Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104590**

ID профиля: **380609**

Вариант 17

ЧИСТОВИК → ЛИСТ 1

№1

$a_1, a_2, a_3, \dots$; $a_i \in \mathbb{Z}$ $\quad d>0$

$$S=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=5(a_1+a_{10})=5(a_1+a_1+9d)=5(2a_1+9d)=10a_1+45d$$

1) $a_6 a_{12}=(a_1+5d)(a_1+11d)$

$a_7 a_{11}=(a_1+6d)(a_1+10d)$

2) • $a_6 a_{12}>S+1$

$a_1^2+11a_1d+5a_1d+55d^2>S+1$

$a_1^2+16a_1d+55d^2>10a_1+45d+1$

• $a_7 a_{11}<S+17$

$a_1^2+10a_1d+6a_1d+60d^2<S+17$

$a_1^2+16a_1d+60d^2<10a_1+45d+17$

$-a_1^2-16a_1d-60d^2>-10a_1-45d-17$

3) получаем:

$$+\begin{cases}a_1^2+16a_1d+55d^2>10a_1+45d+1\\-a_1^2-16a_1d-60d^2>-10a_1-45d-17\end{cases}$$

$-5d^2>-16$

$5d^2<16$

$d^2<\frac{16}{5}$; $d^2<3{,}2$

4) т.к. $a_1, a_2, \dots$ – целые, то d – целое, но т.к. $d>0 \Rightarrow$ d – натуральное

$d=1 \Rightarrow d^2<3{,}2$ +

$d=2 \Rightarrow d^2>3{,}2$ −

$\Rightarrow d=1$ – ед. значение

5) тогда подставляя $d=1$, получаем:

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1+55>10a_1+45+1\\a_1^2+16a_1+60<10a_1+45+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0\\a_1^2+6a_1-2<0\end{cases}$$

① $(a_1+3)^2>0$

$\Rightarrow a_1\neq -3$

② $\frac{D}{4}=9+2=11$

$a=-3\pm\sqrt{11}$

+ -7 $\quad -6$ $\quad$ − $\quad 0$ $\quad$ + 1

$-3-\sqrt{11}$ $\qquad -3+\sqrt{11}$ $\quad a$

$\Rightarrow a_1=-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$

ЧИСТОВИК → ЛИСТ 2

~~б) a_1 – целое. $\Rightarrow a_1 = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$~~

~~Ответ: $a_1 = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$~~

б) получаем

$a_1 = -6, -5, -4, -2, -1, 0$

т.к. $d = 1$, то прогрессия $\uparrow$ и все её члены целые $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при каждом таком знач. a искомая прогрессия существует.

Ответ: $a_1 = -6, -5, -4, -2, -1, 0$

№3 ЧИСТОВИК → ЛИСТ 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

1) 1 нер-во представляет собой круг радиусом $r=2$, центр которого $(a;b)$

2) рассмотрим 2-ое нер-во:

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b,2)$

① $2a+2b<2$

$a+b<1$

$b<-a+1$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$a^2-2a+b^2-2b \le 0$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

круг центр $(1;1)$ $r=\sqrt{2}$ (Ω_1)

