Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104588**

ID профиля: **208374**

Вариант 17

Чистовик

№1

Поскольку прогрессия возрастающая => b - разность прогрессии; $b>0; a_1, b \in Z$ (возрастающая прогрессия целых чисел)

Тогда $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1+a_1+9b) = 10a_1 + 45b$

Известно, что:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5b)(a_1+11b) > 10a_1+45b+1 \\ (a_1+6b)(a_1+10b) < 10a_1+45b+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+16a_1b+55b^2 > 10a_1+45b+1 \\ a_1^2+16a_1b+60b^2 < 10a_1+45b+17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+55b^2+16a_1b-10a_1-45b-1>0 \\ a_1^2+55b^2+16a_1b-10a_1-45b-1 < -5b^2+16 \end{cases} \Rightarrow -5b^2+16>0$$

$b^2 < \frac{16}{5}$

$b^2 < 3{,}2$

$b^2 - 3{,}2 < 0$

$(b-\sqrt{3{,}2})(b+\sqrt{3{,}2})<0$

$b \in (-\sqrt{3{,}2}; \sqrt{3{,}2})$

$1 < \sqrt{3{,}2} < 2$

Поскольку $b>0$, $b \in Z$, то $b^2<3{,}2$ имеет только одно решение: $b=1$

Тогда наша система имеет вид:

$$\begin{cases} a_1^2+55+16a_1-10a_1-45-1>0 \\ a_1^2+60+16a_1-10a_1-45-17<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 & (1) \\ a_1^2+6a_1-2<0 & (2) \end{cases}$$

1) $a_1^2+6a_1+9>0$

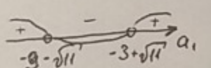
$(a_1+3)^2>0$

$a_1 \in R \setminus \{-3\}$

2) $a_1^2+6a_1-2<0$

$D/4 = 9+2 = 11$

$a_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{1}$



$-3-\sqrt{11} < a < -3+\sqrt{11}$

$3^2=9$
$4^2=16$ $\Rightarrow 3<\sqrt{11}<4 \Rightarrow -7<-3-\sqrt{11}<-6$
$0<-3+\sqrt{11}<1$ $\Rightarrow$ Поскольку $a_1 \in Z$, то решением будет:

$a_1 \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$

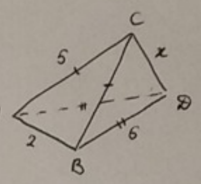
из (1) и (2) следует, что $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $-6, -5, -4, -2, -1, 0$

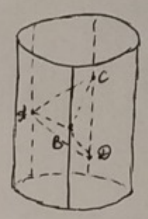
Чистовик

№2

Рассмотрим $ABCD$, вписанный в цилиндр. Точки A, B - равноудалены от C, D. Значит A и B будут лежать на окружности, плоскость которой будет перпендикулярна CD:

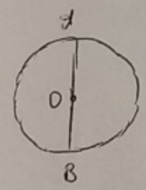


$\triangle ACD = \triangle BCD$ ($AC=BC$, $AD=BD$; CD-общая) $\Rightarrow$ Если AH - высота к CD, то BH - высота в $\triangle BCD$ (поскольку опираются на один отрезок CD), причем $AH=BH$ (из равенства $\triangle$)



Тогда мы можем в цилиндре провести окружность через A, B параллельную основаниям цилиндра. $\Rightarrow$ равную этим основаниям (назовем ее окр$(O;R)$)

Поскольку выбрали тетраэдр, для которого радиус цилиндра наименьший, то A, B в окр$(O;R)$ должны составлять диаметр этой окружности



Тогда $AB = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 1$. Если AB не диаметр, то по теор. косинусов

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha$$
$$4 = 2R^2(1-\cos\alpha)$$
$$R^2 = \frac{2}{1-\cos\alpha}$$
$$R = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} \Rightarrow 0 \le 1-\cos\alpha \le 2$$
$$1 \le \frac{2}{1-\cos\alpha}$$
$$1 \le R$$

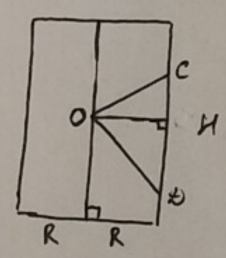
меньшее значение мы не получим

Рассмотрим плоскость сечения цилиндра плоскостью CDO:

CO - медиана $\triangle ABC \Rightarrow CO$ - высота $(AC=BC) \Rightarrow CO = \sqrt{BC^2-R^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt6$

