)$

1) $\underline{a+b\ge 1}$

$\cancel{}\ 2+a\cancel{y}x+by-x^2-y^2\ge \cancel{}\ 2$ $\qquad \cancel{x}(a-x)+y(b-y)\ge 0$

$a\cancel{y}x+by-x^2-y^2\ge 0$; $\cancel{x(a-x)+b(y)}$

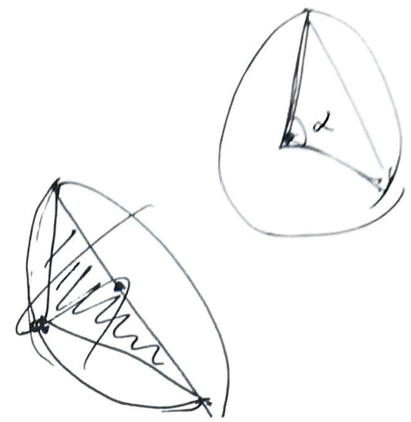
№ 7, чуловески

$$x^2 - ax + y^2 - by \le 0$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}$$



(3)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ x^2+y^2 \le \min(2x+2y, 2)\end{cases}$$

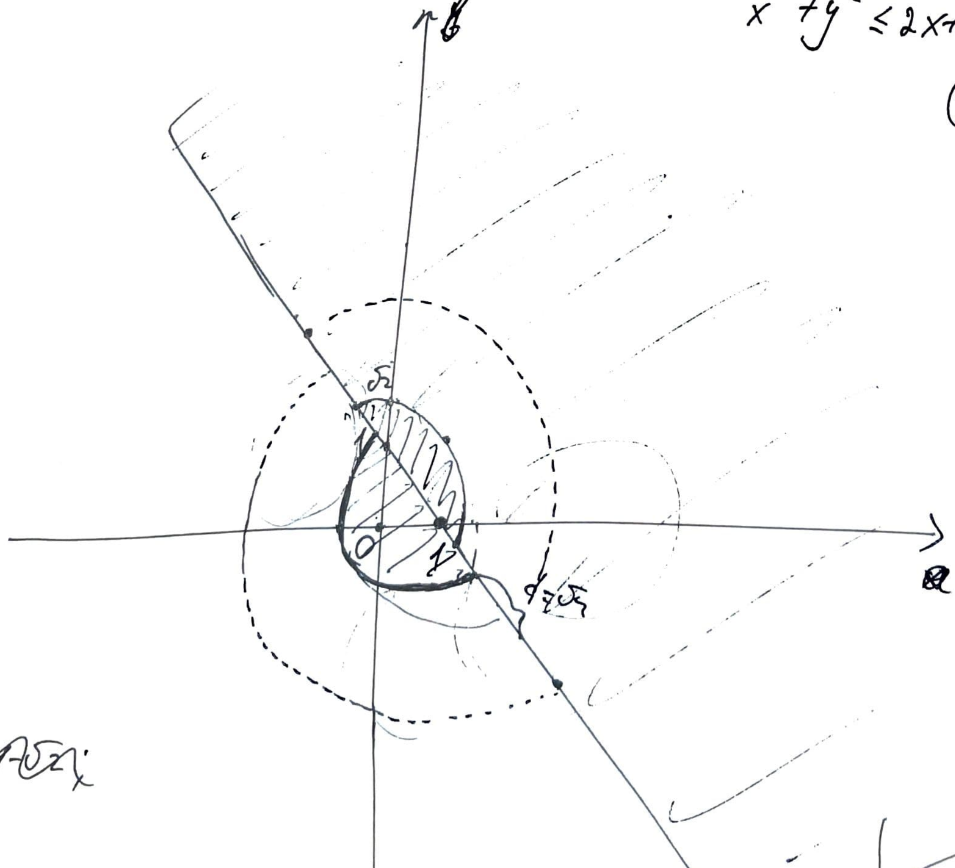
a^2+b^2; a, b

1). $\begin{cases} x+y \ge 1 \iff y \ge 1-x \\ x^2+y^2 \le 2 \text{ - окр. круг}\end{cases}$

