Часть 1

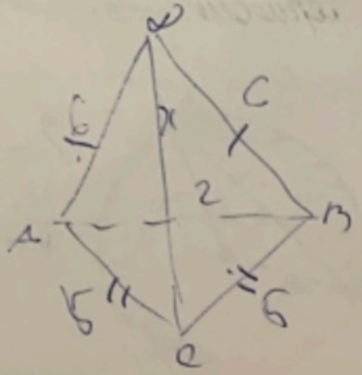
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104619**

ID профиля: **279858**

Вариант 17

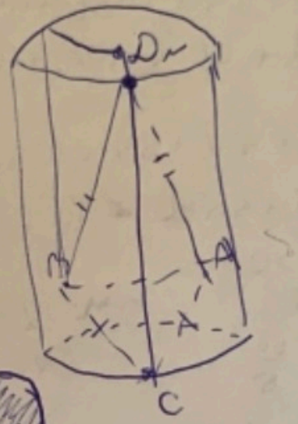
Черновик.



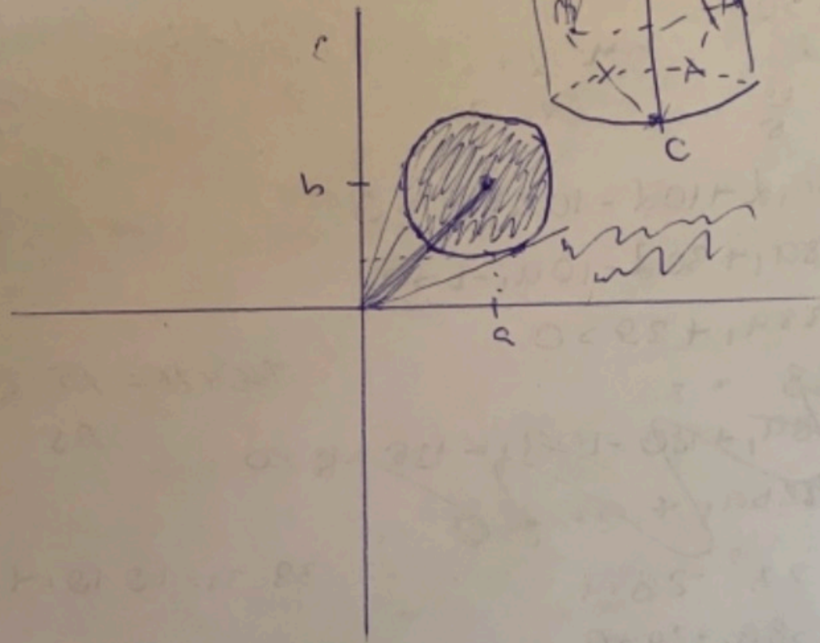
$AB=2$
$AC=CB=5$
$AD=DB=6$

0123456789

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$
$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$



$R=\sqrt{2}$



Часть 1. Вариант 17 Задача 3. Чистовик. $\boxed{\text{лист 2.}}$

Сначала, найдём какие значения могут принимать a, b.

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

I случай: $2a+2b \le 2$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

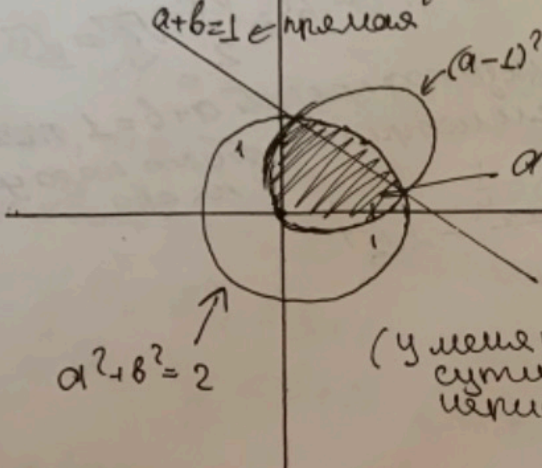
$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

Это есть окружность радиуса $\sqrt{2}$ и центром в т. $(1;1)$

II случай: $2a+2b > 2$

$a^2+b^2 \le 2$

Такие окр-ть с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в $(0;0)$.

