Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104794**

ID профиля: **292801**

Вариант 17

Чистовик (1)

№1

Решение:

Пусть d - ~~...~~ разность этой прогрессии,
тогда $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_{10}) =$
$= 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$

$a_6 a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2$
$a_7 a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 16da_1 + 60d^2$

По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 & (1) \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 & (2) \end{cases}$$

Т.к. все члены прогрессии целые числа, то d - тоже целое (т.к. любой член имеет вид $a_n = a_1 + (n-1)d$)
Т.к. прогрессия возрастающая, то $d \in \mathbb{N}$

$a_6 a_{12} > S + 1$
$a_6 a_{12} - 1 > S$
$a_7 a_{11} < S + 17$
$a_7 a_{11} - 17 < S$

~~Т.к.~~ ~~S~~ ~~...~~

т.е. $a_7 a_{11} - 17 < S < a_6 a_{12} - 1$

$\Rightarrow a_7 a_{11} - 17 < a_6 a_{12} - 1$

$-17 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 60d^2 < \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 55d^2 - 1$

$5d^2 < 16$

Чистовик ②

$$d^2 < \frac{4^2}{5}$$

Т.к $d>0$, то $d < \frac{4}{\sqrt{5}}$

Т.к. $d \in \mathbb{N}$ найдем всевозможные варианты d.

Заметим, что $\frac{4}{\sqrt{5}} < 2$.

Проверим: $\frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$4 < 2\sqrt{5}$

$16 < 20$

Так же $\frac{4}{\sqrt{5}} > 1$

Проверим: $4 > \sqrt{5}$

$16 > 5$

$\Rightarrow$ $d < 2$. Значит d может быть только единицей, т.е. $d=1$.

Подставим это в нер-во (1)

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0$

Значит $a_1 \neq -3$, при всех остальных $a_1 \in \mathbb{Z}$ такое выполняется.

Теперь подставим $d=1$ в нер-во (2)

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17$

$a_1^2 + 6a_1 + 60 < 62$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

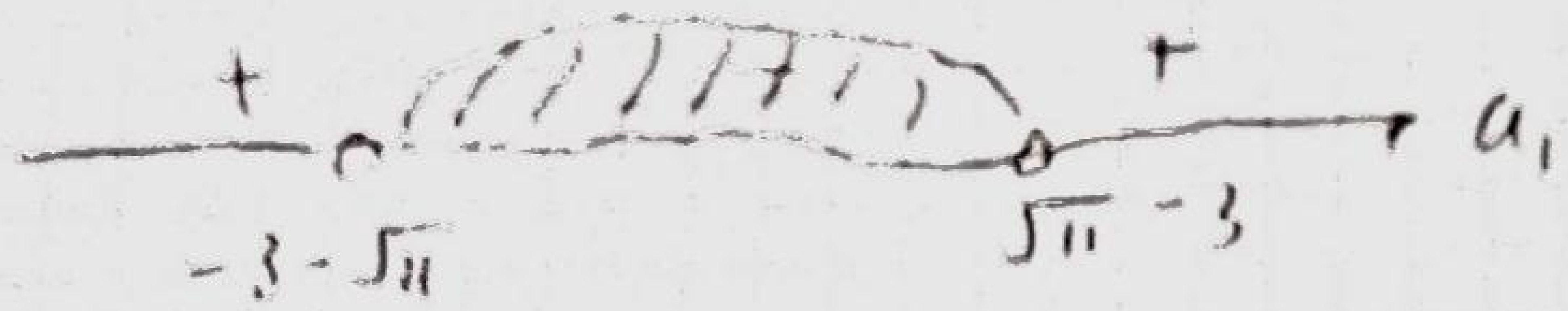
$D = 36 + 8 = 44$

$a_1 = \frac{-6+2\sqrt{11}}{2} = -3+\sqrt{11}$

$a_2 = \frac{-6-2\sqrt{11}}{2} = -3-\sqrt{11}$

Чистовик (3)

$$(a_1+3-\sqrt{11})(a_1+3+\sqrt{11})<0$$



$$-3-\sqrt{11}<a_1<\sqrt{11}-3$$

$$1=4-3>\sqrt{11}-3>3-3=0$$

$$-6=-3-3>-3-\sqrt{11}>-3-4=-7$$

т.е. $0<\sqrt{11}-3<1$

$$-7<-\sqrt{11}-3<-6$$

Т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$, то этому интервалу подойдут: $a_1\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Ранее мы выяснили, что $a_1=-3$ — не подходит.

Ответ: $a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$.

№3.

Решение:

1) Условие $a^2+b^2\le\min(2a+2b,2)$ равносильно такому: $\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}$$

Т.е. наша система примет вид:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 & (1)\\ a^2+b^2\le 2 & (2)\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 & (3)\end{cases}$$

Чистовик (4)

Изобразим нер-ва (2) и (3) в плоскости aOb.