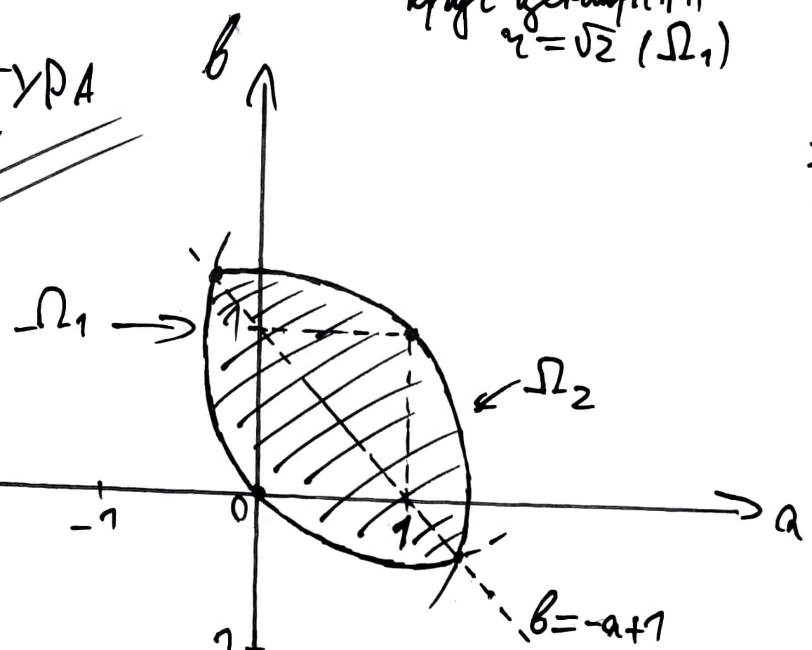
② $2a+2b \ge 2$

$a+b \ge 1 \to b \ge -a+1$

$a^2+b^2 \le 2$

круг центр $(0;0)$ $r=\sqrt{2}$ (Ω_2)

ФИГУРА N



тогда 2-ое нер-во системы задаёт область пространства, огранич. окружностями Ω_2 и Ω_1

• Д-ем, что Ω_2 и Ω_1 перес. на прямой $b=-a+1$

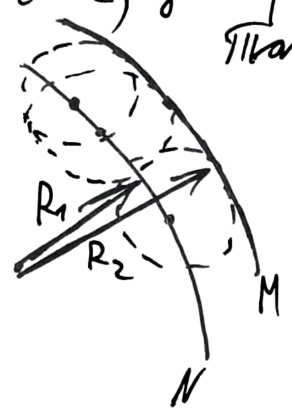
$$\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2=2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-a+1-1)^2+(a-1)^2=2 \\ a^2+(-a+1)^2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+(a-1)^2=2 \\ a^2+(a-1)^2=2 \end{cases}$$

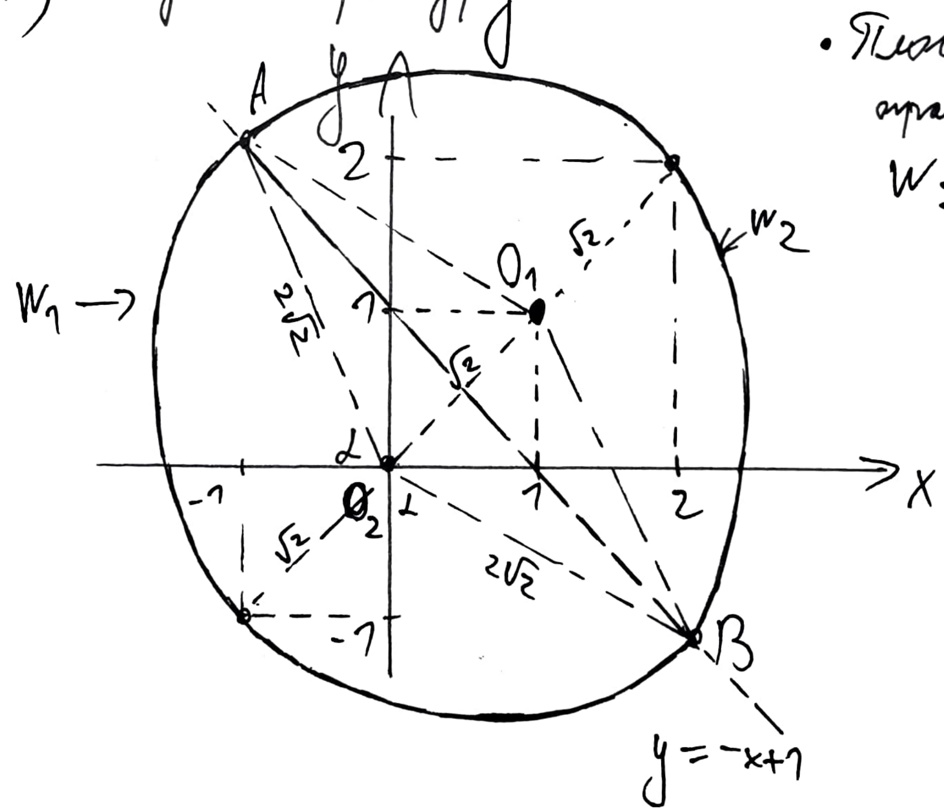
т.е. Ω_1 и Ω_2 перес. по прямой $b=-a+1$

