Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104837**

ID профиля: **847944**

Вариант 17

№1. Чистовик.

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d.$$

И $\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 & (I) \\ S + 17 > a_7 \cdot a_{11} & (II) \end{cases}$ +

$a_6 \cdot a_{12} + 16 > a_7 \cdot a_{11}$

Так как $a_n = a_1 + (n-1)d$ получим.

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) + 16 > (a_1 + 6d)(a_1 + 10d)$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + 55d^2 + 16 > \cancel{a_1^2} + 60d^2 + \cancel{16a_1d}$

$16 > 5d^2 \to 0 < d < 2.$

Так $a_i \in Z$ получим $d = 1$.

То, так как:

I) $\Rightarrow (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1$

$(a_1 + 5)(a_1 + 11) > 10a_1 + 46.$

$a_1^2 + 16a_1 - 10a_1 + 9 > 0.$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0.$

$(a_1 + 3)^2 > 0 \to a_1 \neq -3.$

II) $S + 17 > a_7 \cdot a_{11}$

$10a_1 + 45d + 17 > (a_1 + 6d)(a_1 + 10d)$

$10a_1 + 62 > a_1^2 + 16a_1 + 60.$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0.$

Нули: $D = 36 + 8 = 44.$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z} \to$

$\to a_1 \in [-6; 0]$

Значит $a_1 = -6, -5, -4, -2, -1, 0$

Ответ: $-6, -5, -4, -2, -1, 0.$

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$.

$\boxed{y=1}$

$(x+5)(x+11) > 10x+45+1$

$(x+6)(x+10) < 10x+45+17$.

$x^2+16x+55 > 10x+46$.

$\begin{cases} x^2+4x+9>0. \\ x^2+6x-2<0 \end{cases}$

$D = 16-36 = 0$.

$36+8=44$

$\frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2}$

$\left(\frac{-6-\sqrt{44}}{2}, \frac{-6+\sqrt{44}}{2}\right)$

$\frac{-6-\sqrt{44}}{2} = -3-\sqrt{11}$

$\boxed{x=-6}$

$(x+5y)(x+11y) > S+1$ $10a_1$ $10x+45y$

$S+17 > (x+6y)(x+10y)$

$x^2+16yx+55y^2+16 > x^2+16xy+60y^2$

$16 > 5y^2$

$y=1$

$-y>-4$

$5>$

$x^2+16x+60-10x-62<0$.

$x^2+6x-2<0$

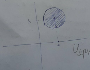
$(-3-\sqrt{11}, -3+\sqrt{11})$

$(-6, 0)$

~~$-5 > -6 \ldots$~~

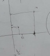
$(x-2)^2+(y-2)^2 \le 1$

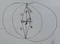
$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$



Черновик

$\pi R^2 - 360$
$x - \alpha$ | $x = \frac{\alpha \pi R^2}{360}$ Черновик



$S_1 = \frac{\pi R^2 \cdot (360-\alpha)}{360}$

$S_2 = \frac{\pi R^2 \cdot (360-\alpha)}{360}$

$\frac{\pi R^2 \cdot (360-\alpha)}{180} +$

$+ \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 4 =$

$=$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$. $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{4}$

$\frac{36-1}{32}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$= \frac{1}{16}$ $T = \boxed{\frac{7}{8}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{8}$


180° 45

$d = \sqrt{2}$

$R = 2\sqrt{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60^\circ$

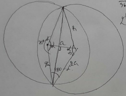
$\alpha = 120^\circ$

$\frac{\pi R^2 (240)}{180}$

$= \frac{4\pi \cdot 4 \cdot 2}{3} + 2\sqrt{3}$



Черновик



$$\frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360} - \frac{R^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$2\left(\pi R^2 - \frac{\pi R^2 \alpha}{360} + \frac{R^2 \sin\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\pi R^2 \cdot \left(\frac{360-\alpha}{360}\right) + R^2 \cdot \sin\alpha\right.$$

$$\cancel{a^2} = (4\cancel{a^2}) \cdot 2 - 2(4\cancel{a^2}) \cdot \cos(180-\alpha)$$

$$1 = 8 + 8\cos\alpha$$

$$-\frac{7}{8} = \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$$

№3 Чистовик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,\ 2)\end{cases}$$

Разделим задачу на два части.

I. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 & (2)\end{cases}$

Оба эти неравенство являются уравнениями кругов с радиусами $\sqrt{2}$ и центрами (a,b) и $(1,1)$ соответственно.