(2) $a^2+b^2 \le 2$ — нер-во круга с центром $O(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

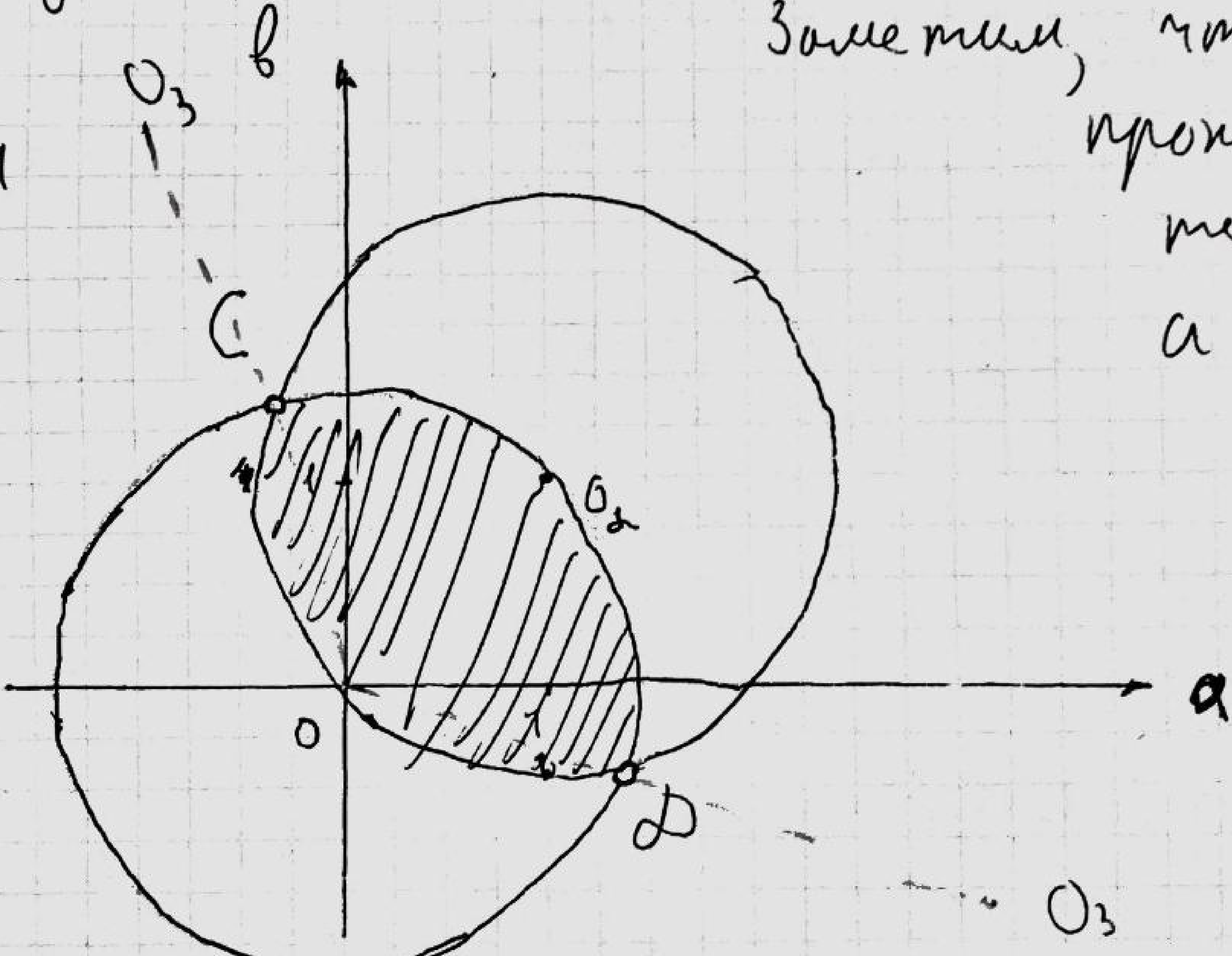
Т.е. нер-ву (2) удовлетворяют все точки лежащие внутри окружности ω_1: $a^2+b^2=2$.

(3) $(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$ — область внутри окружности ω_2: $(a-1)^2+(b-1)^2=2$ с центром $O_2(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

~~Круг радиуса $\sqrt{2}$~~

Изобразим ω_1 и ω_2 на плоскости aOb. Заметим, что ω_1 проходит через точку $(1;1)$, а ω_2 через точку $(0;0)$.

рисунок 1



Пусть C и D — общие точки ω_1 и ω_2, тогда заштрихованная (рисунок 1) область Ω — общие точки кругов ограниченных ω_1 и ω_2. т.е. решение системы

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2. \end{cases}$$

в этой плоскости.