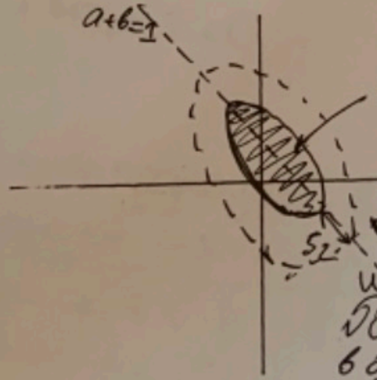


прямая проходит через две точки пересечения окружностей.

a и b могут лежать только в этой области (заштрихованой, объединение 2-х окружностей)

(У меня получился кривой рисунок, но сути это не меняет, потом я нарисовал нормально.)

Расстояние от точки (x,y) до (a,b) должно быть $\le \sqrt{2}$



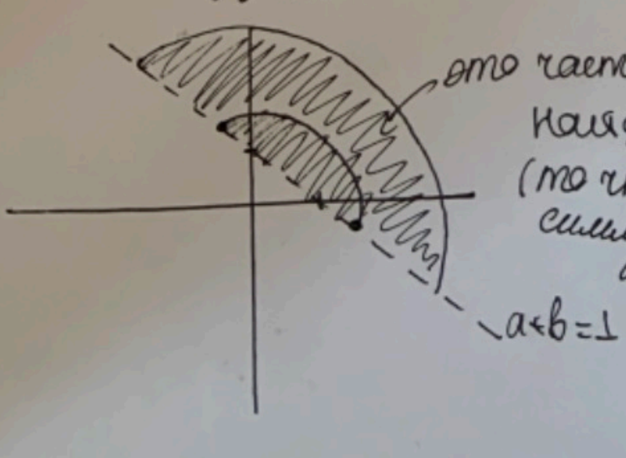
эта наша заштрихованная область

увеличеная область (расстояние от нее до закругления $\sqrt{2}$. $S_2=\sqrt{2}$

Расстояние до ближайшей точки $(a,b) \le \sqrt{2}$ в этой области, а снаружи $> \sqrt{2}$

(x,y) может лежать только в увеличеной обл-ти

Полученная область (фигура) — это объединение всех окружностей с центрами на дугах.



это часть окр-ти с центром в $(0,0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

Найдём площадь этой части.

(то что ниже прямой $a+b=1$ в силу симметрии будет учтено при рассмотрении нижней дуги)

21104619 (U279858 M1300807)

Чистовик. Задача 1 $\boxed{\text{лист } 1}$ Вариант 17. Часть.

$S = 10a_1 + 45d$

$a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2$

$a_7 \cdot a_{11} = a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 + 5d^2 = a_6 \cdot a_{12} + 5d^2$

$a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} = 5d^2$

по условию: $\left.\begin{matrix} a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \\ a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} \leq S + 16 - S + 2 = 14$

$\Updownarrow$

$a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} \leq 14$

$5d^2 \leq 14 \Rightarrow d = 1$, так как d - должно быть натуральным

$S = 10a_1 + 45d = 10a_1 + 45$

По условию должно выполняться:

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$ $a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$

$D = 36 + 8 = 44 = 4 \cdot 11$

$a_1 = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

Значит, нам подходят все целочисленные значения a_1 из промежутка $(-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$, кроме -3. $a_1 \neq -3$, при $a_1 = -3$ $a_1^2 + 6a_1 + 9 = 0$ - этого не должно быть по условию.

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 \in (-6; -5; -4; -2; -1; 0)}$

21104619 (U279858 M1300807)

$a_1 + a_1 + d + a_1 + d + d$ $\quad 1+2+3+4+5+6+7+8+9$ Черновик.