рис. 1

И каждая точка на (рис 1) круг удовлетворяет неравенство (2) и так как (1) это уравнение круга с центром в (a,b) и $R=\sqrt{2}$, что если построить на каждой точке круга (2) ~~...~~ круг радиуса $\sqrt{2}$ то все точки ~~...~~ этих кругов удовлетворяют (1), то есть:

То получим круг с центром $(1,1)$ и $R=2\sqrt{2}$ для которого для каждой точки ~~...~~ (x,y) ~~...~~ круга найдутся (a,b) удовлетворяющие неравенства.

II) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (3)\\ a^2+b^2\le 2 & (4)\end{cases}$

Построим сначала круг $a^2+b^2=2$.

и каждая точка этого круга удовлетворяет неравенство (4).

и каждую её точку можно принимать как центр для другого круга с радиусом $\sqrt{2}$ и последствии всех построений мы получим круг с центром в $(0,0)$ и $R=2\sqrt{2}$ в котором для любой её точки (x,y) будут существовать a и b удовлетворяющие неравенства (3), (4).

И так мы получим две круга с центрами $(1,1)$ и $(0,0)$, и $R_1=R_2=2\sqrt{2}$ соответственно. И если А это множество всех точек первого круга и В множество всех точек второго

то мы должны найти площадь $A \cup B$.

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot (360-\alpha)}{360} \cdot 2 + \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot R}{2}\right) \cdot 4$$

$d = \sqrt{2}$ $\quad R = 2\sqrt{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{8-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\cos\alpha = -\frac{7}{8}$.

~~$S = \pi R$~~

$$S = \frac{\pi \cdot 8(360-\alpha)}{360} \cdot 2 + \frac{\frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} \cdot 4 =$$

$$= \frac{2\pi \cdot (360-\alpha)}{45} + \sqrt{15}$$

А $\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

То $S = \frac{2\pi\left(360 - \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\right)}{45} + \sqrt{15}$

Черновик 4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104837**

ID профиля: **847944**

Вариант 17

№4 Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=6 \\ НОК(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \longrightarrow \text{То} \begin{cases} a=2^{\alpha}\cdot 3^{x} \\ b=2^{\beta}\cdot 3^{y} \\ c=2^{\gamma}\cdot 3^{z} \end{cases}$$

и $\min(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)=1$ и $\max(\alpha,\beta,\gamma)=15$ и $\max(x,y,z)=16$.

и $\begin{cases} \min(\alpha,\beta,\gamma)=1 \\ \max(\alpha,\beta,\gamma)=15 \end{cases}$ и $\begin{cases} \min(x,y,z)=1 \\ \max(x,y,z)=16 \end{cases}$

Эти две системы выводились из того факта что:

$НОД(a,b,c)=2^{\min(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot 3^{\min(x,y,z)}$ и $НОК(a,b,c)=2^{\max(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot 3^{\max(x,y,z)}$

и первое из них означает, что две из чисел α,β,γ равны 1 и 15 и третий из них может принимать значения от 1 до 15 включительно. То общее количество таких троек (α,β,γ) равна $\binom{3}{2}\cdot 15=45$.

А для второй системы получим что две из x,y,z равны 1 и 16, а третий может принимать значения от 1 до 16 включительно, то общее количество троек (x,y,z) равна $\binom{3}{2}\cdot 16=48$.

Значит общее количество троек (a,b,c) равна

$45\cdot 48=2160$.

Ответ: 2160.

№5. Чистовик.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Пусть $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = a \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = b \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c \end{cases}$ Тно $abc = 4$.

Так как $\log_e f \cdot \log_f k \cdot \log_k e = 1$.

Тно $abc = 4$. 1) Пусть $a = b \to c = a - 1$ то получим.

$a^2 \cdot c = 4 \to a^2(a-1) = 4 \to a^3 - a^2 - 4 = 0 \to (a-2)(a^2+a+2) = 0$

$\to a = 2 \to \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \to x = 2$, но $a \neq b$.

2) пусть $b = c \to a = b - 1 \to b = 2 \to \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 \to$

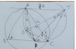
$\to 4x+1 = \frac{x}{2} + 2 \to 8x + 2 = x + 4 \to 7x = 2 \to x = \frac{2}{7}$.

Но в этом случае $b \neq c$

3) пусть $a = c \to b = a - 1$. $\to a = 2 \to x = 2 \to a = c$, и $b = a - 1$.

Ответ: $x = 2$.

№6. Чистовик.



