Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104591**

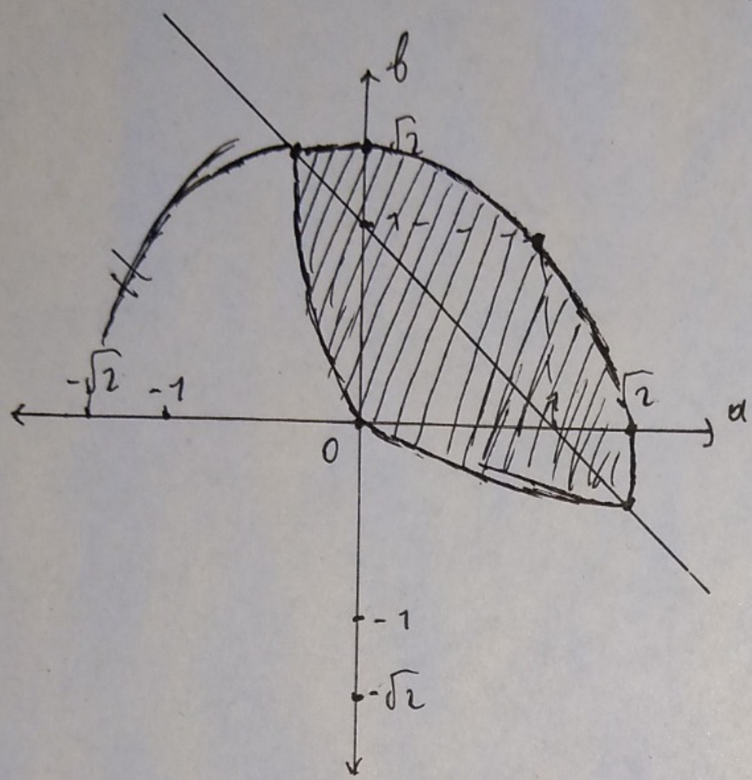
ID профиля: **88583**

Вариант 17

Чистовик ③ Вариант 17 ~~часть 2~~ Часть 1

№3

(2)
$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & - \omega((a;b); R=\sqrt{2}) - \text{круг, граница кот-го — эта } \omega \\ (1)\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2) & - \omega((0;0); R=\sqrt{\min}) - \text{круг, граница кот-го — эта } \omega\end{cases}$



(1) $2a+2b \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~$a \le 1-b$~~

$b \le 1-a$

1) $\begin{cases} b \le 1-a \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b \le 1-a \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} b \ge 1-a \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases}$

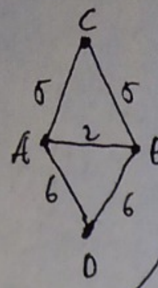
(2) ~~$a \in$ $b = a\ 1-a$~~

$\begin{cases} b = 1-a \\ b^2+a^2 = 2 \end{cases}$

Т.к. (0;0) симметрична (1;1) относительно прямой $b=1-a$, то, графики сойдутся в одинаковых точках

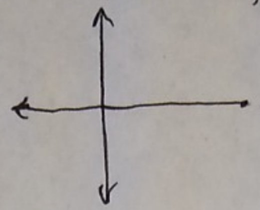
21104591 (U88583 M1300537)

Черновик (1)



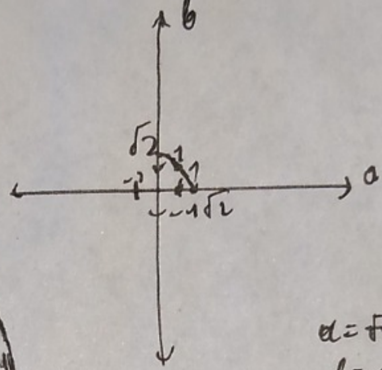
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b; 2) \end{cases}$$

