Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104712**

ID профиля: **848404**

Вариант 17

Черновик

$10a_1+45b=S$

$\cancel{a_6 \cdot a_{12}}$ $a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$55b^2-45b-1=0$

$\cancel{(6a_1+5b)(a}$

$(a_1+5b)(a_1+11b) > 10a_1+45b+1$

$a_1^2+16b \cdot a_1+55b^2=10a_1+45b+1$

$a_1^2+(16b-10)\cdot a_1+(55b^2-45b-1)>0$

$x_1+x_2=10-16b$

$x_1 \cdot x_2=55b^2-45b-1$

$a_1^2+a_1(16b-10)+(60b^2-45b-17)<0$

$55b^2\cancel{-45b}-1-60b^2\cancel{+45b}+17=-5b^2+16>0$

$$\begin{array}{r}45\\+17\\\hline 62\end{array}$$

$-5b^2>-16$

$5b^2<16$

$b^2<\frac{16}{5}$

$b\in[-1;1]$

$b\in\{-1;0;1\}$ $\quad b>0$

$b=1$

$a_1^2+6a_1+60-45-17=a_1^2+6a_1-2<0$

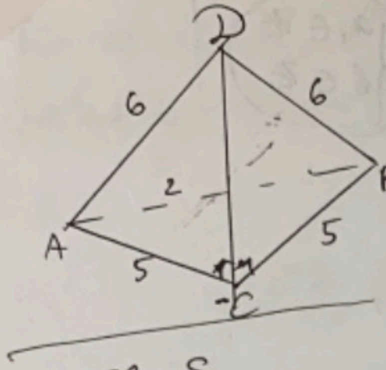
$a_1^2+6a_1+55-45-1=a_1^2+6a_1+9>0$

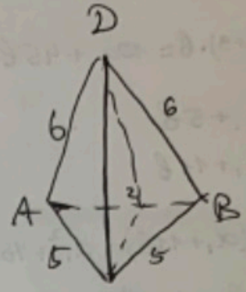
$3<\sqrt{11}<4 \quad -4<-\sqrt{11}<-3$

$0<-3+\sqrt{11}<1$

$-7<-3-\sqrt{11}<-6$

Черновик





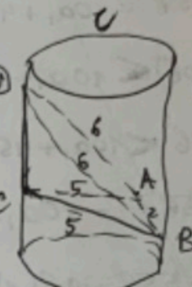
$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$10a_1+45b=S$

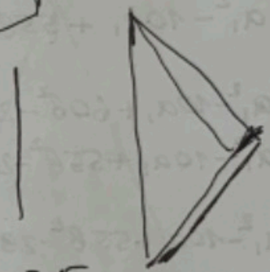
$(a_1+5b)(a_1+11b)=\cancel{a_1^2+55b\cdot a_1+5}$

$=a_1^2+16b\cdot a_1+55b^2=10a_1+45b+1$

$a_1^2+a_1(16b-10)+(55b^2-45b-1)=0$



$\min|d|=2$



$(a_1+6b)(a_1+10b)=a_1^2+16ba_1+60b^2<10a_1+45b+17$

$a_1^2+a_1(16b-10)+(60b^2-45b-17)<0$

$\underbrace{(a_1^2+a_1(16b-10)+55b^2-45b-1)}_{=0}+5b^2-16<0$

$2<\sqrt{5}<\cancel{3}$ 2,5

$\begin{array}{r} \times\, 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$

$5b^2<16$

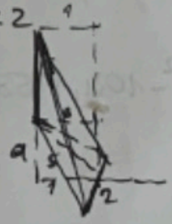
$b^2<\frac{16}{5}$ $\quad b\in\left(-\frac{4}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$b\in[-1;1]$

$2>\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\cancel{8<4\sqrt{5}<12}$ $\quad 8<4\sqrt{5}<10$

$\frac{8}{5}<\frac{4\sqrt{5}}{5}<2$



$\cancel{-1}; 0; 1$

$99=3\cdot3\cdot11$

$a_1^2+a_1\cdot(-26)+(55+45-1)=$

$\sqrt{25-1}=\sqrt{24}=$
$=2\sqrt{6}$

$=a_1^2-26a_1+99=0$

$a_1^2+a_1\cdot(-10)+(-1)=0$

$a_1^2-10a_1-1=0$

$a_1^2+6a_1+4=0$

Черновик

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = S$ $a_2 = a_1 + b$ $\frac{9\cdot 10}{2} = 45$

$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases}$!