$S(\Delta APK) = 6.$

$S(\Delta LPK) = 4.$

Так как $\frac{S(\Delta APK)}{S(\Delta CPK)} = \frac{AK}{CK} = \frac{6}{4}$

То $\frac{AK}{CK} = \frac{3}{2} \to \begin{matrix} AK = 3x \\ CK = 2x \end{matrix}$

И пусть $\angle ABC = \alpha \to \angle CAT = \alpha = \angle TCA$. И так как $OA \perp AT$ и $OC \perp TC$, то четырёхугольник $(AOCT)$ вписанный, то $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ и $\angle TPC = \angle TAC = \alpha \to$
$\to TP \parallel AB \to \Delta KPC \sim \Delta ABC \to \frac{S(PKC)}{S(ABC)} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2 =$
$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \to S(ABC) = \frac{25 \cdot 4}{4} = 25.$

(a) $S(ABC) = 25.$

(b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5} \to \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{7}{5} \to \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{49}{25} \to 25\sin^2\alpha = 49 - 49\sin^2\alpha$
$\to \sin^2\alpha = \frac{49}{74} \to \boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{74}} = \frac{7}{\sqrt{74}}}$

По теореме синусов
$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \to AC = 2R \cdot \frac{7}{\sqrt{74}} = \frac{14R}{\sqrt{74}}$ (R радиус ω)

Так как $\frac{AT}{AO} = \cancel{\operatorname{tg}\alpha} \to \frac{AT}{R} = \frac{7}{5} \to \boxed{AT = \frac{7}{5}R}$

И в $\Delta TPC \to \frac{PC}{\sin\angle PTC} = OT = R\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{74}R}{5}$, и если $\angle BAC = \beta$, то
$\angle PKC = \beta \to \angle PTC = \beta - \alpha$.

По теор. синусов $\Delta KPC \to \frac{KC}{\sin\alpha} = \frac{PC}{\sin\beta}$, так как $AC = \frac{14R}{\sqrt{74}}$

и $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2} \to KC = \frac{28R}{5\sqrt{74}} \to PC = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot KC = \frac{\sin\beta}{\frac{7}{\sqrt{74}}} \cdot \frac{28R}{5\sqrt{74}} = \frac{4R}{5}\sin\beta$

и $\frac{PC}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{R\sqrt{74}}{5} \to \frac{\cancel{R}\sqrt{74}}{\cancel{5}} \cdot \sin(\beta-\alpha) = \frac{4\cancel{R}}{\cancel{5}} \cdot \sin\beta \to \sin\beta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

По теор. синусов ΔABC $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{7}{\sqrt{74}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{7} = \frac{5}{\sqrt{37}}$

$BC = \frac{\sqrt{37}}{5} \cdot \frac{14R}{\sqrt{74}} = \frac{14R}{5\sqrt{2}}$

и $\angle ACB = 180 - \alpha - \beta$.

и $S = \frac{AC \cdot BC}{2} \cdot \sin(180 - \alpha - \beta) = \frac{4R}{2\sqrt{74}} \cdot \frac{14R}{5\sqrt{2}} \cdot (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta)$

$= 25 \to R =$

Шетовик

$AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$

$\frac{49}{74} = \frac{74-49}{74} = \frac{25}{74} = \frac{5}{\sqrt{74}}$

$\frac{PC}{\sin(\beta-\alpha)} = OT = R\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+1} = \frac{R\sqrt{74}}{5}$

$5x = \frac{14R}{\sqrt{74}}$

$x = \frac{14R}{5\sqrt{74}}$

$\frac{4\cancel{2}8R}{5\cancel{\sqrt{74}}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{\sqrt{74}}} = \frac{4R}{5} = \frac{PC}{\sin\beta}$

$PC = \frac{4R}{5}\sin\beta = \frac{R\sqrt{74}}{5} \cdot \sin(\beta-\alpha)$

$4\sin\beta = \sqrt{74}\sin(\beta-\alpha) = \sqrt{74}\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sqrt{74}\cos\beta\cdot\sin\alpha =$

$= 5\sin\beta - 7\cos\beta = 4\sin\beta$

$\sin\beta = 7\cos\beta$

$\sin\beta = 49 - 49\sin^2\beta$

$\sin^2\beta = \frac{49}{50}$

$\sin\beta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

Значит $a_i = -6, -5, -4, -2, -1, 0$

Ответ: $-6, -5, -4, -2, -1, 0$

$-3-\sqrt{11} \quad -3+\sqrt{11}$

$a_i \in (-3-\sqrt{11}; 3+\sqrt{11})$

Так как $a_i \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$\rightarrow a_i \in [-6; 0]$

$\underline{AC \cdot BC}$

Черновик