3) тогда возможные значения $(a; b)$ изображены на плоскости в предыд. пункте. Но каждая пара $(a; b)$ задаёт центр круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ на плоскости Xy. Т. е. из каждой возможной пары (a, b) нужно построить круг $r=2$, тогда мы получим фигуру M. В таком случае внешняя граница фигуры M будет опред. границей множества окружностей $r=2$, центр которых лежит на границе фигуры N.



Такие окружности „сдвинут" внешнюю границу N на $r=\sqrt{2}$. Тогда мы получим фигуру M, которая представляет собой область плоскости, огранич. окр. w_1 и w_2, где w_1 – окр., получаемая из Ω_1 увелич. радиуса на $\sqrt{2}$; w_2 – окр., получаемая из Ω_2 путём увелич. радиуса на $\sqrt{2}$

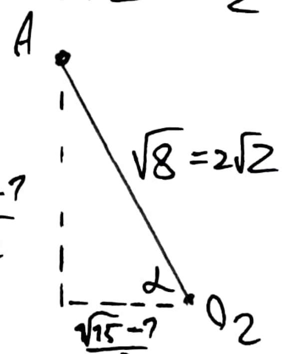
4) Получаем фигуру M:



• Площадь фигуры S_1, огранич w_2 и $y=-x+1$

W_2 пересек $y=-x+1$:

$$x^2+y^2=8 \quad (r=2\sqrt{2})$$
$$x^2+(1-x)^2=8$$
$$x^2+1-2x+x^2=8$$
$$2x^2-2x-7=0$$
$$\frac{D}{4}=1+14=15$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}$$



$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}-1}{2}:2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{15}-1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}-1}{4\sqrt{2}}$$

$$\angle AO_2B=360-90-2\alpha=270-2\alpha$$

$$S_{\text{сект } AB}=\pi\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\angle AO_2B}{360^\circ}=\frac{8\pi\angle AO_2B}{\cancel{360^\circ}_{45}}=\frac{(270-2\alpha)\pi}{45}$$

ЧИСТОВИК → ЛИСТ 5

$S_1 = S_{\text{окр}\,AB} - S_{\Delta AO_2B}$, где $S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin\alpha =$

$= 4\sin\alpha \Rightarrow S_1 = \frac{(270-2\alpha)\pi}{45} - 4\sin\alpha$

• Площадь фигуры S_2, огранич. w_1 и $y=-x+1$ в силу сим-ии M отн-но $y=-x+1$ равна $S_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_M = 2S_1$

5) $S_M = \frac{2\pi(270-2\alpha)}{45} - 4\sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}-1}{4\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{8+\sqrt{15}}}{4}$

$S_M = \frac{4\pi(135-\alpha)}{45} - \sqrt{8+\sqrt{15}}$, где $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{15}-1}{4\sqrt{2}}\right)$

Ответ: $S_M = \frac{4\pi(135-\alpha)}{45} - \sqrt{8+\sqrt{15}}$, где $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{15}-1}{4\sqrt{2}}\right)$

ЧЕРНОВИК → ЛИСТ 1

$u^2 - 2v \le \min(2u; 2)$

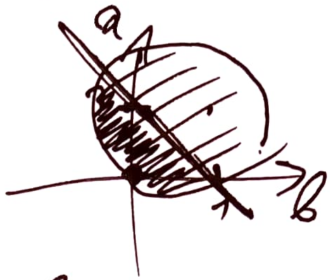
№3 1) $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

$a < -b+1$

• $2a+2b<2 \to a+b<1 \to$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$



• $2a+2b \ge 2 \to a > -b+1$

$a^2+b^2 \le 2$

$a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_1 + 2d$

$D = 36 + 8 = 44 = 4 \cdot 11$

$-(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3) = -2$

$360 \mid 8$, -32, 40, 45

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{15-1}{32}} = \sqrt{1 - \frac{\cancel{14}\,7}{\cancel{32}\,16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{15-2\sqrt{15}+1}{32}} = \sqrt{1 - \frac{16-2\sqrt{15}}{32}} = \sqrt{1 - \frac{8-\sqrt{15}}{16}} =$