$10\cdot a_1 + (1+\ldots+9)\cdot b = 10a_1 + 45b = S$

$a_6 = a_1 + 5b$

$a_{12} = a_1 + 11b$

$(a_1+5b)(a_1+11b) = a_1^2 + 16b + 55b^2 = S+1 = 10a_1 + 45b + 1$

$a_1^2 + 16b + 55b^2 = 10a_1 + 45b + 1$

$(a_1+6b)(a_1+10b) < 10a_1 + 45b + 17$ $\Rightarrow a_1^2 - 10a_1 + (60b^2 - 29b - 17) < 0$

$a_1^2 + 16b + 60b^2 < 10a_1 + 45b + 17$ $~~x_1 + x_2 = -10~~$

$~~x_1 \cdot x_2 = 60b^2 - 29b - 17~~$

$a_1^2 - 29b + 55b^2 + 1 - 10a_1 = 0$

$a_1^2 - 10a_1 + (55b^2 - 29b + 1) = 0$

$\begin{cases} a_1^2 - 10a_1 + 60b^2 - 29b - 17 < 0 \\ a_1^2 - 10a_1 + 55b^2 - 29b + 1 = 0 \end{cases}$

$\underbrace{(a_1^2 - 10a_1 + 55b^2 - 29b + 1)}_{=0} + 5b^2 - 18 < 0$

$5b^2 - 18 < 0 \Rightarrow b^2 < \frac{18}{5}$

$b \in \left(-\sqrt{\frac{18}{5}}; \sqrt{\frac{18}{5}}\right)$

$-\sqrt{\frac{18}{5}} = -3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\sqrt{\frac{2}{5}} < 1$

$~~-3~~; ~~-2~~; ~~-1~~; ~~0~~; 1; 2; 3$ $b \in [-3; 3]$

$583 \,|\, 11$; $53 \times 11 = 583$; $583 \,|\, 7$: -56, 23, 8; $55 \times 9 = 495$; $495 + 88 = 583$

$55\cdot 9 + 293 + 1 =$

$= 495 + 87 + 1 =$ $55 \times 4 = 220$ $220 + 59 = 279$

$583 \,|\, 11$, $53 \,|\, 53$, $1 \,|\, 1$; $163 \,|\, 7$: -14, 23, 2; $279 \,|\, 3$, $93 \,|\, 3$, $31 \,|\, 31$

$a_1^2 - 10a_1 + 583 = 0$ ×

$85 \,|\, 5$, $17 \,|\, 17$, $1 \,|\, 1$

$55 + 29 + 1 = 85$

$55\cdot 4 + 29\cdot 2 + 1 = 220 + 58 + 1 =$

$55 - 28 = 27$ $221 - 58 = 163$

$a_1^2 - 10a_1 + 27 = 0$ $a_1^2 - 10a_1 + 1 = 0$ $55 - 29 + 1 =$

$55\cdot 4 - 29\cdot 2 + 1 = 220 - 58 + 1 =$

$55\cdot 9 - 29\cdot 3 + 1 =$ $495 - 86 = 409$ $163 \,|$

$= 495 - 87 + 1 =$

$409 \,|\, 7$: -35, 59, 5; $409 \,|\, 13$: -39, 19, 3

$409 \,|$

Чистовик

Вариант 17 Лист 1

1) $S = 10a_1 + 45b$ (т.к. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot b$, где b – разность прогрессии
$a_1 \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$ $b > 0$, т.к. по усл. прогр. возр.)