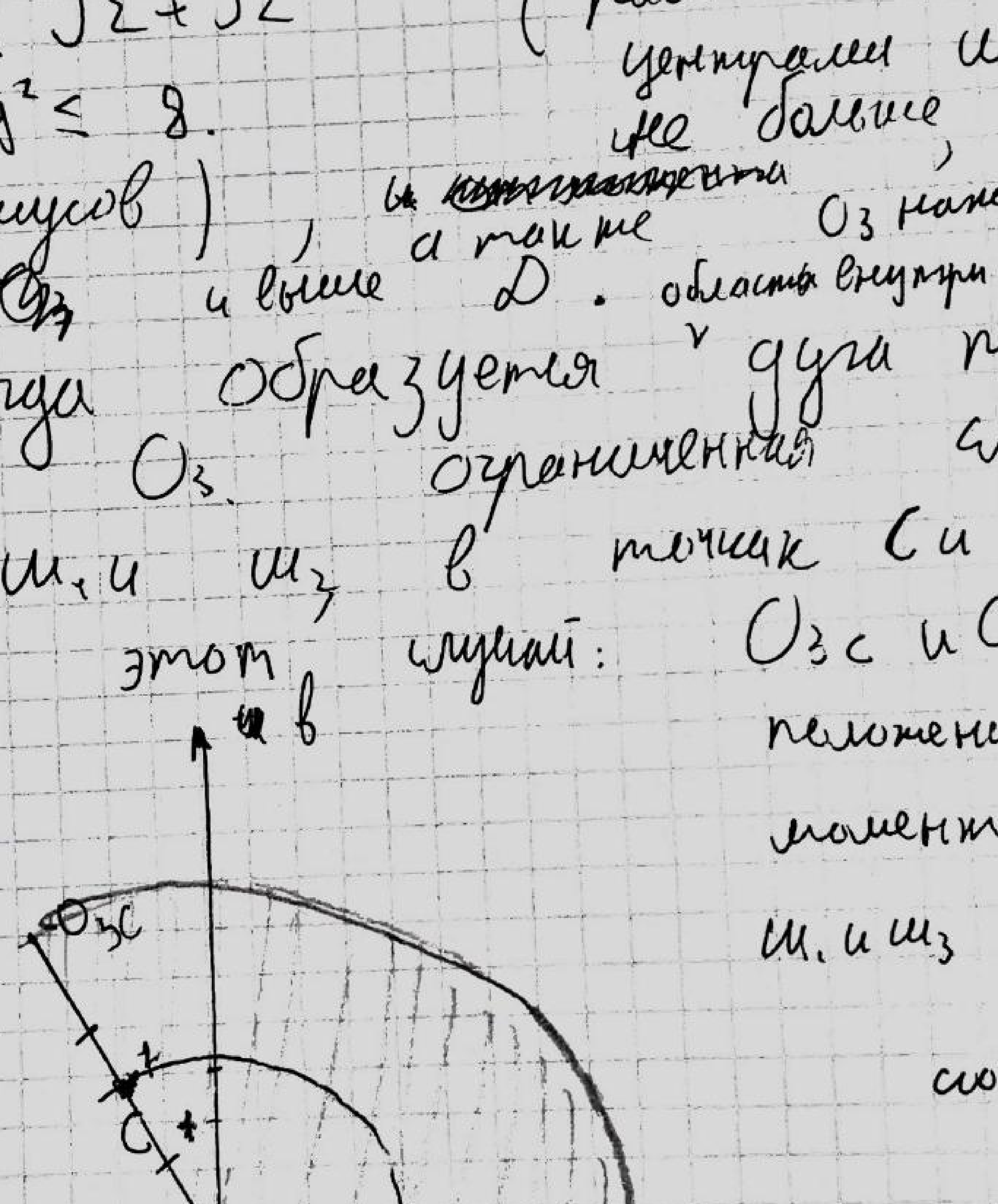
Нер-во (1) задает круг, ограниченный

Чистовик (5)

окружностью ω_3: ~~градиус~~ $(a-x)^2+(b-y)^2=2$.
с радиусом $\sqrt{2}$ и центром ~~...~~ $O_3(x;y)$

Чтобы исходная система из условия задачи имела решения ω_3 должна пересекать (или касаться) Ω (заштрихованную область). Это будет происходить когда ~~...~~
I $OO_3 \le \sqrt{2}+\sqrt{2}$ (расстояние между центрами ω_1 и ω_3 не больше, чем сумма их радиусов), а также O_3 находится правее C ~~O_3~~ и выше D. области внутри
т.е., когда образуется дуга по которой скользит O_3, ограниченная случаями касания ω_1 и ω_3 в точках C и D.
Изобразим этот случай: O_{3C} и O_{3D} – положение O_3 в моменты касания ω_1 и ω_3 в точках ~~...~~ D и C. соответственно

рисунок 2.