$= \sqrt{\frac{16-8+\sqrt{15}}{16}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{15}}{16}} = \frac{\sqrt{8+\sqrt{15}}}{4}$

$\left|\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right| = \frac{\sqrt{15}-1}{2}$

$\frac{15+2\sqrt{15}+1}{32} + \frac{8+\sqrt{15}}{16} = \frac{16\cancel{+2\sqrt{15}} + \cancel{16}\cancel{+2\sqrt{15}}}{32} = 1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104590**

ID профиля: **380609**

Вариант 17

ЧИСТОВИК → ЛИСТ 1

№4

a, b, c — натур. числа

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = (a,b,c) = 6 = 2\cdot 3 \\ НОК(a,b,c) = [a,b,c] = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

1) Числа a, b, c содержат в себе только 2^n и 3^m:

$$\begin{cases} a = 2^{\alpha_a}\cdot 3^{\beta_a} \\ b = 2^{\alpha_b}\cdot 3^{\beta_b} \\ c = 2^{\alpha_c}\cdot 3^{\beta_c} \end{cases}$$

2) $(a,b,c) = 2^1\cdot 3^1 \Rightarrow$ хотя бы одно из чисел содержит 2^1 и хотя бы одно из чисел содержит 3^1, остальные числа $2^{\geq 1}$, $3^{\geq 1}$

3) $[a,b,c] = 2^{15}\cdot 3^{16} \Rightarrow$ хотя бы одно из чисел содержит 2^{15} и хотя бы одно из чисел содержит 3^{16}, остальные числа $2^{\leq 15}$, $3^{\leq 16}$

4) • Тогда из 3 чисел нужно выбрать одно, которое содержит 2^1, из оставшихся 2 чисел выбрать одно, содерж. $2^{15} \Rightarrow$ для третьего числа останется 2^p, где $p = 1, 2, \dots 15 \Rightarrow 3\cdot 2\cdot 15 = 90$

• Аналогично со степенью 3: $3\cdot 2\cdot 16 = 96$

5) Тогда всего вариантов: $90\cdot 96 = 8640$

Ответ: 8640 вариантов

Чистовик ⇒ Лист 2

№5

Пусть

$$\begin{cases} a=\sqrt{5x-1} & a>0,\ a\neq 1 \\ b=4x+1 & b>0,\ b\neq 1 \\ c=\frac{x}{2}+2 & c>0,\ c\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+1>0,\ 4x+1\neq 1 \\ 5x-1>0,\ 5x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0,\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{matrix}}$$

Тогда: $\underbrace{\log_a b}_{x}$, $\log_b c^2 = \underbrace{2\log_b c}_{y}$, $\log_c a^2 = 2\underbrace{\log_c a}_{z}$

1) Заметим, что $xyz=4$

2) Тогда если какие-то 2 числа равны друг другу и равны p, то 3 число $= p-1$

$p^2(p-1)=4$

$p^3-p^2-4=0$ ↓

$\cancel{D=1+16=17 \Rightarrow p=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2};\ p-1=\frac{\pm\sqrt{17}-1}{2}}$

ЧИСТОВИК → ЛИСТ 3

$(p-2)(p^2+p+2)=0$

$D=1-8=-7<0$ нет решения

$p=2 \Rightarrow p-1=1$

3) (1) $m=1$

$\log_a b=1 \rightarrow b=a$

$\begin{cases} y=2\log_b c=2\log_a c \\ z=2\log_c a \end{cases}$

$y=z=2$

$\log_a c=\log_c a=1$

$a=c$

$\Downarrow$

$a=b=c$

$b=c$: $4x+1=\frac{x}{2}+2 \mid \cdot 2$

$8x+2=x+4$

$7x=2 \rightarrow x=\frac{2}{7} \rightarrow b=\frac{8}{7}+1=\frac{15}{7}$, $c=\frac{15}{7}$