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \\ S = 10a_1 + 45b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5b)(a_1 + 11b) > 10a_1 + 45b + 1 \\ (a_1 + 6b)(a_1 + 10b) < 10a_1 + 45b + 17 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_1^2 + a_1(16b - 10) + (55b^2 - 45b - 1) > 0 \\ a_1^2 + a_1(16b - 10) + (60b^2 - 45b - 17) < 0 \end{cases}$$

$55b^2 \cancel{-45b} - 1 - 60b^2 \cancel{+45b} + 17 > 0$ (т.к. мы из числа >0 вычит. меньшее)

$-5b^2 + 16 > 0$

$5b^2 < 16$ $2 < \sqrt{5} < 3$ т.о. $1 < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$b^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow b \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$$\begin{cases} b \in [-1; 1] \\ b \in \mathbb{Z} \\ b > 0 \end{cases}$$

$b = 1$, подставим в оба неравенства.

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 55 - 45 - 1 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 60 - 45 - 17 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \end{cases}$$ $\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -3 + \sqrt{11} \\ a_1 = -3 - \sqrt{11} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \\ (a_1 + 3)^2 > 0 \end{cases}$$ $3 < \sqrt{11} < 4$ $-4 < -\sqrt{11} < -3$

$$\begin{cases} a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \\ a_1 \neq -3 \end{cases}$$ $0 < -3 + \sqrt{11} < 1$ $-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$

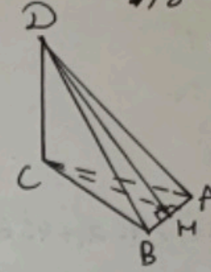
т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_1 \in [-6; 0] \\ a_1 \neq -3 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a_1 \in \{-6; -4; -2; -1; 0; -5\}$$

Ответ: $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

21104712 (U848404 M1304966)

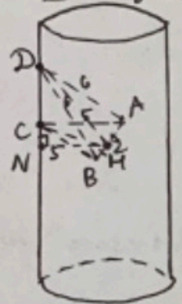
2) заметим, что наименьший возможный радиус цилиндра равен ~~1~~ 1 т.к. если он был бы меньше, то ~~AB~~ A и B одновременно не могли бы лежать на боковых ~~сторонах~~ поверхностях (т.к. $AB \perp CD$ ~~(док.~~ (д-но ниже), значит AB лежит $\parallel$ основанию цилиндра).



проведём
$CH \perp AB$, $DH \perp AB$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ плоскость $(CDH) \perp AB$, при этом $CD \in (CDH) \Rightarrow$
$\Rightarrow CD \perp AB$

Т.о. диаметр цилиндра равен 2, значит AB ~~[illegible]~~ – диам.
есть 2 случая ($\angle DCB > 90^\circ$ и $\angle DCB < 90^\circ$)

I случай



проведём $HN \perp CD$

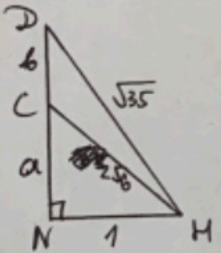
H лежит на оси цилиндра (т.к. AB-диам, H-сер. AB)

т.о. $HN = 1$

пусть $CN = a$; $CD = b$

$DH = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$ (по т. Пифагора)

$CH = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$



$$\begin{cases} (a+b)^2 + 1 = 35 \\ a^2 + 1 = 24 \end{cases}$$ (т. Пифагора для ΔCDH и CHN)

$a^2 = 23 \Rightarrow a = \sqrt{23}$

$b^2 + 2\cdot\sqrt{23}\cdot b + 23 + 1 = 35$

$b^2 + 2\sqrt{23}\cdot b - 11 = 0$

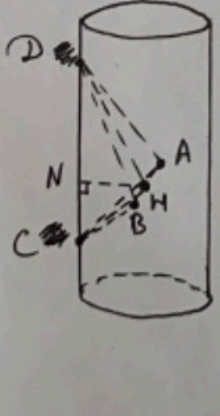
$\frac{D}{4} = 23 + 11 = 34$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = -\sqrt{23} - \sqrt{34} \\ b = -\sqrt{23} + \sqrt{34} \end{array}\right. \\ b > 0 \end{cases}$$