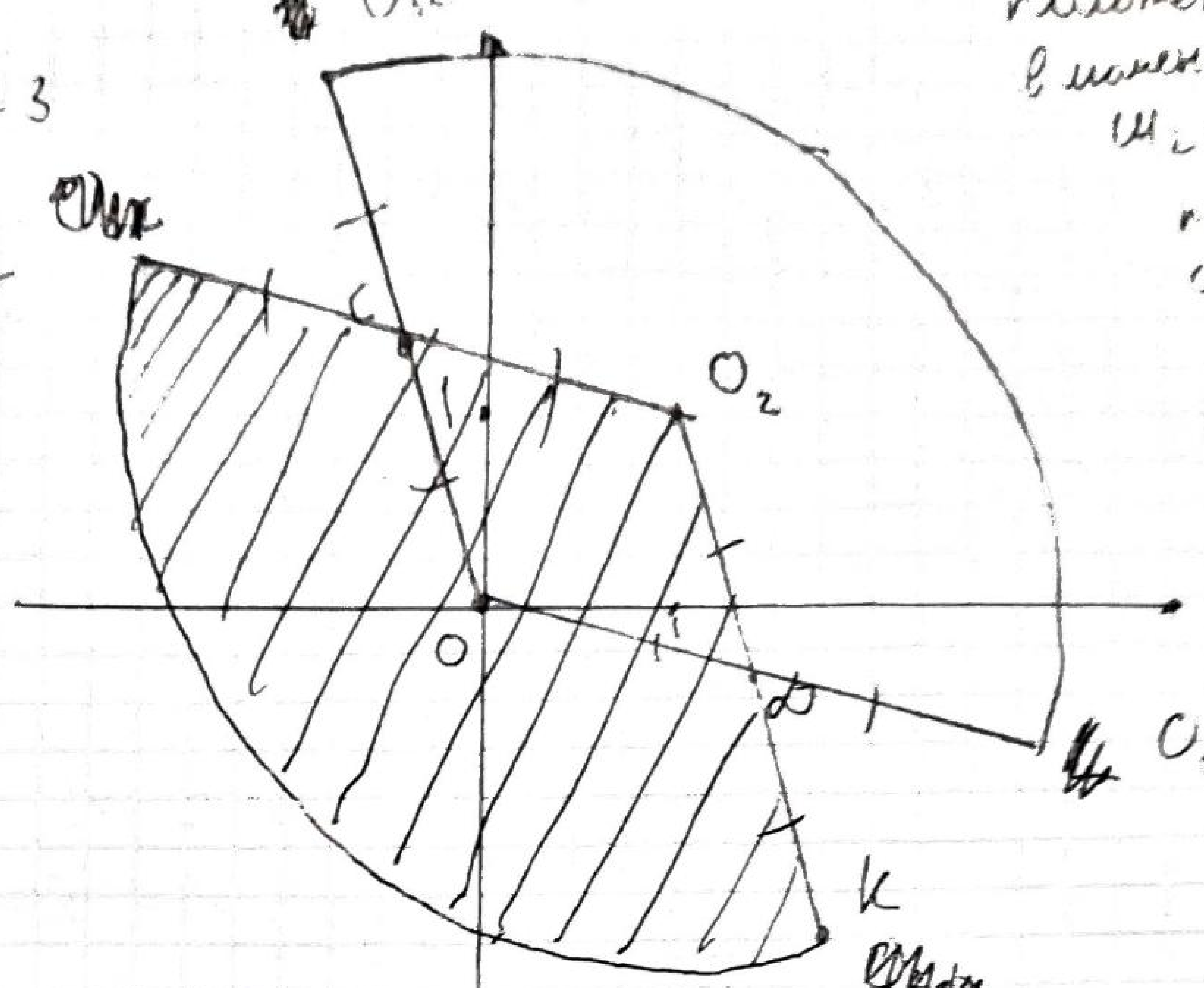
II Аналогичный случай со случаем I, только уже $O_2O_3 \le \sqrt{2}+\sqrt{3}$, ~~...~~ O_3 левее C и выше D, т.е. дуга области внутри по которой скользит O_3 ограниченная случаями касания ω_2 и ω_3 в точках C и D.
Изобразим случаи I и II с найден

черновик ⑤

(1) площадь полученной фигуры

K и L - положения O_3 в момент касания ω_2 и ω_3 в точках A и C соотв.