2) $x+y<1 \iff y<1-x$

$x^2+y^2 \le 2x+2y$

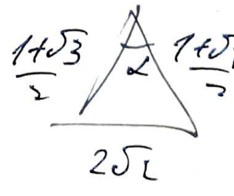
$$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 2$$



(1)

$a \in (1-\sqrt{2})$

$$S = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}^2$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104863**

ID профиля: **204095**

Вариант 17

Чистовик №1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6=2\cdot 3 & (1)\\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} & (2)\end{cases}$$

$a=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$;

$b=2^{m}\cdot 3^{n}$

$c=2^{k}\cdot 3^{l}$

из (1) => хотя бы 1 число из набора (a, b, c) содержит двойку в первой степени и хотя бы 1 число из этого набора содержит тройку в первой степени. Кроме того, каждое число содержит двойку и тройку в степени, не меньшей 1.; Ни одно из чисел α, m, k не превышает 15 и ни одно из чисел β, n, l не превышает 16. (следует из (2))

1). $\alpha=\beta=1$

$m\in\mathbb{Z}$, $m\in[1;15]$

$k\in\mathbb{Z}$, $k\in[1;15]$

$l\in\mathbb{Z}$, $l\in[1;16]$

$n\in\mathbb{Z}$, $n\in[1;16]$

Всего сл.: $N_1=15\cdot 15\cdot 16\cdot 16$

1

2). $\alpha=1$, $n=1$

Аналогично с первым, но $\beta\neq 1$, что не учесть сл. $\alpha=1, \beta=1$ 2 раза

$N_2=15\cdot 15\cdot 16\cdot 15$

Чистовик

3). $\alpha = 1, l = 1$

Аналогично, только $\beta \neq 1$, $n \neq 1$

$N_3 = 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$

4). $m = 1, \beta = 1$ (Аналог., только $\alpha \neq 1$)

$N_4 = 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 16$

5) $m = 1$, $n = 1$ (Аналог., только $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$)

$N_5 = 14 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 16$

6) $m = 1$, $l = 1$ (Аналог, только $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, n \neq 1$)

$N_6 = 14 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$

7). $k = 1, \beta = 1$ ($\alpha \neq 1$, $m \neq 1$)

N_7 $14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 16$

8). $k = 1$, $n = 1$ ($\alpha \neq 1, \beta \neq 1$, $m \neq 1$)

$N_8 =$ $14 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$

9). $k = 1, l = 1$ ($\alpha \neq 1, \beta \neq 1, n \neq 1, m \neq 1$)

$N_9 = 14 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 15$

2

$N_{об} = N_1 + \ldots + N_9 = 15^2 \cdot 16^2 + 15^3 \cdot 16 + 15^4 + 14 \cdot 15 \cdot 16^2 +$

$+ 14 \cdot 15^2 \cdot 16 + 14 \cdot 15^3 + 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 16 + 14^2 \cdot 15 \cdot 16 + 14 \cdot 14 \cdot 15^2$

Ответ: $15^2 \cdot 16^2 + 15^3 \cdot 16 + 15^4 + 14 \cdot 15 \cdot 16^2 + 14 \cdot 15^2 \cdot 16 + 14 \cdot 15^3 + 14 \cdot 15 \cdot 16^2 + 14^2 \cdot 15 \cdot 16 +$

$+ 14^2 \cdot 15^2$

Чистовик

№5.

Пусть $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a$;

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=b$;

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c$;

Заметим, что ни один из логарифмов не может из-за ограничений равняться нулю.