$b = -\sqrt{23} + \sqrt{34}$

т.о. $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

II случай

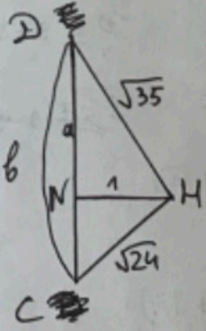


$HN \perp CD$

H – на оси

$HN = 1$

пусть $DN = a$; $CD = b$



$$\begin{cases} a^2 + 1 = 35 \\ (b-a)^2 + 1 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 34 \Rightarrow a = \sqrt{34} \\ b^2 - 2\cdot\sqrt{34}\cdot b + 34 + 1 = 24 \end{cases}$$

2) (продолжение)

$$b^2 - 2\sqrt{34}\cdot b - 11 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 34 + 11 = 45$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = \sqrt{34} + \sqrt{45} \\ b = \sqrt{34} - \sqrt{45} \end{array}\right. \\ b > 0 \end{cases}$$

$$b = \sqrt{34} + \sqrt{45}$$

т.о. $CD = \sqrt{34} + \sqrt{45}$

Ответ: $\{\sqrt{34} - \sqrt{23}\ ;\ \sqrt{34} + \sqrt{45}\}$.

Чистовик

Лист 4

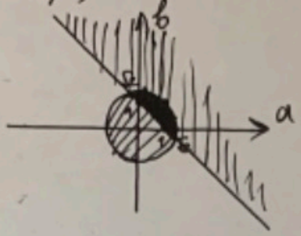
$$3)\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)\end{cases}$$

при $2(a+b)\ge 2$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ b\ge -a+1\end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases}b^2\le 2-a^2\\ b\ge -a+1\end{cases}}$$

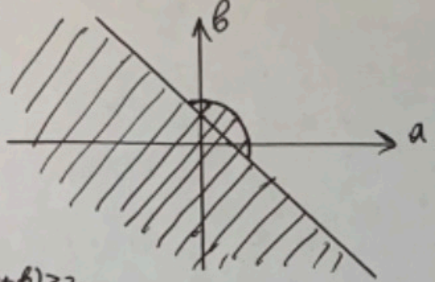
$$\cancel{\begin{cases}b\le\sqrt{2-a^2}\Rightarrow a\in[-\sqrt2;\sqrt2]\\ b\ge -a+1\end{cases}}$$