$a=\sqrt{5\cdot\frac{2}{7}-1}=\sqrt{\frac{10}{7}-1}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\quad a\neq b \Rightarrow$ не подходит (X)

~~$y=z \Rightarrow \log_a c=\log_c a$~~

~~$\log_a c=\frac{1}{\log_a c}$~~

~~$\log_a^2 c=1$~~

~~$\log_a c=1$ $\quad \log_a c=-1$~~

~~$c=a$ $\quad c=\frac{1}{a}$~~

~~$a=b=c$ не подходит~~

(2) $y=1$

$2\log_b c=1$

$\log_b c=\frac{1}{2} \rightarrow c=\sqrt{b}$

$m=\log_a b=2 \rightarrow b=a^2$

$z=2\log_c a=2 \rightarrow \log_c a=1 \rightarrow a=c$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a=c \\ c=\sqrt{b} \\ b=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{b} \\ b=a^2 \end{cases}$ верно

$(5x-1)=4x+1$

$x=2>\frac{1}{5}$ (V)

$\neq\frac{2}{5}$

ЧИСТОВИК → ЛИСТ 4

(3) $z = 1$

$2\log_c a = 1 \to \log_c a = \frac{1}{2}$

$a = \sqrt{c}$

$m = \log_a b = 2 \to b = a^2$

$y = 2\log_b c = 2 \to \log_b c = 1 \to c = b$

$$\begin{cases} b = a^2 \\ c = b \\ a = \sqrt{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = c \\ a = \sqrt{c} \end{cases}$$ верно

$5x - 1 = \frac{x}{2} + 2 \quad |\cdot 2$

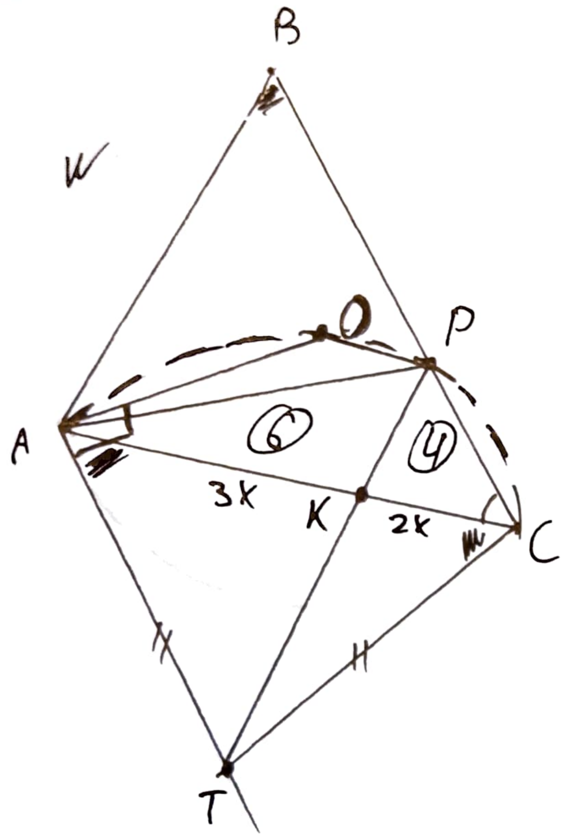
$10x - 2 = x + 4$

$9x = 6 \to \underline{x = \frac{2}{3}} > \frac{1}{5}, \neq \frac{2}{5}$ (V)

Ответ: $x = 2$; $x = \frac{2}{3}$

Чистовик → лист 5

№6



$S_{APK}=6$, $S_{CPK}=4$

а) S_{ABC} — ?

1) $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{AK}{KC}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

(имеют общую высоту)

2) $\angle ABC=\angle CAT=\angle ACT$

(угол между кас. и хордой)

$AT=CT$ (кас. из одной точки)

3) $AOPC$ — вписк.

4) $OA\perp AT$ (как R в точку кас.)