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq \frac{2}{5} \end{cases}$

Заметим, что $a\cdot b\cdot c = 4$

Рассмотрим 3 случая:

1). $\begin{cases} a=b \\ c=a-1 \\ c=\frac{4}{ab} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1=\frac{4}{ab} \\ a=b \end{cases}$;

3

$a-1=\frac{4}{a^2}$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a^2+a+2>0 \ (D<0)$

$a=2 \Rightarrow b=2, \ c=1$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x-1=4x+1 \Leftrightarrow x=2 \\ 4x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x}{2}+2=5x-1 \Leftrightarrow x+4=10x-2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$

решений нет.

Чистовик.

2). $\begin{cases} a = c \\ b = a-1 \\ b = \dfrac{4}{ac} \end{cases}$

$\dfrac{4}{a^2} = a-1 \iff a = 2 \Rightarrow c = 2,\ b = 1$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \iff x = 2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1 \iff x = 2 \\ \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) = 2 \iff x = 2 \end{cases}$

$x = 2$ - решение $\left(2 > \frac{1}{5},\ 2 \neq \frac{2}{5}\right)$

3). $\begin{cases} c = b \\ a = b-1 \\ a = \dfrac{4}{bc} \end{cases}$

$b - 1 = \dfrac{4}{bc} \iff b = 2 \Rightarrow a = 1,\ c = 2$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 1 \iff 4x+1 = \sqrt{5x-1} \\ \log_{(4x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 \iff 4x-1 = \frac{x}{2}+2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2 \iff 5x-1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{cases}$