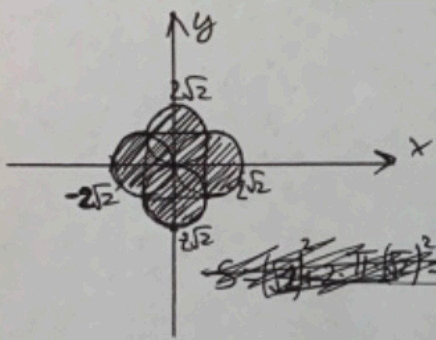
при $2(a+b)\le 2$

$a+b\le 1$

$b\le -a+1$



при $2(a+b)\ge 2$

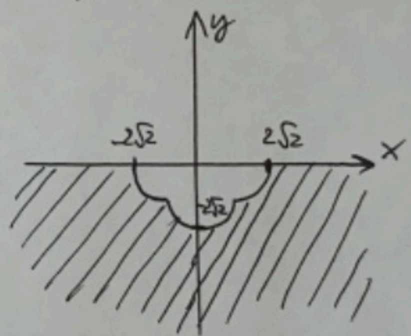


$\cancel{S=(\sqrt2)^2+2\cdot\pi\cdot(\sqrt2)^2=2+4\pi}$

$\cancel{S=(\sqrt2)^2+2\cdot\pi\cdot(\sqrt2)^2=4\pi+2}$

$$S=(2\sqrt2)^2+4\frac{\pi\cdot(\sqrt2)^2}{2}=8+4\pi$$

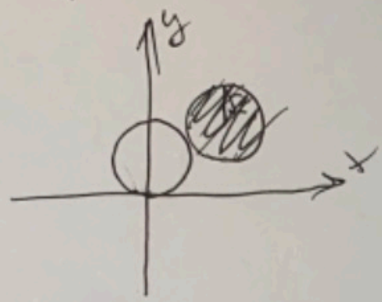
при $2(a+b)\le 2$



S=

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;\,2)\end{cases}$$



при $2a+2b\ge 2$

$2(a+b)\ge 2$

$\cancel{a^2+b^2\le 2}$

$a+b\ge 1$

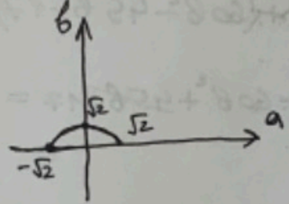
$a^2+b^2=(a+b)^2\cancel{-2ab}$

$\cancel{x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2\le 2}$

$\cancel{x^2+y^2-2(ax+yb)+}$

$a^2+b^2\le 2$

$b^2\le 2-a^2$



$a^2\le 2$

$a\le\sqrt2$

$a\ge-\sqrt2$

$b\in[0;\sqrt2]$

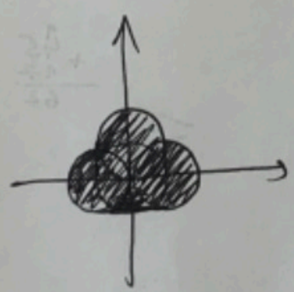
$a\in[-\sqrt2;\sqrt2]$

при $2a+2b\le 2$

$2(a+b)\le 2$

$a+b\le 1$

$b\le -a+1$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104712**

ID профиля: **848404**

Вариант 17

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ \cancel{НОД(a;b;c)} \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a=6\cdot n$ $\quad$ $НОД(n;k;p)=1$

$b=6\cdot k$

$c=6\cdot p$

$6\cdot n\cdot k\cdot p=2^{15}\cdot 3^{16}$

$n\cdot k\cdot p=2^{14}\cdot 3^{15}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\cdot\log_{(5x-1)}(4x+1) = a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\frac{1}{\log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=c$

$\frac{2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=2\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(4x+1)=2\cdot\frac{1}{\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

$a\cdot c=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot b}=4\cdot\frac{1}{b}=\frac{4}{b}$

$\cancel{abc=4}$, $\cancel{a=b}$, $\cancel{c=a-1}$

$$\begin{cases} abc=4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ c=a-1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=c \\ a=b-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=c \\ b=a-1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} abc=4 \\ a=b \\ c=a-1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} abc=4 \\ b=c \\ a=b-1 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} a=c \\ b=a-1 \\ abc=4 \end{cases} & (3) \end{array}\right.$$

(1) $a=2\cdot\log_{(5x-1)}(4x+1)=2$

$\log_{(5x-1)}(4x+1)=1$ $\quad$ $\frac{1}{\log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

$5x-1=4x+1$

$x=2$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=$

$=a-1=$

$=\log_{(5x-1)}(4x+1)-1=$

$=\log_{(5x-1)}\frac{(4x+1)^2}{5x-1}=$

$b=2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1$

$4x+1=\frac{x}{2}+2 \mid \cdot 2$

$8x+2=x+4$

$7x=2$ $\quad$ $x=\frac{2}{7}$

(2) $x=\frac{2}{7}$

$\log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$

$\log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$5x-1$ $\quad$ $=(5x-1)^2$

$\frac{x}{2}+2=25x^2-10x+1 \mid \cdot 2$

$x+4=50x^2-20x+2$

$50x^2-21x-2=0$

$50\cdot\frac{4}{49}-\frac{21\cdot 2}{7}-2=$

$=\frac{200-1421-98}{49}=$

$=$

(1) $a^2\cdot(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a^3+a^2+2a-2a^2-2a-4=a^3-a^2-4=0$

$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$ не подх

(2) $\begin{cases} b=2 \\ c=2 \\ a=1 \end{cases}$ не подх $\quad$ (3) $\begin{cases} a=2 \\ c=2 \\ b=1 \end{cases}$