$10a_1 + 45d = S$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1 + 45d + 1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 60d < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d + 5d < 10a_1 + 45d + 1 + 16$

$a_1^2 + 16a_1d + 55d < 10a_1 + 45d + 1 + 16 - 5d$

$16 - 5d > 0$

$16 > 5d$ $\quad d = 3$ $\quad d = 2$

$d < \frac{16}{5}$ $\quad d = 2$

$d = 1$

$a_1^2 + 16a_1d + 10d - 10a_1 - 1 > 0$

$a_1^2 + 48a_1 + 30 - 10a_1 - 1 > 0$

$a_1^2 + 38a_1 + 29 > 0$

$a_1^2 + 38a_1 + 180 - 10a_1 - 136 - 17 < 0$ $\quad 136 + 17 = 153$

$a_1^2 + 28a_1 + 28 < 0$

$28^2 - 28 \cdot 4$ $\quad 38 \cdot 38 = 19 \cdot 19 \cdot 4$

$a_1^2 + 38a_1 + 29 > 0$

$D = 38^2 - 29 \cdot 4$

$a_1 = \frac{-38 \pm \sqrt{38^2 - 29 \cdot 4}}{2}$ $\quad \sqrt{4(19 \cdot 19 - 29)}$

$\boxed{d = 1}$

$a_1^2 + 38a_1 + 28 < 0$

Ответ: $a_1 = -1$, $a_1 = 0$

$a_1^2 + 38a_1 + 29 > 0$

$a_1^2 + 22a_1 + 30 - 17$

$a_1^2 + 22a_1 + 13 < 0$

$a_1^2 + 32a_1 + 20 - 10a_1 - 1 > 0$

$\boxed{a_1^2 + 22a_1 + 19 > 0}$

$a_1 = -1$

-6

$a_1^2 + 6a_1 + 10 - 1 > 0$ $\quad a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$ $\quad a_1 = -1$ - подходит

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$ $\quad a_1 = -2$

$d = 1$, $a_1 = 0$

$S = 45$

$5 \cdot 11$

$56 > 45 + 1$

$6 \cdot 10 < 45 + 17$

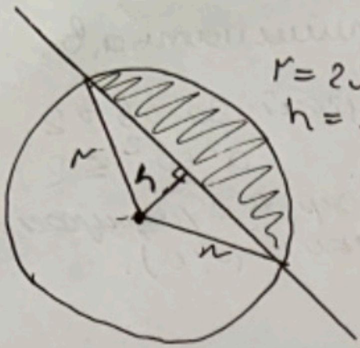
$S = 35$

$d = 1$, $a_1 = -1$

$4 \cdot 10 = 40$

$35 + 17$

Часть 1. Вариант 17. Задача 3 Чистовик Продолжение. лист 3.



$r = 2\sqrt{2}$

$h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\text{штрих}} = \overset{\text{сектор}}{S_{\text{сектора}}} - \overset{\text{треугольник}}{S_{\text{треугольника}}}$

↑ штрихованная часть.

$$S_{\text{сектора}} = \frac{2\arccos\frac{h}{r}}{2\pi} \cdot r^2 = \frac{2\arccos\frac{1}{4}}{2\pi} \cdot 8 = \frac{\arccos\frac{1}{4}}{\pi} \cdot 8$$

$$S_{\text{треугольника}} = h \cdot \sqrt{r^2 - h^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3}$$

$S_{\text{штрих}} = \frac{8\arccos\frac{1}{4}}{\pi} - \sqrt{3}$. Площадь под прямой $a+b=1$ такая же из симметрии $\Rightarrow$ ответ надо умножить на два.

$$S_{\text{полная}} = 2S_{\text{штрих}} = \frac{16\arccos\frac{1}{4}}{\pi} - 2\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{16\arccos\frac{1}{4}}{\pi} - 2\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104619**