$4x+1 = \sqrt{5x-1}$

$16x^2 + 8x + 1 = 5x - 1$

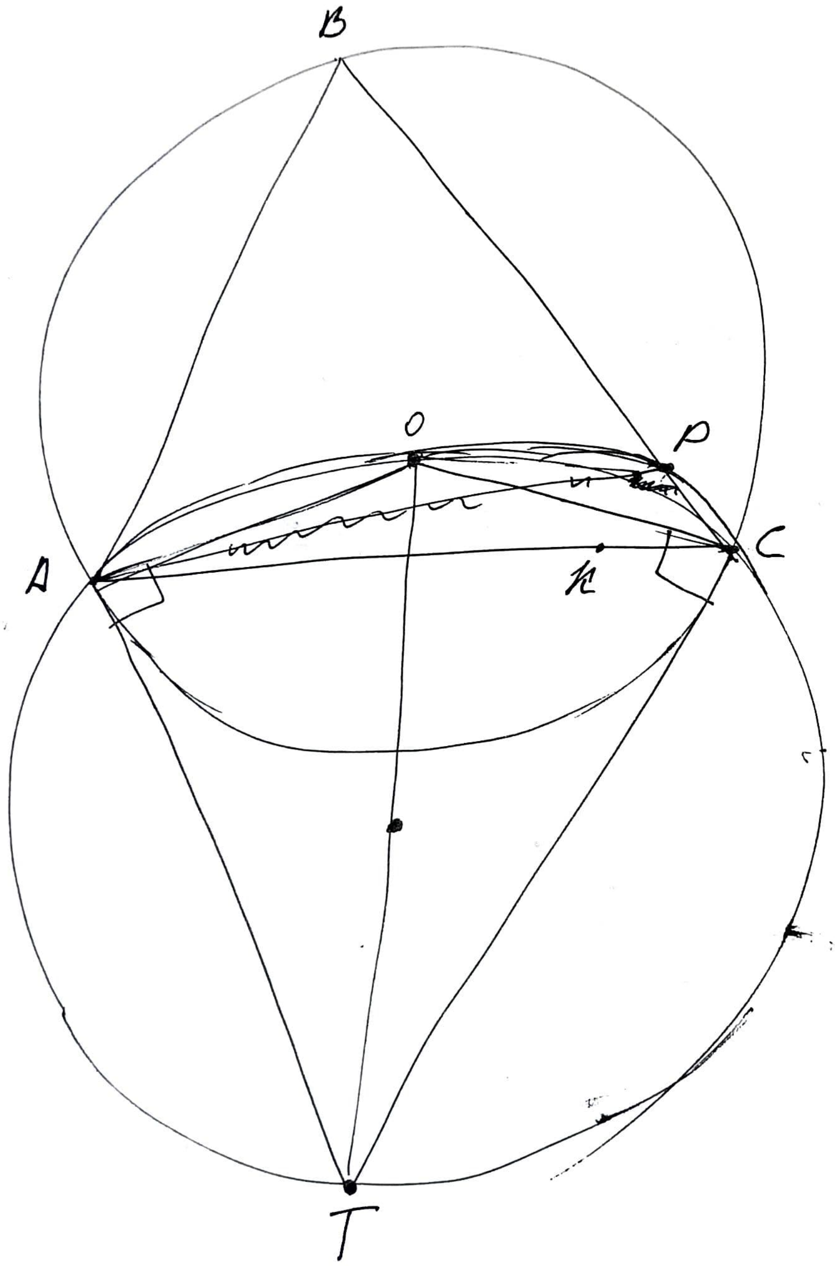
$16x^2 + 3x + 2 = 0$

$D = 9 - 8 \cdot 16 < 0 \Rightarrow$ решений нет.

4

Ответ: $x = 2$.

~~Черновик~~ Чистовик. №6



5

$OA \perp AT$; $OC \perp TC$ (радиус $\perp$ касательной)
Тогда $\angle TAO = \angle TCO = 90° \Rightarrow AOCT$ - вписанный четырехуг.
(с диаметром OT (на него опирается угол в 90°)
$\angle AOC = \angle APC$ (опир. на дугу AC)
$\triangle ABP$ - равнобед. ($\angle ABP = \angle BAP = \frac{180 - \frac{1}{2}\angle AOC}{2}$)
$AB^2 = BP \cdot PC$ (по т. о кас. и сек.
$AB^2 = AB \cdot PC$
$AB = PC = BP$; AP - медиана $\triangle BAC$

Чистовик.

~~∠APT = 90° (опирается на диаметр) => AP - высота △ABC => △AKC - равнобедренный~~

$\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$ (△APK и △PKC имеют общую высоту)

OT ⊥ AC (OACT - дельтоид, т.к. TA = TC по касат. кас.)