$14 \times 21 = 14 + 28 = 294$

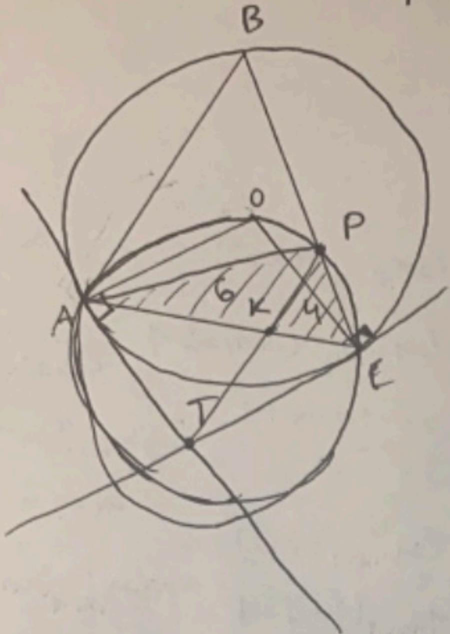
$x=2$

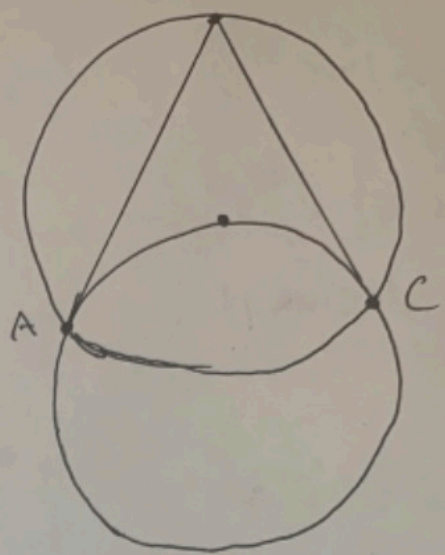
$50x^2-21x-2=0$

$200-42-2$

21104712 (U848404 M1304967)

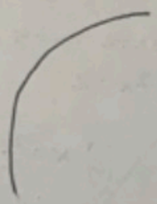
Черновик





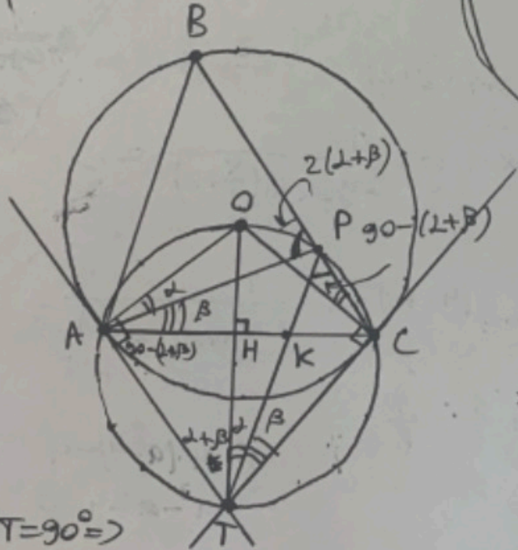
$90 - \cancel{\alpha} - \cancel{\beta} + \cancel{\beta} + \cancel{2}\alpha + \beta =$

$= 90 + \alpha + \beta$



$180° - 2(\alpha+\beta)$

$2(\alpha+\beta)$



$tg\angle ABC = \frac{7}{5}$

$\angle AOT = \angle ABC$

$\frac{AH}{OH} = \frac{7}{5}$

кас $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow T \in$ окр. $\Rightarrow$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{AK}\ \frac{AK}{CK} = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$\frac{25}{4} \cdot 4 = 25$

$\Rightarrow APCT$ − впис $\Rightarrow \angle ATC + \angle APC = 180°$

$\angle PAT + PCT = 180°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APC = \angle AOC$

$\cancel{\alpha+\beta}$

$\beta + 90° - \alpha - \beta = 90° - \alpha$

$\gamma = 90° - 90° + \alpha + \beta = \alpha + \beta$

$90° - \alpha$

$2\alpha + 2\beta$

$90 - \cancel{\alpha} - \cancel{\beta} + \cancel{\beta} + \cancel{2}\alpha + \beta =$

$= 90 + \alpha + \beta$

$180° - 90° - \alpha - \beta = 90° - \alpha - \beta$

Чистовик

Лист 1

4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

т.к. $НОД(a;b;c)=6$, ~~то~~ a, b и c можно представить как $6\cdot n$; $6\cdot k$; $6\cdot p$, при условии, что $НОД(n;k;p)=1$, тогда пусть