DO - аналогично высота в $\triangle ABD \Rightarrow DO = \sqrt{DB^2-R^2} = \sqrt{35}$ $(OD > OC > OH)$

Пусть OH - высота $\triangle OCD \Rightarrow OH = R = 1$



Возможны 2 случая для точек C, D в данном случае:

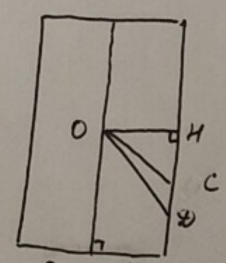
1) $CD = CH + HD$ ($\triangle OCD$ - остроугольный)
2) $CD = DH - CH$ ($\triangle OCD$ - тупоугольный)

$DH = \sqrt{DO^2-OH^2} = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$

$CH = \sqrt{CO^2-OH^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

Тогда $CD = \sqrt{34}+\sqrt{23}$ или $CD = \sqrt{34}-\sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34}+\sqrt{23}$ и $\sqrt{34}-\sqrt{23}$



2

Черновик

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 = \cancel{\frac{a_1+a_{10}}{5}} = \cancel{\frac{2a_1+9b}{5}}$$

$$= 5(2a_1+9b) = 10a_1+45b$$

$a_6 = a_1+5b$

$a_7 = a_1+6b$

$a_{11} = a_1+10b$

$a_{12} = a_1+11b$

$$\begin{cases} (a_1+5b)(a_1+11b) > \cancel{\frac{2a_1+9b}{5}}+1 \\ (a_1+6b)(a_1+10b) < \cancel{\frac{2a_1+9b}{5}}+17 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2+16a_1b+55b^2 > \frac{2a_1+9b}{5}+1}$ $\cancel{a_1^2+16a_1b+60b^2 > \frac{2a_1+9b}{5}+17}$

$\cancel{5a_1^2+80a_1b+275b^2 > 2a_1+9b+5}$ $\cancel{5a_1^2+80a_1b+300b^2 > 2a_1+6b+85}$

$a_1^2+16a_1b+55b^2 > 10a_1+45b+1$ $\cancel{25b^2}$ $a_1^2+16a_1b+60b^2 > 10a_1+45b+17$

$$\begin{cases} a_1^2+55b^2+16a_1b-10a_1-45b-1>0 \\ a_1^2+60b^2+16a_1b-10a_1-45b-17<0 \end{cases}$$