6

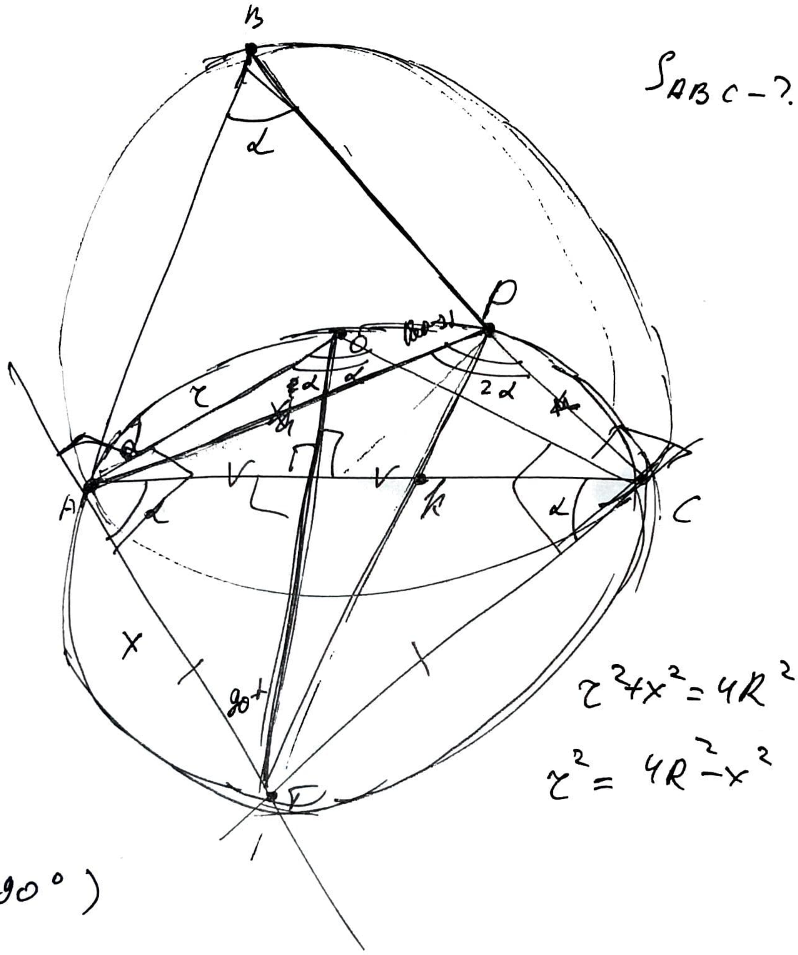
Черновик,

№6.

$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$S_{ABC} - ?$



$S_{APC} = 10$

$r^2 + x^2 = 4R^2$

$r^2 = 4R^2 - x^2$

$T \in$ окр

$(\angle OAT = \angle OCT = 90°)$

OT - диаметр.

$\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

$2 \cdot \frac{rx}{2R} = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos(180 - \alpha)$

$\frac{rx}{R} = 2x^2 + 2x^2 \cos\alpha$; $\frac{r}{R} = 2x + 2x\cos\alpha$

$\sin(90 - \alpha) = \frac{r}{2R}$

$\cos\alpha = \frac{r}{2R}$

$\frac{r}{R} = 2x + x \cdot \frac{r}{R}$ | $\frac{r}{R} - x \cdot \frac{r}{R} = 2x$

$\frac{r}{R}(1 - x) = 2x$

4

Черновик.

$$\begin{array}{l} a^3-a^2-4 \;\big|\; a-2 \\ -\; a^3-2a^2 \quad\; a^2+a+2 \\ \quad a^2-4 \\ -\; a^2-2a \\ \quad\quad 2a-4 \\ -\; 2a-4 \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$(a-2)(a^2+a+2)=a^3+a^2+2-2a^2-2a-4=$

$=a^3-a^2$

$(a-2)(a^2+a+2)=a^3+a^2-4+2a-$

$2a^2-2a=a^3-\cancel{4}a^2-4$

$$\begin{array}{l} a^3-a^2-0\cdot a-4 \;\big|\; a-2 \\ -\; a^3-2a^2 \quad\; a^2+a+2 \\ \quad a^2-a\cdot 0 \\ -\; a^2-2a \\ \quad\quad 2a-4 \\ -\; 2a-4 \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$a^2+a+2=0$

$D=1$

---

1). $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \Leftrightarrow \log_{(5x-1)}(4x+1)=1 \Leftrightarrow 4x+1=5x-1 \Leftrightarrow x=2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \Leftrightarrow 4x+1=\frac{x}{2}+2 \Leftrightarrow 8x+2=x+4 \Leftrightarrow \cancel{x=\frac{7}{6}}\; x=\frac{2}{7}$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+2=5x-1 \Leftrightarrow x+4=10x-2$

$9x=6 \;;\; x=\frac{2}{3}$ ✗

2). $x=2$

$4x+1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ ✓ Не забыть про ОДЗ

$5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

3). $x=\frac{2}{7}$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+2x+4=5x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-3x+5=0 \;|\cdot 4$

$x^2-12x+20=0$

$\sqrt{5x-1}=4x-1$

$\frac{4}{49}-\frac{24}{7}+\frac{140}{7}=\frac{4-24\cdot 7+140}{7}$

$24\cdot 7=140+28=168$

✗ $\sqrt{3}$

Черновик. №5.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c$

$a \cdot b = \log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot \log_{\sqrt{5x-1}}(5x-1) = 4$