$\begin{cases} a=6\cdot n \\ b=6k \\ c=6p \\ НОД(n;k;p)=1 \end{cases}$

теперь рассмотрим $НОК(a;b;c)$

т.к. n, k и p – взаимнопростые, $НОК(a;b;c)=6\cdot n\cdot k\cdot p$, но по условию $НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$, то есть $6\cdot nk\cdot p=2^{15}\cdot 3^{16}=6\cdot 2^{14}\cdot 3^{15}$, значит, $n\cdot k\cdot p=2^{14}\cdot 3^{15}$, при этом ~~НОК(a~~ $НОД(n;k;p)=1$, что означает, что у n, k и p не может быть общих простых делителей, но их произведение равно $2^{14}\cdot 3^{15}$ (всего 2 простых множителя (разных) в степенях), значит ~~при этом n, k и p~~, одно из n, k или p равно 1, а 2 других равны 2^{14} и 3^{15}

т.о. все тройки

$\begin{cases} a=6 \\ b=6\cdot 2^{14} \\ c=6\cdot 3^{15} \end{cases}$; $\begin{cases} a=6 \\ b=6\cdot 3^{15} \\ c=6\cdot 2^{14} \end{cases}$; $\begin{cases} a=6\cdot 2^{14} \\ b=6 \\ c=6\cdot 3^{15} \end{cases}$; $\begin{cases} a=6\cdot 2^{14} \\ b=6\cdot 3^{15} \\ c=6 \end{cases}$; $\begin{cases} a=6\cdot 3^{15} \\ b=6 \\ c=6\cdot 2^{14} \end{cases}$; $\begin{cases} a=6\cdot 3^{15} \\ b=6\cdot 2^{14} \\ c=6 \end{cases}$

Ответ: 6 троек.

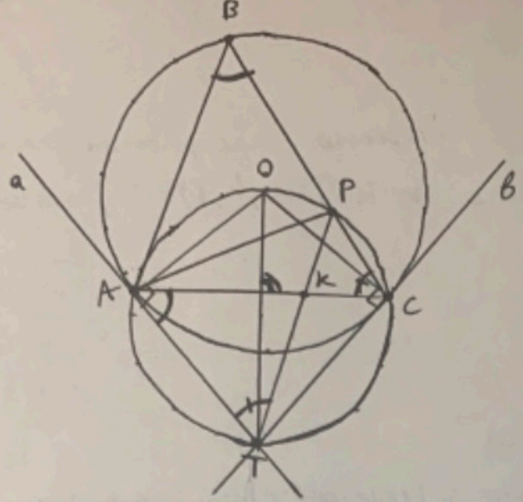
21104712 (U848404 M1304967)

Чистовик

Лист 2

6)

а)



a и b – кас. ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in$ окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow APCT$ – вписанный чет/уг. $\cancel{\Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \angle ATC + \angle APC = 180^\circ}$

$\cancel{\angle PAT + \angle PCT = 180^\circ}$

$\cancel{\angle ATC}$ $\cancel{\angle ATO = \angle}$

$\angle CAT = \frac{1}{2} \cdot \smile AC$

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \smile AC$ $\Bigg| \Rightarrow \angle CAT = \angle ABC$

$\angle CAT = \angle TPC$ (т.к. опир. на $\smile TC$) $\Bigg| \Rightarrow \angle ABC = \angle TPC \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel PT \text{ (т.к. } \angle ABC \text{ и } \angle TPC \text{ – соотв.)} \Rightarrow \\ \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow \end{cases}$

$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{3}{2}$ (т.к. выс. у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ – общ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{CK} = \frac{5}{2}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CPK}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$S_{\triangle CPK} = 4$ $\Bigg| \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{25}{4} \cdot 4 = 25$

Ответ: 25

21104712 (U848404 M1304967)

Чистовик

Лист 3

5) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\cdot\log_{5x-1}(4x+1) = a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c$

$a\cdot c = 2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1) = 2\cdot\frac{1}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)} =$

$= 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot b} = 4\cdot\frac{1}{b}$

$a\cdot b\cdot c = 4$

по усл. либо $a=b=c+1$ (1), либо $a=c=b+1$ (2), либо $b=c=a+1$ (3)