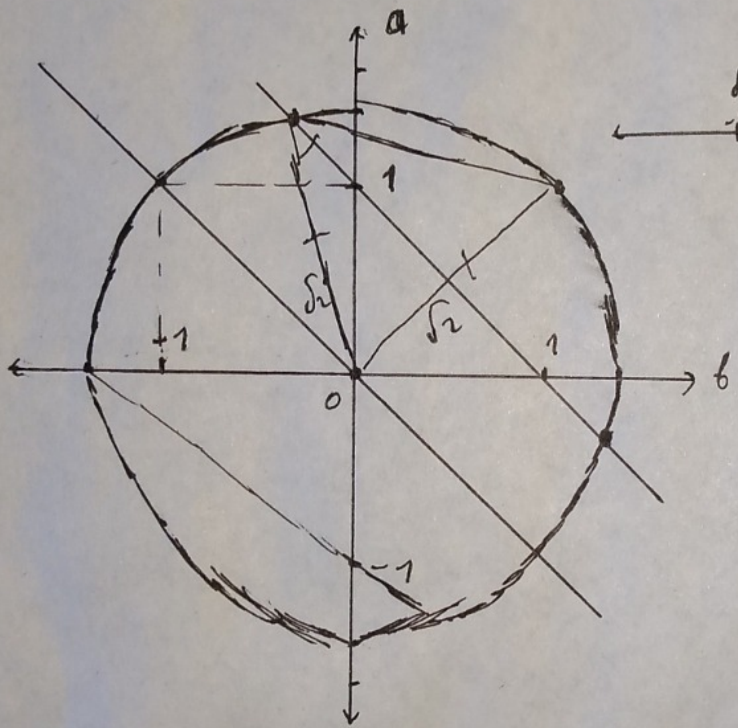
$a^2 + b^2 \le \cancel{2}\, 2 \cdot \min(a+b; 1)$



$a < 0$; $b < 0$

$(\sqrt{2}; 0)$ $\sqrt{2}$;





$a = \cancel{\sqrt{3}}\ 1$

$b = 1$

$a^2 + b^2 \le 2$

$a \le \sqrt{2}$

$b \le \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cancel{\sqrt{3}}$ $\frac{2}{2}$

$\cancel{2}a + \cancel{2}b = 0$ $\cancel{2}a = -b$

$a^2 + b^2 \le 2a + 2b \Rightarrow$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \le 2$

$a^2 + b^2 \le 2$

$\cancel{2}(a+b) \le \cancel{2}\ 1 \Rightarrow a \le 1 - b$

Чистовик (1) Вариант 17 Часть 1

№1 ~~$S = a_1$~~

$a_1 = b;\ d > 0$ ~~$S_{10} = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot 10 = 5a_1$~~

$a_1 \in Z$

$d \in Z$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2b + 9d}{2} \cdot 10 = 10b + 45d$$

$a_6 = b + 5d$ $\quad a_7 = b + 6d$

$a_{12} = b + 11d$ $\quad a_{11} = b + 10d$

$$\begin{cases} b^2 + 16bd + 55d^2 > 10b + 45d + 1 \\ b^2 + 16bd + 60d^2 < 10b + 45d + 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \{\ a_6 \cdot a_{12} < a_7 \cdot a_{11} \quad a_7 \cdot a_{11} - a_6 \cdot a_{12} = 5d^2$

$$\begin{cases} 10b + 45d + 1 - b^2 - 16bd - 55d^2 < 0 \\ 10b + 45d + 1 - b^2 - 16bd - 55d^2 > 5d^2 - 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5d^2 - 16 < 10b + 45d + 1 - b^2 - 16bd - 55d^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5d^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$\frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$\frac{16}{5} < 4$

$3\frac{1}{5} < 4$

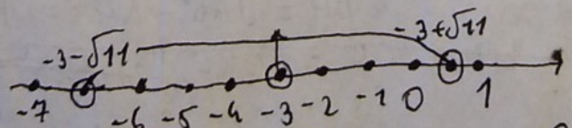
$\Leftrightarrow \begin{array}{l|} d < 2 \\ d > 0 \\ d \in Z \end{array} \Rightarrow d = 1$

$$\begin{cases} b^2 + 16b + 55 > 10b + 45 + 1 \\ b^2 + 16b + 60 < 10b + 45 + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 6b + 9 > 0 \\ b^2 + 6b - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq -3 \\ -3 - \sqrt{11} < b < -3 + \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \quad D_1 = 9 + 2$$