$80b^2+16a_1b-\cancel{30b^2}$

$16b(5b+a_1)$

$a_1^2-25b^2+5b^2$

$(a_1-5b)(a_1-5b)$

$(a_1+5b)(a_1+11b)+5b^2-10a_1-45b-1$

$-10(a_1+5b)+5b+5b^2-1$

$a>0$

$a+5b^2-16>0$

$a_1^2+2a_1(8b-5)+55b^2-45b-1>0$

$\frac{D}{4} = 64b^2-80b+25-55b^2+45b+1 = 9b^2-35b+26 = \cancel{9b^2}$

$9(b-1)(b-\dots)$

$a_{1,2} = \frac{5-8b \pm \sqrt{D}}{1}$

$a_1(a_1-10) - 16b(a_1-10) \dots 45b$

$55b^2-45b-1$

$5b^2+5b-1$

$D = 25+20 = 45$

$b_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{45}}{10}$

$a_1^2+2a_1(8b-5)+60b^2-45b-17>0$

$\frac{D}{4} = 64b^2-80b+25-60b^2+45b+17$

$= 4b^2-35b+42$

$D = 1225-672$

35^2, $\times 35$, 175, 105, 1225, -672, 553

$42 \times 16 = 252$, 42, 672

$\cancel{b^2-17>0}$

$\cancel{b^2-17 \geq 0}$

$\cancel{b^2>17}$

$\cancel{b>4}$

$16-5b^2>0$

$b^2 < \frac{16}{5}$

$b^2 < 3,1$

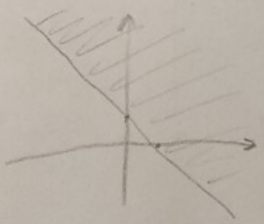
$b=1$

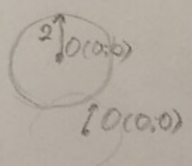
$a_1^2+55+16a_1-10a_1-45-1>0$

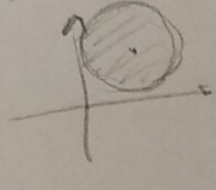
$a_1^2+6a_1+$

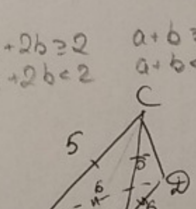
1 $2a+2b \geq 2$ $a+b \geq 1$

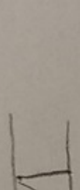
2 $2a+2b<2$ $a+b<1$

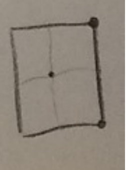












Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104588**

ID профиля: **208374**

Вариант 17

Чистовик

№4

Имеем систему:

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=6 & ① \\ НОК(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} & ② \end{cases}$$

1) Поскольку $НОД(a,b,c) = 6$, то числа a, b, c имеют вид $6x, 6y, 6z$, где x, y, z - не имеют общих множителей (то есть нельзя представить x, y, z как $x=kx'$; $y=ky'$; $z=kz'$)

2) Тогда поскольку $НОК(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16}$, то $НОК(x,y,z)=2^{15}\cdot 3^{16} : 6 = 2^{14}\cdot 3^{15}$

Распределим 2^{14} среди x, y, z. Мы знаем, что множитель 2 могут иметь максимум два числа. Пусть это будут x, y. Тогда чтобы $НОК(x,y,z)$ имел 2^{14} нужно, чтобы хотя бы одно из чисел уже имело 2^{14}, иначе НОК будет меньше. Пусть это будет x. Тогда, если $x=2^{l_1}$; $y=2^{l_2}$; $z=2^{l_3}$, будем иметь следующие (l_1,l_2,l_3): $(14,0,0),(14,1,0),(14,2,0).....(14,14,0)$ - 15 случаев

Аналогично распределим 3^{15} среди x, y, z. Если $x=3^{l_4}$; $y=3^{l_5}$; $z=3^{l_6}$, будем иметь следующие (l_4,l_5,l_6): $(15;0,0),(15,1,0),(15,2,0)...(15,15,0)$ - 16 случаев.

Рассмотрим пример для $(l_1,l_2,l_3)=(14,0,0)$ и $(l_4,l_5,l_6)=(15;0;0)$:

$$(a,b,c)=(6x,6y,6z)=(6\cdot 2^{l_1}\cdot 3^{l_4}, 6\cdot 2^{l_2}\cdot 3^{l_5}, 6\cdot 2^{l_3}\cdot 3^{l_6})=(6\cdot 2^{14}\cdot 3^{15}, 6, 6)=(2^{15}\cdot 3^{16}, 6, 6)$$

$$\begin{cases} НОД(2^{15}\cdot 3^{16}, 6, 6)=6 \\ НОК(2^{15}\cdot 3^{16}, 6, 6)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$ - верно

Тогда общее количество троек (l_1,l_2,l_3) равно $2\cdot 3 + 13\cdot 6 = 6+78 = \underline{84}$

(где $2+13=15$ случаев; 3 - количество перестановок где $l_2=l_3$ или $l_1=l_2$; 6 - перестановки где $l_1 \neq l_2 \neq l_3$)

Количество троек (l_4,l_5,l_6) равно $2\cdot 3 + 14\cdot 6 = 6+84 = \underline{90}$

(где $2+14=16$ случаев, 3 - где $l_4=l_5$ или $l_5=l_6$, 6 - где $l_4 \neq l_5 \neq l_6$)

Тогда общее количество (a,b,c) равно $84\cdot 90 = 7560$

Ответ: 7560 троек

Чистовик

№ 5

Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$.

Сделаем замену. Пусть $a=5x-1,\ b=4x+1;\ c=\frac{x}{2}+2$

Тогда имеем числа $\log_{\sqrt{a}} b$, $\log_b c^2$, $\log_c a$ с ограничениями $a,b,c>0$; $a,b,c\neq 1$

Ограничения

$$\begin{pmatrix} 5x-1>0 & 5x-1\neq 1 \\ x>\frac{1}{5} & x\neq\frac{2}{5} \\ 4x+1>0 & 4x+1\neq 1 \\ x>-\frac{1}{4} & x\neq 0 \\ \frac{x}{2}+2>0 & \frac{x}{2}+2\neq 1 \\ x>-4 & x\neq -2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x>\frac{1}{5};\ x\neq\frac{2}{5}$$