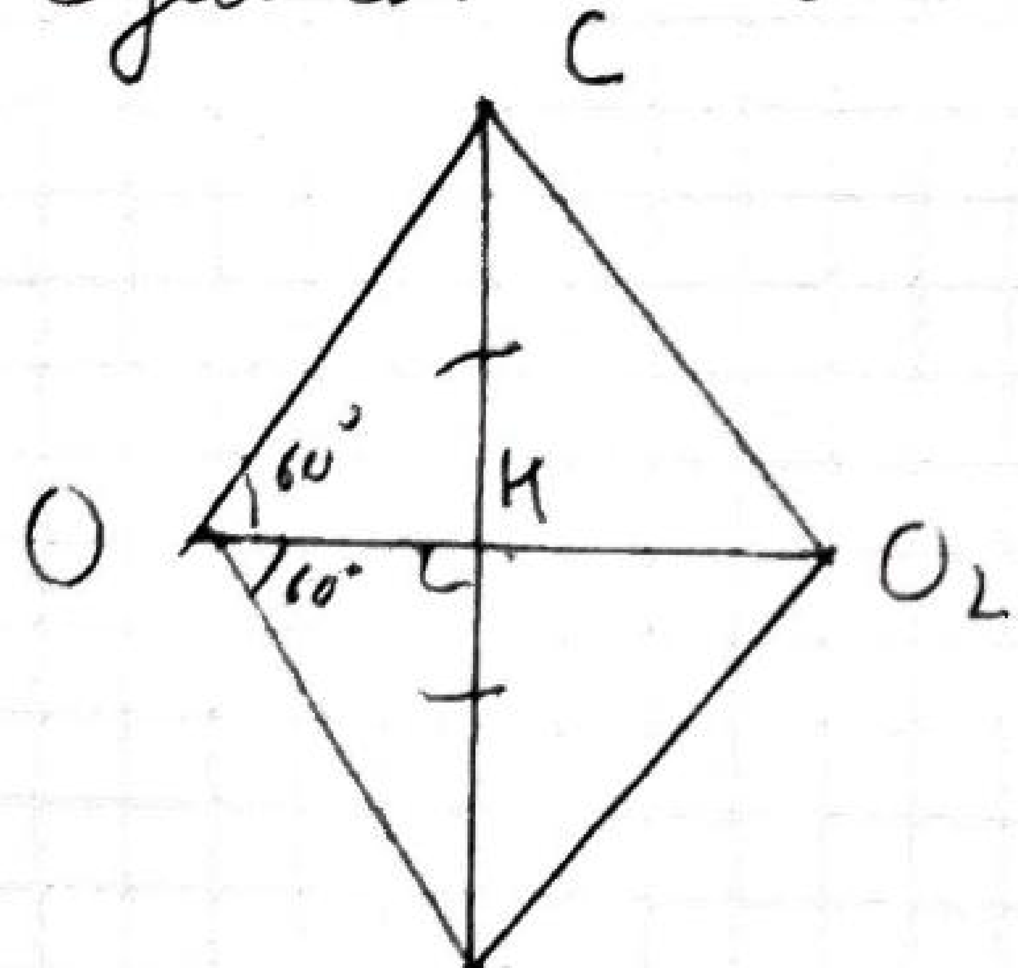
рисунок 3



В силу симметрии картинки относ. прямой CD достаточно посчитать ~~S сектора~~ площадь сектора LO_2K (обозначим его за $S_{сек.}$)

Т.е. ~~сектора~~ (на рисунке 3 этот сектор заштрихован.) Площадь фигуры M будет равна $S_{сек} \cdot 2 - S_{CODO_2}$.
наиб.

Сделаем выносной рисунок CO_2DC.



$OO_2 \cap CD = H$.

$OO_2 = \sqrt{2}$ (т.к. ω_1 проходит через O_2, а ω_2 через O_1)

$CO = CO_2 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \triangle OCO_2$ - равносторонний

$\angle OCO_2 = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = 120^\circ$

$CH = OC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CD = \sqrt{6}$

$S_{CODO_2} = \frac{1}{2} \cdot OO_2 \cdot CD \cdot \sin 90^\circ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

Чистовик. 7

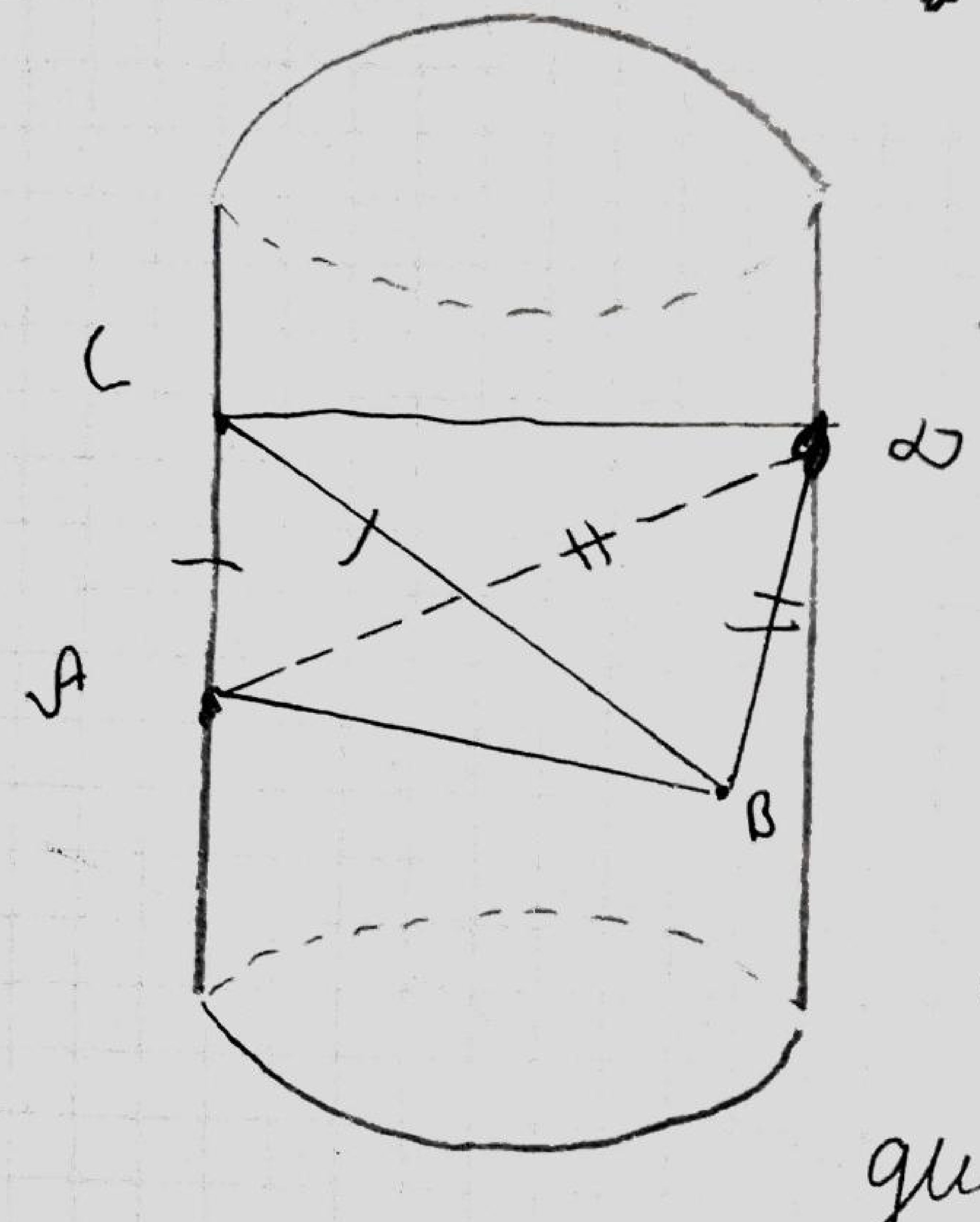
$$S_{сек} = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Площадь ~~в~~ фигуры м обозначим за $S_м$