$b_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$3 < \sqrt{11} < 4$

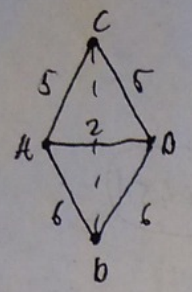


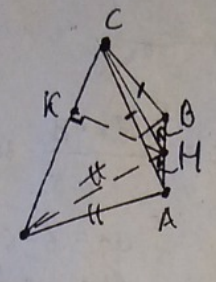
Т.к. $b \in Z$: Ответ: $\boxed{b \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}}$

21104591 (U88583 M1300537)

№2

Чистовик (2) Вариант 17 Часть 1





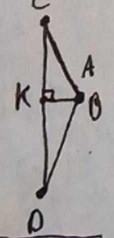
ABCD – тетраэдр;
$AB=2$; $BC=AC=5$
$AD=BD=6$
ABCD – вписан в цилиндр

1| Проведём высоты в $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ к стороне AB, т.к. они равнобедренные, то это ещё и биссектриса и медиана ⇒ обе высоты попадут в точку H (середина AB) ⇒ $AB \perp CH$, $AB \perp DH$, $CH \cap DH = H$ ⇒ $(CDH) \perp AB$ ⇒ $CD \perp AB$ ⇒ AB ∥ плоскости основания цилиндра

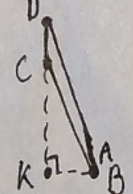
~~2| Предположим, что CD – меньшая сторона тетраэдра ⇒ $CD \le 2$.~~

2| Т.к. ~~нам необходимо найти~~ R_{min} ⇒ AB – диаметр (по 1му пункту AB ∥ плоск. основания цилиндра) ⇒ т.к. {AB – мин. сторона, AB ⊥ оси цилиндра}

⇒ $R_{min} = 1$ $\left(\frac{1}{2}\cdot AB\right)$, рассмотрим 2 возможных случая положения тетраэдра в плоскости перпендикулярной AB:

1| 

$BK=1$

2| 

$BK=1$

3| ~~$CH = \sqrt{1+25} = \sqrt{}$~~ $CH =$ ~~$\sqrt{AB^2-BH^2} = 2\sqrt6$~~ $\sqrt{AC^2-AH^2} = 2\sqrt6 = \sqrt{24}$

$DH = \sqrt{AD^2-AH^2} = \sqrt{35}$

4| ~~Проведём $HK \perp CD$: $CK = \sqrt{CH^2-1} = \sqrt{CH^2-KH^2}$~~

CD ∥ оси цилиндра; $KH \perp CD$;

Проведём $HK \perp CD$: $HK = R_{min} = 1$, т.к. ~~CD образующая~~, H – середина диаметра ⇒ H лежит на оси цилиндра. ⇒

⇒ $KH = R_{min} = 1$ ⇒ $CK = \sqrt{CH^2-KH^2} = \sqrt{23}$; $DK = \sqrt{DH^2-KH^2} = \sqrt{34}$

В 1м случае $CD = CK + DK = \sqrt{23}+\sqrt{34}$, во 2м случае $CD = DK - CK = \sqrt{34}-\sqrt{23}$

Ответ: $\boxed{\sqrt{34}+\sqrt{23};\ \sqrt{34}-\sqrt{23}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