ID профиля: **279858**

Вариант 17

Черновик

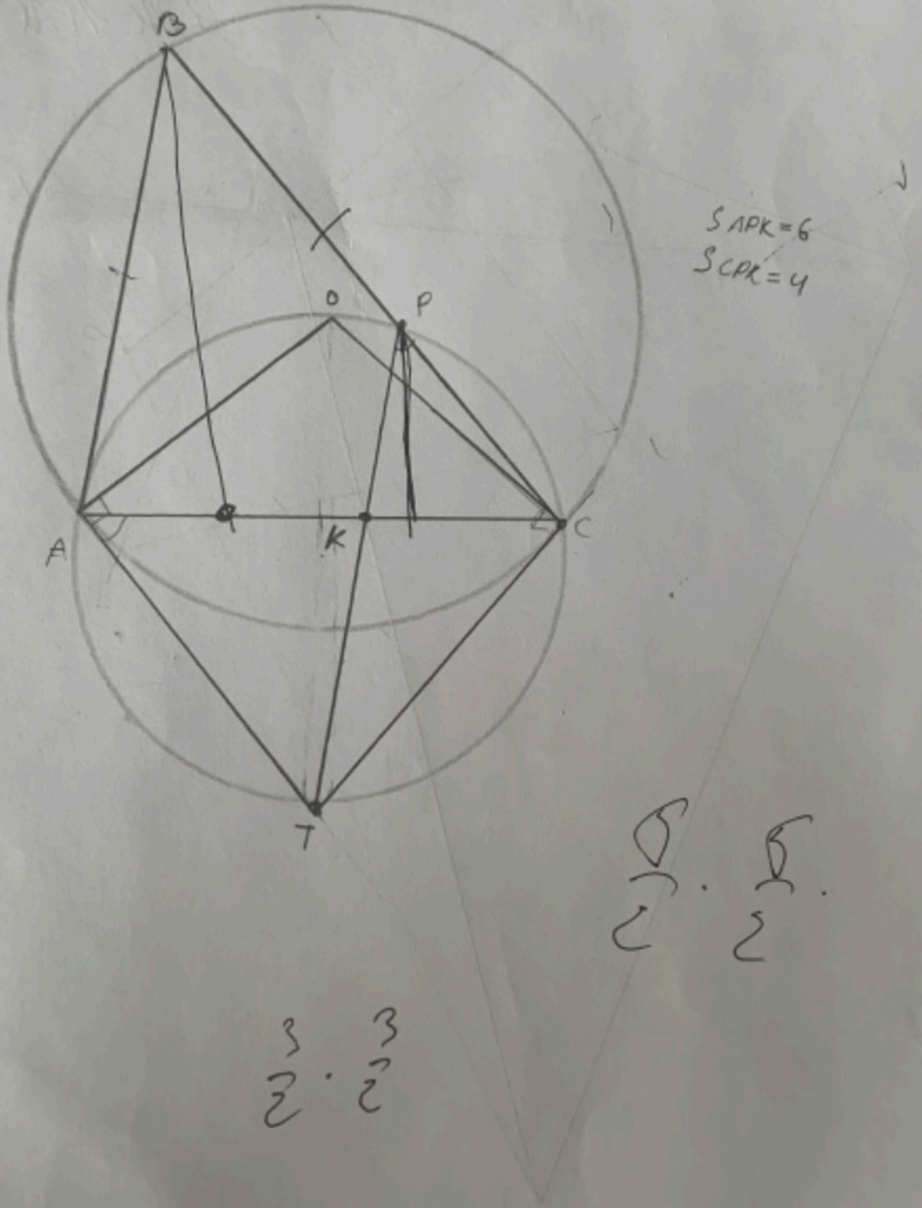
PH_1

$BH_2 \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 26$

$\boxed{BH_2 \cdot AC = 60}$

$BC \cdot \cancel{\cos}\, x$

$BC \cdot \sin x \cdot AB = 60$



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$

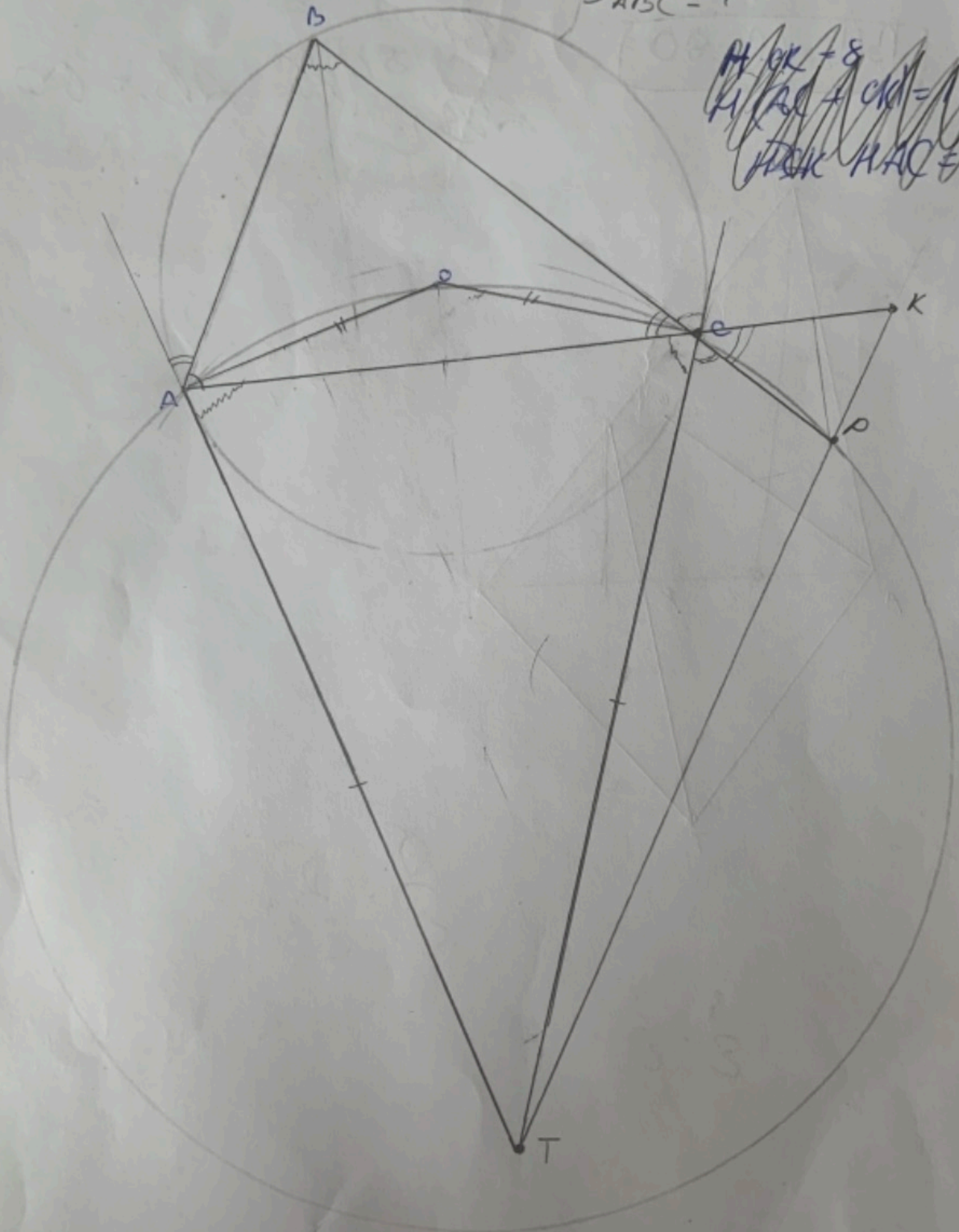
21104619 (U279858 M1300808)

Черновик.

$S_{APK} = 6$ $\quad CK \cdot 12 = 8AC + 8CK$

$S_{CPK} = 4$ $\quad 4CK = 8AC \Rightarrow CK = 2AC$

$S_{ABC} - ?$



$2\xi + 2\cdot = 180^\circ$

Задача 5. лист 2. Чистовик. Вариант 13

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$

Перепишем логарифмы.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\frac{\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)}\cdot 2=a$ (Введем обозначение)

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\frac{2\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\ln(4x+1)}=b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\frac{\ln(5x-1)}{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}=c$

$a\cdot b\cdot c=4$

Мы знаем, что два равны (пусть они равны y), а третье меньше на 1.