$c = \frac{4}{ab}$

1. Пусть $a = b$

$a = b$

$c = a-1$

$\Rightarrow \frac{4}{ab} = a-1$; $\frac{4}{a^2} = a-1$

$4 = a^3 - a^2$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$a = 2$

$b = 2$

$c = 1$

ОДЗ:

$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1 \neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x > \frac{1}{5}$, $x \neq \frac{2}{5}$, $\frac{x}{2} \neq -1$

$\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{2}{5} \end{cases}$

---

1). $a = b$, $c = a-1$; 2) $a = c$, $b = a-1$; 3) $b = c$, $a = b-1$

1). $\begin{cases} a = b \\ c = a-1 \\ c = \frac{4}{ab} \end{cases}$

$\frac{4}{a^2} = a-1$

$4 = a^3 - a^2$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$(a-2)(a^2+a+2) = 0$

$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

2). $\begin{cases} a = c \\ b = \frac{4}{ac} \\ b = a-1 \end{cases}$

$\frac{4}{a^2} = a-1$

$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$

3). $\begin{cases} b = c \\ a = b-1 \\ a = \frac{4}{b^2} \end{cases}$

$\frac{4}{b^2} = b-1$

$\begin{cases} b=2 \\ a=1 \\ c=2 \end{cases}$

22

Чистовик. №5

$$НОД(a;b;c)=6=2\cdot 3$$
$$НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$$

$$\begin{cases} a=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}, & \alpha,\beta \geq 1 \\ b=2^{m}\cdot 3^{n}, & m,n \geq 1 \\ c=2^{k}\cdot 3^{l}, & k,l \geq 1 \end{cases}$$

$$\alpha+m+k \leq 45 \qquad 45=15\cdot 3$$
$$\beta+n+l \leq 48 \qquad 48=16\cdot 3$$

$НОД(a;b;c)=2\cdot 3 \Rightarrow$ ~~одно из чисел в множители $2\cdot 3$~~ хотя бы в одно из чисел двойка входит один раз; хотя бы в одно из чисел тройка вх. 1 раз.

$$\left.\begin{matrix} \alpha=1 & \beta=1 \\ \alpha=1 & n=1 \\ \alpha=1 & l=1 \\ m=1 & \ldots \end{matrix}\right\} 9 \text{ сл.}$$

Посчитаем для одного случая и умножим на 9:

Пусть $\alpha=1$, $\beta=1$

$m+k \leq 30$; $m\in[1;15]$, $k\in[1;15]$

$n+l \leq 32$; $l;n\in[1;16]$

~~$30\cdot 30\cdot 32\cdot 32\cdot 9$~~

~~Ответ~~

$15\cdot 15\cdot 16\cdot 16\cdot 9$

Ответ

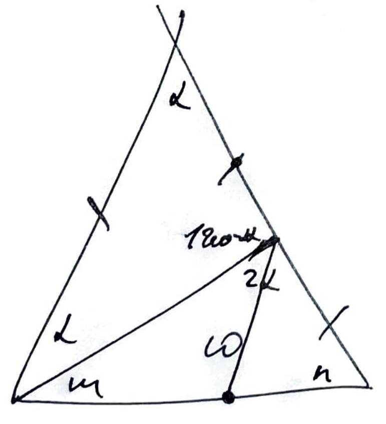
Черновик.

$$\begin{cases} r^2 = 4R^2 - x^2 \\ \frac{r}{R}(1-x) = 2x \end{cases}$$

$$r^2 = 4R^2 - x^2$$

$$\frac{r^2}{R^2}(1-x)^2 = 4x^2$$

$$\frac{4R^2 - x^2}{R^2}(1-x)^2 = 4x^2$$



$$m + n + 2\alpha = 180$$

$$\cancel{180 - 2\alpha \leq 1}$$