Преобразуем числа с условием ограничений: $2\log_a b,\ 2\log_b c,\ \log_c a$

~~Возможны 3 случая:~~

$\cancel{\text{I} \begin{cases}\log_a b=\log_b c\\ \log_a b-\log_c a=1\end{cases}}$ $\cancel{\text{II} \begin{cases}2\log_b c=\log_c a\\ 2\log_b c-2\log_a b=1\end{cases}}$ $\cancel{\text{III} \begin{cases}2\log_a b=\log_c a\\ 2\log_a b-2\log_b c=1\end{cases}}$

$\cancel{\text{I:} \begin{cases}\log_a b=\log_b c & (1)\\ \log_a b-\log_c a=1 & (2)\end{cases}}$

$\cancel{1)\ \log_a b-\log_b c=0}$

Приведем все к основанию a: $2\log_a b,\ \frac{2\log_a c}{\log_a b},\ \frac{1}{\log_a c}$

Пусть $y=\log_a b;\ z=\log_a c$

Тогда наши числа: $2y,\ \frac{2z}{y};\ \frac{1}{z}$

Возможны 3 случая

$$\text{I} \begin{cases} y=\frac{z}{y}\\ 2y-\frac{1}{z}=1\end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} \frac{2z}{y}=\frac{1}{z}\\ \frac{1}{z}-2y=1\end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} 2y=\frac{1}{z}\\ 2y-\frac{2z}{y}=1\end{cases}$$

$$\text{I:} \begin{cases} y=\frac{z}{y} & (1)\\ 2y-\frac{1}{z}=1 & (2)\end{cases}$$

1) $y=\frac{z}{y} \Rightarrow z=y^2$

2) $2y-\frac{1}{z}=1$

$2y-\frac{1}{y^2}=1$

$\frac{2y^3-y^2-1}{y^2}=0$

$\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{y^2}=0$

$\forall y:\ y^2+y+1>0$

$y=1;\ z=y^2=1$

$\begin{cases}\log_a b=1\\ \log_a c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b & (4)\\ a=c & (3)\end{cases}$

3) $a=c$

$5x-1=\frac{x}{2}+2$

$4{,}5x=3$

$x=\frac{2}{3}$

4) $a=b$

$5x-1=4x+1$

$x=2\neq\frac{2}{3}$

$\varnothing$

$$\text{II} \begin{cases} \frac{2z}{y}=\frac{1}{z} & (5)\\ \frac{1}{z}-2y=1 & (6)\end{cases}$$

5) $\frac{2z}{y}=\frac{1}{z}$

$y=2z^2$

6) $\frac{1}{z}-2y=1$

$\frac{1}{z}-4z^2=1$

$\frac{-4z^3-z+1}{z}=0$

$\frac{4z^3+z-1}{z}=0$

$\frac{4z^3-2z^2+2z^2+z-1}{z}=0$

$\frac{(2z-1)(2z^2+z+1)}{z}=0$

$\forall z:\ 2z^2+z+1>0$

$z=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2z^2=\frac{1}{2}$

$\begin{cases}\log_a b=\frac{1}{2} & (7)\\ \log_a c=\frac{1}{2} & (8)\end{cases}$

7) $b=\sqrt{a}$

$4x+1=\sqrt{5x-1}$

$16x^2+8x+1=5x-1$

$16x^2+3x+2=0$

$D=9-8\cdot 16<0 \Rightarrow \varnothing \Rightarrow \begin{cases}(7)\\(8)\end{cases}\ \varnothing$

$$\text{III} \begin{cases} 2y=\frac{1}{z} & (9)\\ 2y-\frac{2z}{y}=1 & (10)\end{cases}$$

9) $2y=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{2y}$

10) $2y-\frac{2z}{y}=1$

$2y-\frac{1}{y^2}=1$

$\frac{2y^3-y^2-1}{y^2}=0$

из I $\Rightarrow y=1 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$

$\begin{cases}\log_a b=1 & (11)\\ \log_a c=\frac{1}{2} & (12)\end{cases}$

11) $a=b$

$5x-1=4x+1$

$x=2$

12) $c=\sqrt{a}$

$\frac{x}{2}+2=\sqrt{5x-1}$

$x+4=2\sqrt{5x-1}$

$x^2+8x+16=20x-4$

$x^2-12x+20=0$

$D/4=36-20=16 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 4}{1} \Rightarrow x_1=10;\ x_2=2$