$$S_м = 2 \cdot S_{сек} - S_{осн.} = 2 \cdot \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{16\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{16\pi}{3} - \sqrt{3}$.

№ 2.



$AB = 2$

$AC = BC = 4$

$AD = BD = 6$

~~Найдем длину~~ Наименьшим и цилиндр будет тот, у которого ~~дли~~ диаметр основания равен CD.

Найдем

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104794**

ID профиля: **292801**

Вариант 17

Вариант 17

Часть 2. Чистовик (1)

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 & (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} & (2) \end{cases}$$

Из условия (1) имеем: $a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6$

А из условия (2): сделает

$(2^{15}\cdot 3^{16}) \vdots a$

$(2^{15}\cdot 3^{16}) \vdots b$

$(2^{15}\cdot 3^{16}) \vdots c$

Из этого можно сделать вывод, что

$a = 2^{\alpha_1+1}\cdot 3^{\beta_1+1}$

$b = 2^{\alpha_2+1}\cdot 3^{\beta_2+1}$

$c = 2^{\alpha_3+1}\cdot 3^{\beta_3+1}$

Т.к. если a, b или c имеют в разложении на простые множители множитель не равный 2^x или 3^y, $x,y \geq 0$, то НОК $(a;b;c)$ не делится на него т.е. такое невозможно.

Т.к. $a \vdots 6$; $b \vdots 6$; $c \vdots 6$, то $\alpha_i + 1 \geq 1$

$\alpha_i \geq 0$

$\beta_i + 1 \geq 1$

$\beta_i \geq 0$, где $1 \leq i \leq 3$

Тогда для выполнения системы (2)
из условия задачи необходимо:

$$\begin{cases} \alpha_i+1 \le 15 \\ \beta_i+1 \le 16 \end{cases} \quad 1 \le i \le 3$$

$$\begin{cases} \alpha_i \le 14 \\ \beta_i \le 15. \end{cases}$$

Т.е. $0 \le \alpha_i \le 14$, $0 \le \beta_i \le 15$

Числа a, b, c однозначно задаются парами ~~кратность~~ $(\alpha_1; \beta_1)$; $(\alpha_2; \beta_2)$; $(\alpha_3; \beta_3)$, соответственно

II Заметим, что для выполнения системы хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ должно быть равно 0 а одно из них должно быть равно 14. Выбрать 2 числа из этой тройки можно $3 \cdot 2 = 6$ способами (т.к. a, b, c – упорядоченные тройки)

Оставшееся число лежит в промежутке от 0 до 14 т.е. его можно выбрать 15 способами.

Т.е. всего вариантов: ~~упорядоч~~ $6 \cdot 15$

III Аналогично рассуждая для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ получаем, что хотя бы 1 из этой тройки это 0, а одно из них это 15. Т.е. всего вариантов: $6 \cdot 16$

Чистовик (5)

~~Искомы~~ Итого, учитывая получившееся кол-во способов в ~~случаях~~ пунктах Ч и III

получаем, что таких троек (a;b;c) будет: $6 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 15 = 36 \cdot 16 \cdot 15$

Ответ: $36 \cdot 16 \cdot 15$

№5

Решение: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

I. Ограничения: (*)

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$$

II Заметим, что

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}5x-1 = 4$$

$$= 4\cdot\log_{5x-1}4x+1\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}5x-1 =$$

$$= 4\cdot\log_{5x-1}\frac{x}{2}+2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}5x-1 = 4$$

т.к. по условию два из них 4 б)
равны, а третье меньше на 1, то
обозначим равные за a и
получим уравнение: $a \cdot a \cdot (a-1) = 4$

$$a^2(a-1)=4$$
$$a^3-a^2=4$$

Угадываем корень $a=2$ и
разложим многочлен a^3-a^2-4 по
схеме Горнера:

	1	−1	0	−4
2	1	1	2	0
	2	2	4	

Получаем $a^2+a+2=0$
$$D=1-8=-7<0$$
$\Rightarrow$ уравнение $a^3-a^2=4$ имеет
1 решение $\boxed{a=2}$

т.е. возможны случаи:

а) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 1 & (1) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 & (2) \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2 & (3) \end{cases}$

(1) $\sqrt{5x-1} = 4x+1$
$$5x-1 = 16x^2+8x+1$$
$$16x^2+3x+2=0$$
$$D = 3^2 - 2\cdot 4\cdot 16 = 9 - 8\cdot 16 < 0$$
$\Rightarrow$ такой случай невозможен.

б) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 2 & (4) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 & (5) \\ \log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 1 & (6) \end{cases}$

(6) $\frac{x}{2}+2 = 5x-1 \quad |\cdot 2$

$x+4 = 10x-2$

$9x = 6$ — не подходит. в ур-е (4)

$\boxed{x = \frac{6}{9}}$

в) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = 2 & (7) \\ \log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 2 & (8) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1 & (9) \end{cases}$

В этом случае $2 = \log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 =$

$= \frac{4}{\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1} = 2.$

(9) $4x+1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4 \quad |\cdot 4$

чистовик (6)

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \text{ - не подходит в ур-е (7)} \end{array}\right.$$

III Проверим найденные значения x из случаев а-в на ограничения (*).

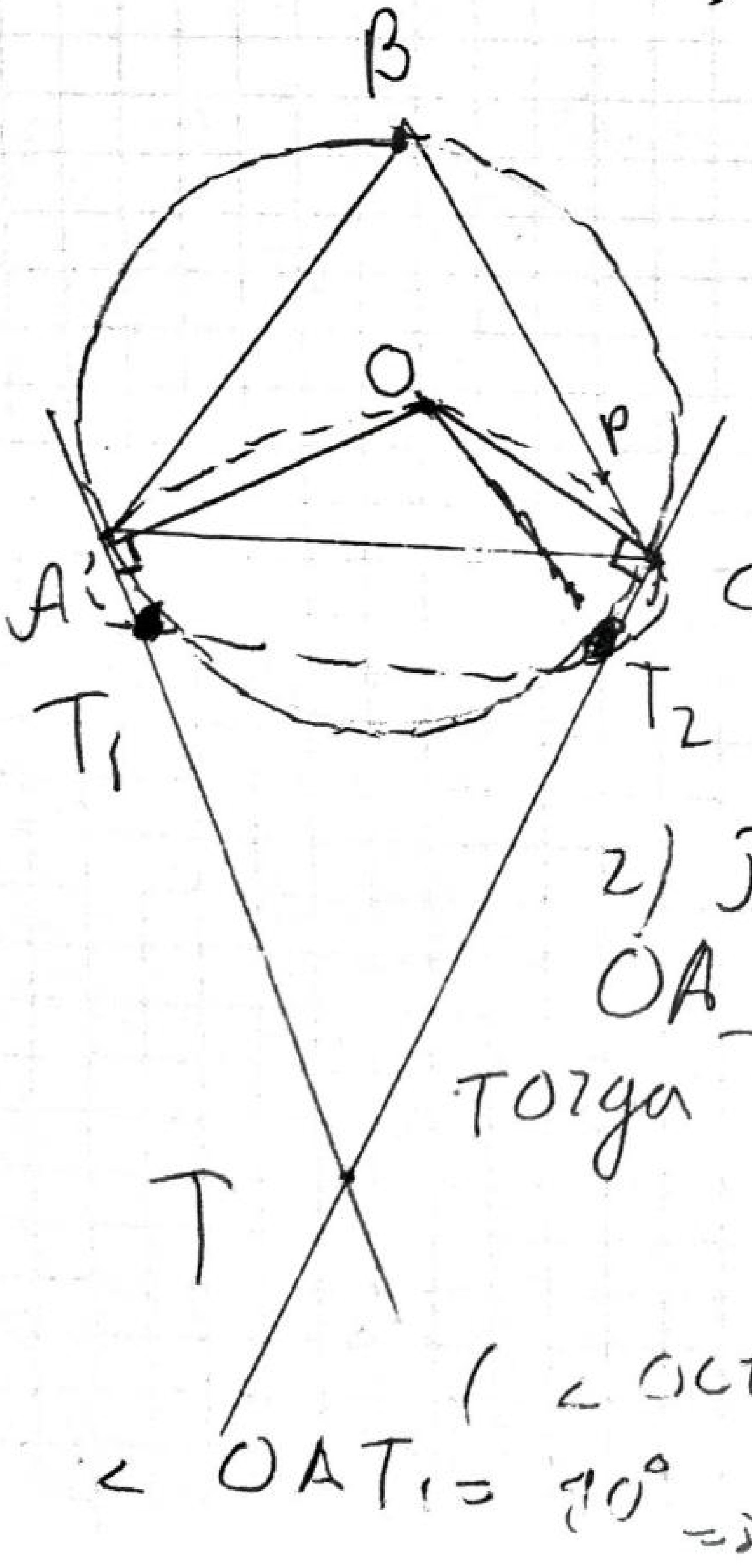
$x = 2$ - подходит $2 > \frac{2}{5}$

Ответ: $\{2\}$

№ 6.

Решение: а)

рисунок 1



1) Обозначим окружность описанную около $\triangle AOC$ через Ω.