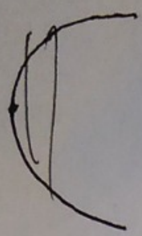
Шифр: **21104591**

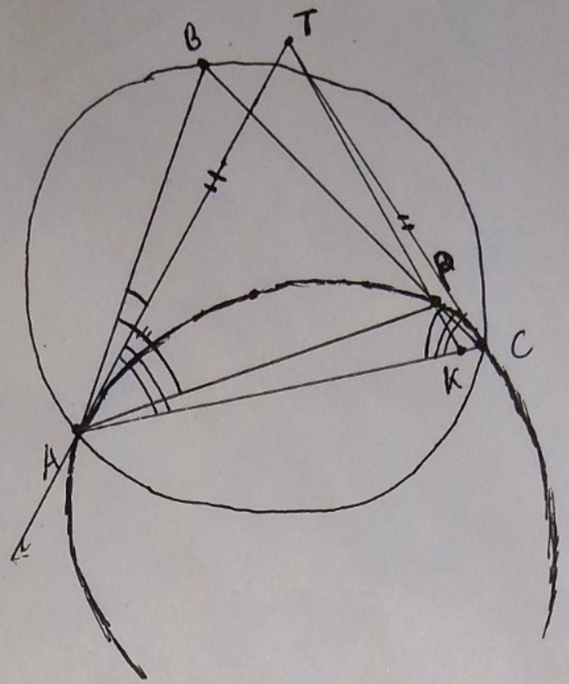
ID профиля: **88583**

Вариант 17

Черновик ③
~~Чистовик~~ ⑤ Вариант 17 Часть 2

№ 6





$2^1 3^2$

$2^2 3^2$

Черновик (2) Вариант 17 Часть 2

$\frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{4^2} = 4 \cdot 8$ $\frac{6 \cdot 4 \cdot 8}{2} =$ $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ $\frac{НОД(НОД(ab);c) \cdot a \cdot b \cdot c}{НОД(ab) \cdot НОДt}$

$НОД(a;b;c) = НОД(НОД(a;b);c)$

$\frac{a \cdot b}{НОД(a;b)} = НОК(a;b)$

$a^n b^m$
$a^k b^x$
$a^7 b^2$

$a^t b^\gamma$

$\left(\frac{a^{n+k} b^{x+m}}{a^t + b^\gamma}\right)$

21104591 (U88583 M1300538)

/4

Чистовик ⑥ Вариант 17 Часть 2

$$\cancel{\begin{cases} a = 2^1 \cdot 3^{16-1-m} \\ b = 3^1 \cdot 2^{15-1-n} \\ c = 2^n \cdot 3^m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^1 \cdot 3^{15-m} \\ b = 2^{14-n} \cdot 3^1 \\ c = 2^n \cdot 3^m \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} 1 \le n \le 13 \\ 1 \le m \le 14 \\ n, m \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

$$\cancel{НОК = \frac{abc}{НОД} \Rightarrow abc = 2^{16} \cdot 2^{?} 3^{17} \Rightarrow}$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} a = 2^n \cdot 3^m \\ b = 2^1 \cdot 3 \\ c = 2 \cdot 3^1 \end{cases}}$$

$\cancel{max(x;y) =}$

$$\cancel{\begin{cases} a = 2^1 \cdot 3^n \\ b = 2^x \cdot 3^1 \\ c = 2^y \cdot 3^m \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 2^1 \cdot 3^n \\ b = 2^x \cdot 3^1 \\ c = 2^y \cdot 3^m \end{cases} \\ max(n, m) = 16 \\ max(x, y) = 15 \end{cases}$$

1) Пусть $n = 16$ и $x = 15$, тогда:

~~$y \ne$ нельзя, чтобы $y = 15$ и $m = 1$~~

$$\begin{cases} a = 2^1 \cdot 3^{16} \\ b = 2^{15} \cdot 3^1 \\ c = 2^y \cdot 3^m \end{cases}$$

$y \in \{1; ...; 15\}$ $m \in \{1; ...; 16\}$

но при $y = 1$ и $m = 16$

или $y = 15$ и $m = 16$

~~пересекаются~~ 2 числа будут равные. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3! \cdot 15 \cdot 16 - 2 \cdot \left(3! - \frac{3!}{2!}\right) =$