$x=2$

Ответ: $x=2$

2

Черновик

$НОД(a, b, c) = 6$

$НОК(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$\log_{\sqrt{3}}(3)$ $\log_3 3$ $\log_3 3$

2 1 2

$\log_{\sqrt{\frac{7}{3}}}\left(\frac{5}{3}\right)$ $\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{3}\right)$ $\log_{\frac{7}{3}} \frac{7}{3}$

1

a 6x
b 6y
c 6z

I x, y, z - взаимно просты
II x, y - взаимнопросты

$2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$6xyz = 2^{16} \cdot 3^{16}$

$xyz = 2^{14} \cdot 3^{15}$

$\log_{\sqrt{49}}(41)$ $\log_{41}(7)^2$ $\log_7(49)$

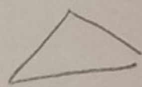
2

x y z x y z
0 14 0 15
1 13 1 14
... ...
14 14 7 8

a b c
6 $6 \cdot 2^{14} \cdot 3^{15}$ 6
$6 \cdot 2$ $6 \cdot 2^{13} \cdot 3^{15}$ 6

$16x^2 + 8x + 1$

$5x-1$

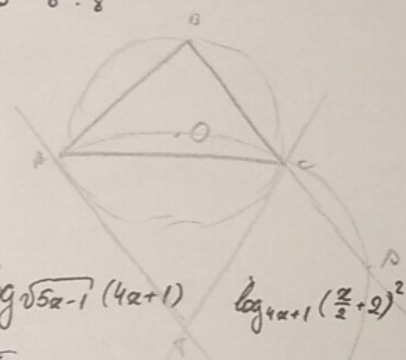


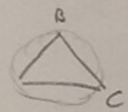
$16x^2+8x+1 > 5x-1$

$16x^2+3x+2>0$

$D<0$

3 · 8 · 8





$5x-1>0$

$4x+1>0$

$\frac{x}{2}+2>0$

$\boxed{x>\frac{1}{5}}$ $x>-\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 16 \\ \hline 270 \\ +45 \\ \hline 720 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 84 \\ \times 90 \\ \hline 7560 \end{array}$$

$401-1$

$4z^3 - 2z^2 + 2z^2 + z - 1$ $x>4$

$2z^2(2z-1) + (z+1)(2z-1)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$a, b, c > 0$

$a, b, c \neq 1$

$\log_a b \log_c b = \log_a b - \log_c a$

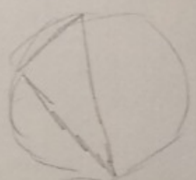
$\log_a b(\log_c b - 1) = -\log_c a$

$\frac{1}{\log_b a \log_b c} = \frac{1}{\log_b a} - \frac{\log_b a}{\log_b c}$

$5x-1=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$



$\log_{\sqrt{a}} b$ $\log_b c^2$ $\log_c a$

$2\log_a b$ $2\log_b c$ $\log_c a$

~~$\log_a b = \log_b c$~~

$2\log_a b$ $\frac{2\log_a c}{\log_a b}$ $\frac{1}{\log_a c}$

$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\frac{\lg^2 b - \lg c \lg a}{} = 0$

$\lg^2 b = \lg c \lg a$

$\frac{\lg^2 b}{\lg c \lg a} = 1$

$\frac{\lg b}{\lg a} - \frac{\lg c}{\lg b} = 0$

$\frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\lg c}{\lg b}$

$\log_2 x - \log_3 y = 0$

$(2-1)(3-1)(x-y)=0$

~~$x=y$~~

~~$x=1 \vee y=1$~~

$\frac{\log_a^2 b - \log_a c}{\log_a b} = 0$

$\frac{1}{\log_b a} = \log_b c$

$b \neq 1$

$1 - \log_b c \log_b a$ $\log_a^2 b = \log_a c$

$\log_2 x \cdot \log_3(x-1) = 0$

$(2-1)(3-1)(x-1)(x-2)=0$

~~$x=1 \vee x=2$~~

$2y$ $\frac{2z}{y}$ $\frac{1}{z}$

$2y = \frac{2z}{y}$ $y^2 = z$

$2y - \frac{2z}{y} = 1$ $2y - \frac{1}{y^2} = 1$ $\frac{2y^3 - y^2 - 1}{y^2} = 0$

$(y-1)(2y^2+y+1)=0$

$y \neq 0$ $y=1$

$\log_a b = 1$