(1) $a^2\cdot(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$ $\quad D=1-8<0$

$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)=2 \\ 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{5x-1}(4x+1)=1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x-1=4x+1 \\ 4x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x}{2}+2=5x-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ 3{,}5x=1 \\ 4{,}5x=3 \end{cases}$

$\varnothing$

(2) $a^2\cdot(a-1)=4$

$\begin{cases} a=2 \\ c=2 \\ b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \\ 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{5x-1}(4x+1)=1 \\ 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=4x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x-1=4x+1 \\ 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1 \end{cases}$

$x=2$

подставим в 2 ост.

$9=(1+2)^2=9$ – верно

$(1+2)^2=10-1=9$ – верно

т.о. $x=2$ – подх.

(3) $b^2\cdot(b-1)=4$

$\begin{cases} b=2 \\ c=2 \\ a=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \\ 2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x+1=\frac{x}{2}+2 \;|\cdot 2 \quad (4) \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1 \\ (4x+1)^2=5x-1 \end{cases}$

(4) $8x+2=x+4$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$

подставим в 2 ост

$\left(2+\frac{1}{7}\right)^2=\left(\frac{15}{7}\right)^2=\frac{225}{49}=\frac{10}{7}-1=$

$=\frac{10-7}{7}=\frac{3}{7}$ – неверно

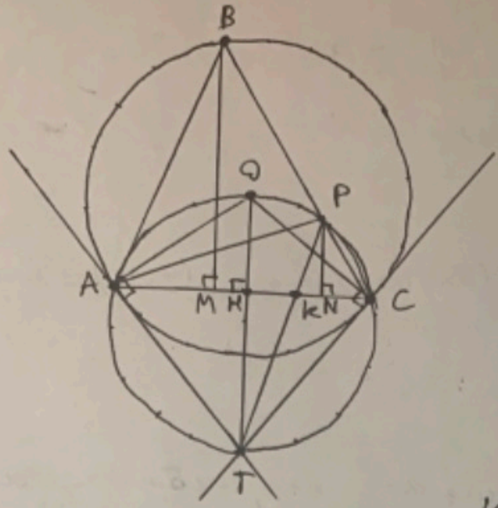
т.о. $x=\frac{2}{7}$ не подх.

Ответ: при $x=2$

Чистовик

6) б)

лист 4



д.п. $PN \perp AC$; $BM \perp AC$

$tg \angle ABC = \frac{7}{5}$

$\angle AOT = \angle ABC$

(т.к. $\angle AOT = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 2 \angle ABC$)

т.о. $tg \angle AOT = \frac{7}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AH}{OH} = \frac{7}{5}$

из пункта а) $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

~~т.о.~~

~~обозначь $AK = 3a \Rightarrow KC = 2a$, $AC = 5a$, $AH = 2{,}5a$~~

~~$AH = 2{,}5a = \frac{5}{2}a = \frac{7}{5} \cdot OH$~~

~~$OH = \frac{25}{14}a$~~

~~$S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot PN = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot PN = 4$~~

$a \cdot PN = 4$

$PN = \frac{4}{a}$

~~$3a \cdot PN = 6$~~

~~$PN = \frac{6}{3a}$~~ ~~$PN \cdot a = 2$~~ ~~$PN = \frac{2}{a}$~~

~~$\frac{OH}{PN} = \frac{25a \cdot a}{14 \cdot 6} = \frac{25a^2}{14 \cdot 6}$~~

~~$S_{\triangle AKP} = \frac{1}{2} AK \cdot PN = \frac{1}{2} 3a$~~

~~$\frac{OH}{PN} = \frac{25a^2}{14 \cdot 4}$~~

~~$\frac{1}{2} PN \cdot KC = 4$~~

~~$\frac{1}{2} BM \cdot AC = 25$~~

~~$AC = 5$~~ ~~$AC = 5$~~

~~$\frac{AC}{KC} = \frac{5}{2}$~~

~~$AC = \frac{5}{2} KC$~~

~~$PN \cdot KC = 8$~~

~~$BM \cdot \frac{5}{2} \cdot KC = 25$~~