$= 6 \cdot (15 \cdot 16 - 1)$

2) Пусть $n = 16$ и $y = 15$

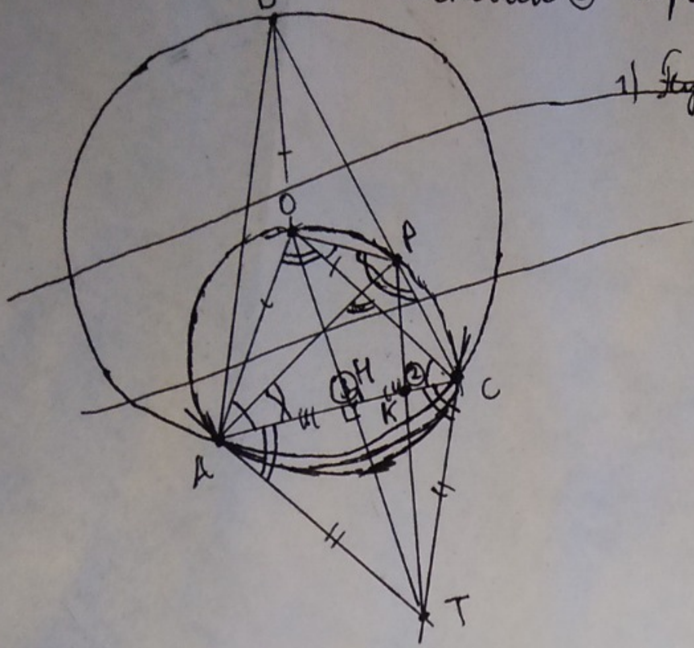
x уже был 15 $\Rightarrow x \in \{1; ...; 14\}$

$$\begin{cases} a = 2^1 \cdot 3^{16} \\ \end{cases}$$

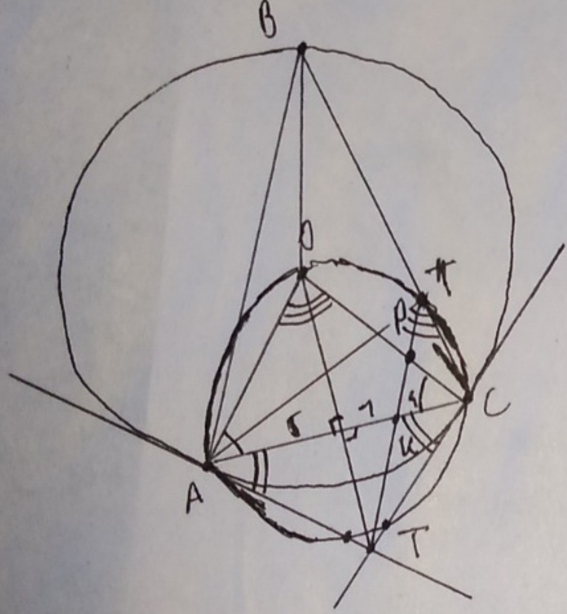
21104591 (U88583 M1300538)

Чистовик ⑤ Вариант 17 Часть 2

№6



1) ~~Пусть AT=TC - отрезки касательных~~
~~=) ΔATC - равнобедренный =) ∠A=∠C~~



21104591 (U88583 M1300538)

Чистовик (4) Вариант 17 часть 2

№5

$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Ограничения: $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 5x-1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-0{,}25 \\ x>0{,}2 \\ x>-4 \end{cases}$

~~$2a = b \quad c = a-1 = b-1$~~

~~$(\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2$~~

~~$a = 2$~~

При $x \in (0{,}2; 0{,}4)$ $a<0$, $b>0$, $c<0$ — для данных ограничений решим ур-е:

$2\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}+2\right)^{2\log_{5x-1}(4x+1)} = 5x-1$

№4

$\begin{cases} a = 2^x \cdot 3^k \\ b = 2^y \cdot 3^m \\ c = 2^z \cdot 3^n \end{cases}$

3 способа выбрать 1 среди x y z

3 способа выбрать 1 среди k m n

~~3 спо~~ 2 способа выбрать 15 среди ост. x y z

2 способа выбрать 16 среди ост. k m n

~~14~~ 15 способов выбрать знач для ост x y z

16 способов выбрать знач. для ост. ~~x y z~~ k m n

$3^2 \cdot 2^2 \cdot 15 \cdot 16$ Но будут пересечения, поэтому

$\begin{cases} a = 2^x \cdot 3^k \\ b = 2^2 \cdot 3^? \\ c = 2^2 \cdot 3^n \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2^? \cdot 3^k \\ b = 2^y \cdot 3^? \\ c = 2^2 \cdot 3^n \end{cases}$ — то же для $2^{15} \cdot 3^{16}$

~~15 · 16~~ 3 · ~~(16+15)~~ 1

$\frac{3!}{(3-2)!} = 6 \cdot ($

$3^2 \cdot 2^2 \cdot 15 \cdot 16 - 23 - 6 \cdot (2 \cdot 6 ($

21104591 (U88583 M1300538)