Пусть $AT \cap \Omega = T_1$

$CT \cap \Omega = T_2$

2) По св-ву касательных $OA \perp AT$; $OC \perp CT$ тогда в Ω $\angle OCT_2 = 90°$ $\Rightarrow OT_2$ - диаметр ($\angle OCT_2$ - впис, опирающ. на диаметр.

Также $\angle OAT_1 = 90° \Rightarrow OT_1$ - диаметр

Чистовик 1

$\Rightarrow$ OT_1 и OT_2 - диаметры т.е.

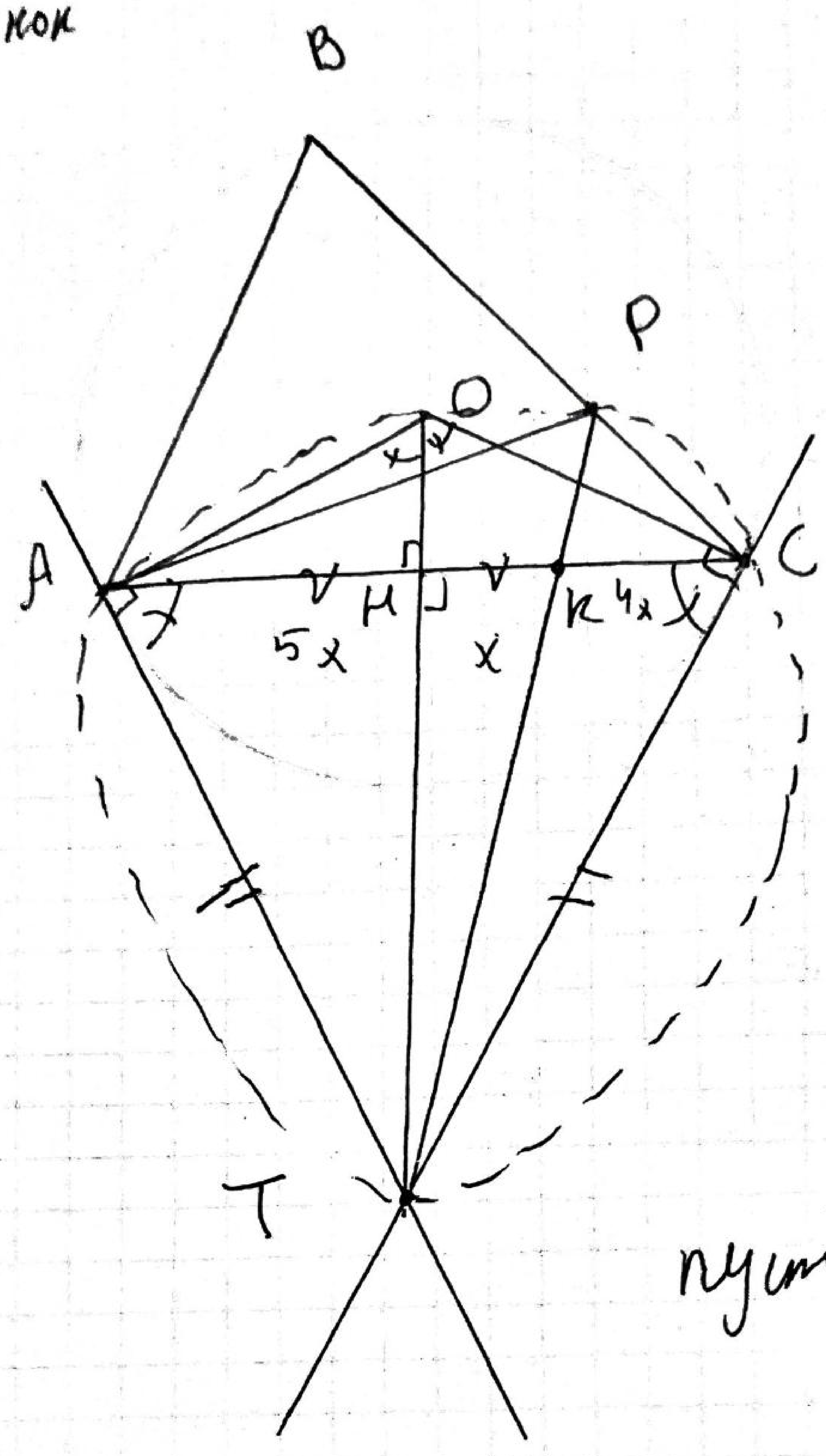
$T_1 \equiv T_2$ $\Leftrightarrow$ T лежит на Ω.

Перерисуем картинку

~~Рисунок~~ 12.

Чистовик 8

Вот рисунок



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{3}{2}$$

~~[illegible]~~

$$\frac{AK}{AC} = \frac{3}{5}$$

Пусть $AC = 10x$

тогда $AH = 5$

$HC = 5x$

$AK = 6x$

$KC = 4x$

$S_{APC} = 10.$

пусть $\angle B = \beta$

~~R – радиус описанной~~ около $\triangle ABC$

$TH = 5x \cdot \cancel{\sin\beta}\ tg\,\beta$

$OH = 5x \cdot ctg\,\beta.$