$y^2(y-1)=4$

$y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$ ← нет корней т.к. $D<0$

Следовательно, единственный корень $y=2$

Проверим все возможные варианты: 1) $a=1$ $b=2$ $c=2$

$b=2 \Rightarrow \frac{2\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\ln(4x+1)}=2 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{2}+2\right)=\ln(4x+1) \Rightarrow \frac{x}{2}+2=4x+1 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$

$c=2 \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{10}{7}-1\right)}{\ln\left(\frac{1}{7}+2\right)}=4=\frac{\ln\left(\frac{3}{7}\right)}{\ln\left(\frac{15}{7}\right)}<0 \Rightarrow c\neq 2 \Rightarrow$ такой вариант нам не подходит.

2) $a=2, b=1, c=2$ $a=2 \Rightarrow 4x+1=5x-1 \Rightarrow$ $x=2$

$c=2=\frac{\ln 9}{\ln 3}=2=\frac{2\ln 3}{\ln 3}=2$ - подходит, теперь проверим для $b=1$

$\frac{2\ln 3}{\ln 9}=1$ - верно $\Rightarrow x=2$ подходит.

21104619 (U279858 M1300808)

Задача 5. Продолжение. Чистовик лист. 3. Вариант 17

3) ~~...~~ $c=1$ $b=2$ $a=2$

$b=2 \Rightarrow \frac{x}{2}+2=4x+1 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$

$c=1 \Rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{10}{7}-1\right)}{\ln\left(\frac{1}{7}+2\right)}=\dfrac{\ln\frac{3}{7}}{\ln\frac{15}{7}}\neq 1 \Rightarrow$ такой вариант тоже не подходит.

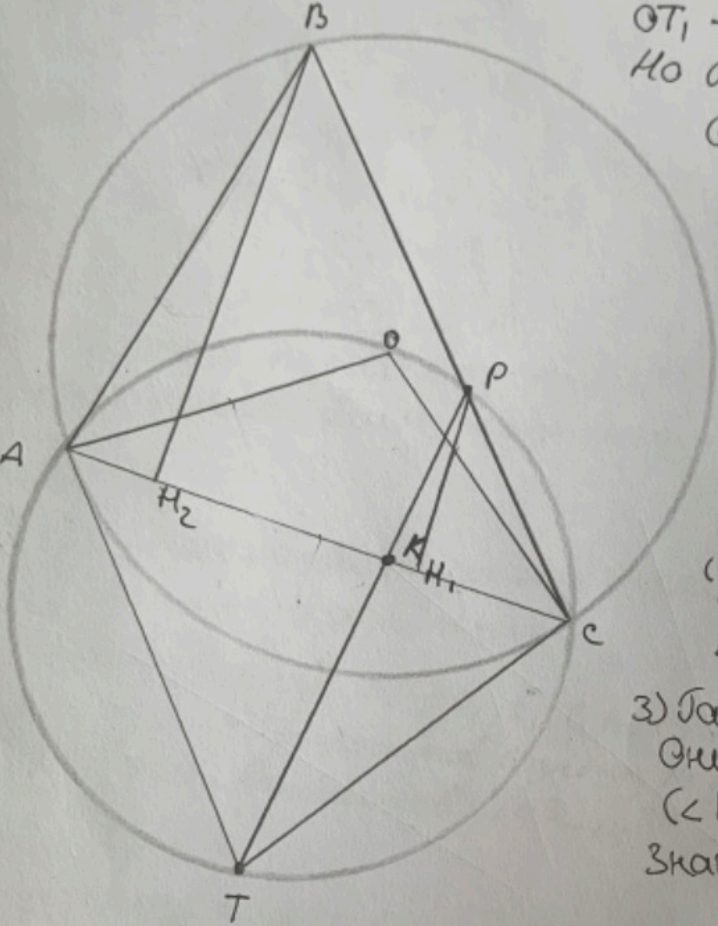
Следовательно, у нас единственное значение x удовлетворяет условию.