ЧЕРНОВИК → ЛИСТ 1

№1

$a = 2^{\alpha_a} 3^{\beta_a}$

$b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b}$

5
$\times 96$
90
8640

2 10

20 30

$2 \cdot 5$ $2 \cdot 3 \cdot 5$

№2 $a = \sqrt{5x-7}$, $b = 4x+1$, $c = \frac{x}{2}+2$;

$\log_a b$, $\log_b c^2$, $\log_c a$

$\overset{x}{\log_a b}$, $2\overset{y}{\log_b c}$, $\overset{z}{\log_c a}$

$\log_b \frac{b}{8}$

$x = y$

$x - z = 1$

1) $2\log_a b \cdot \log_b c = 2\log_c a$

$z = \frac{xy}{2}$

$xy = 2z$

$xy = 2z$

$yz = \frac{2}{x}$ $\Rightarrow xyz = 2$

$xyz = 4$

$4yz = \frac{1}{x}$

$1 = 4xyz$

$yz = \frac{4}{x}$

$4 = xyz$

$p - 1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} - 2$

$\log_{\sqrt{5x-7}}(4x+1) = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$\log_a b = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$\log_b c = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

$b = a^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$

$\frac{2}{1+\sqrt{17}} \log_a c = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

$p - 1 = \frac{1+\sqrt{17}-2}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$\frac{\sqrt{17}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{17-1}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$\frac{1}{7}$

ЧЕРНОВИК → ЛИСТ 2

№5 Пусть:

$$\begin{cases} a=\sqrt{5x-1} & a>0, a\neq 1 \\ b=4x+1 & b>0, b\neq 1 \\ c=\frac{x}{2}+2 & c>0, c\neq 1 \end{cases}$$

Тогда: $\underbrace{\log_a b}_{x}$, $\log_b c^2 = 2\underbrace{\log_b c}_{y}$, $\log_c a^2 = 2\underbrace{\log_c a}_{z}$

1) Заметим, что: $\begin{cases} xy = 2z \\ xyz = 2 \end{cases}$

$2z^2 = 2 \to z^2 = 1 \to z = \pm 1$

2) ① $z=1$

$xy = 2$

• если $x=y$, то $x^2=y^2=2$ ⊗

тогда $|x-z| = |\sqrt{2}-1| \neq 1$

• если $x=z=1$, $y=2$

$y>x \Rightarrow$ ⊗

• если $y=z=1$, $x=2$

$x>y \Rightarrow$ ⊗

② $z=-1$

$xy=-2$

• если $x=y$, то $x^2=y^2=\underset{<0}{-2}$ ⊗

• если $x=z=-1$, то

$y=$

~~$4x+1>0$~~

~~$5x-1>0$~~

$$\begin{cases} 4x+1>0, 4x+1\neq 1 \\ 5x-1>0, 5x-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0, \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$$

~~$x>-\frac{1}{4}$, $x\neq 0$~~

$x>\frac{1}{5}$, $x\neq\frac{2}{5}$

~~$x>-4$~~

$\log_{\frac{x}{2}+2}$

$\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2 =$

$= \log_{\frac{x}{5}}(4)$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2} \simeq \frac{3}{2}$$

ЧЕРНОВИК → ЛИСТ 3

$y>0$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\uparrow$

$5x-1 \vee \frac{x}{2}+2$

$5x \vee \frac{x}{2}+3$

$\log_a b>0 \Longleftrightarrow \log_c a>0$

$(a-1)(b-1)>0$ $\qquad (c-1)(a-1)>0$

$a-1>0$ $\qquad a>1$

$5 \times 96 \cdot 9 = 864$

$\log_a b = 2\log_b bc$

$\frac{1}{\log_b a}=2\log_b c$

$\frac{1-2\log_b c\log_b a}{\log_b a}=0$

$\log_b c\log_b a=\frac{1}{2}$

$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ $\qquad \frac{2}{1+\sqrt{17}}$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{4x+1}(5x-1)=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{10}{7}-1}$

$p^3-p^2-4=0$ $\qquad 8-4-4=0$

$p=2$

	1	$\cancel{-1}$	0	-4
2	1	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	0

$(p-2)(p^2+p+2)=$

$=p^3+p^2+\cancel{2p}-2p^2-\cancel{4p}-4$

$\log_a b=1$

$b=a$

$4x$

$\frac{2^{15}}{7}=\frac{10}{35}$ $\qquad \frac{7}{35}$