$\boxed{\text{Ответ: } x=2}$

Задача 6. Чистовик. лист 4. Вариант 17.

Решение:

ω_1 - окр-ть, проведенная по точкам A, O, C.



1) Пусть AT пересекает окр-ть ω_1 в т. T_1, а TC пересекает в т. T_2, тогда OT_1 - диаметр и T_2O - диаметр. Но $OT_1 \cap T_2O$ в т. O - а, тогда O - не центр окр-ти ω_1 => => T_1 и T_2 - совпадают => => т. T лежит на окр-ти ω_2.

2) $\angle TPC = \angle TAC$ (т.к. они опираются на одну и ту же дугу $\smile TC$)

Также, т.к. AT - касательная к окр-ти ω, то $\angle TAC = \angle ABC$ (как угол между хордой и касательной, и $\angle TAC = \smile AC$ и $\angle ABC = \smile AC$) => $\angle ABC = \angle TPC$

3) Рассм. $\triangle PKC$ и $\triangle ABC$. Они подобны по двум углам ($\angle PCA$ - общий и $\angle KPC = \angle ABC$)

Значит $\frac{KC}{AC} = \frac{PH_1}{BH_2}$ (BH_2 - высота $\triangle ABC$ проведенная из B на AC) PH_1 - высота $\triangle KPC$, проведенная из P на KC.

4) $S_{PKC} = PH_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot KC$

$S_{APK} = AK \cdot PH_1 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{\triangle ABC} = AC \cdot BH_2 \cdot \frac{1}{2}$

$\to S_{PKC} + S_{APK} = PH_1 \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 10$

Также, мы знаем, что $6 = AK \cdot PH_1 \cdot \frac{1}{2}$

$4 = PH_1 \cdot KC \cdot \frac{1}{2}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{AK}{KC}$; $AK = \frac{3}{2} KC$

$AC = AK + KC = \frac{3}{2} KC + KC = \frac{5}{2} KC$; т.к. $\triangle ABC \sim \triangle PKC$, то $\frac{PH_1}{BH_2} = \frac{2}{5}$

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{5}{2} \underbrace{PH_1 \cdot AC \cdot \frac{1}{2}}_{=10} = 25$

$\boxed{\text{Ответ: } 25}$

21104619 (U279858 M1300808)

Чистовик.

Задача 4. Лист 1. Вариант 17.

НОД$(a, b, c) = 6 \Rightarrow a \vdots 6$, $b \vdots 6$ и $c \vdots 6$

НОК$(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \Rightarrow a = 2^{a_1} 3^{a_2}$; $b = 2^{b_1} 3^{b_2}$; $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2}$

И $\max(a_1; b_1; c_1) = 15$

$\max(a_2; b_2; c_2) = 16$

Получим набор условий:

$$\begin{cases} a_1; a_2; b_1; b_2; c_1; c_2 \geq 1 \\ \max(a_1; b_1; c_1) = 15 \\ \max(a_2; b_2; c_2) = 16 \end{cases}$$

Посчитаем кол-во подходящих $a_1; b_1; c_1$, а также $a_2; b_2; c_2$, затем перемножим, чтобы получить ответ (т.к. независимые тройки)

1. $a_1; b_1; c_1$

Нужно количество вариантов значений из $[1; 15]$, так чтобы 15 встречалось хотя бы раз.

Всего вариантов: 15^3 ($a_1; b_1; c_1$ по 15 способов)

Без 15: 14^3 вариантов (одно из 14 значений для $a_1; b_1; c_1$)

Тогда всего вариантов: $15^3 - 14^3$

2. $a_2; b_2; c_2$

Аналогично пункту 1: Всего вариантов: 16^3

Без 16: 15^3

Всего с 16: $16^3 - 15^3$

Тогда кол-во различных троек: $(15^3 - 14^3)(16^3 - 15^3)$

$$\boxed{\text{Ответ: } (15^3 - 14^3) \cdot (16^3 - 15^3)}$$