Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

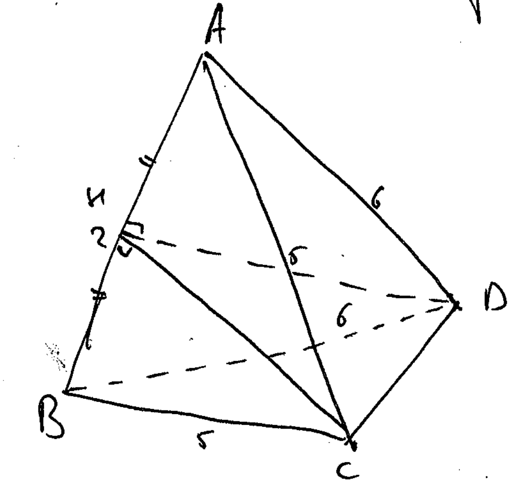
Шифр: **21104553**

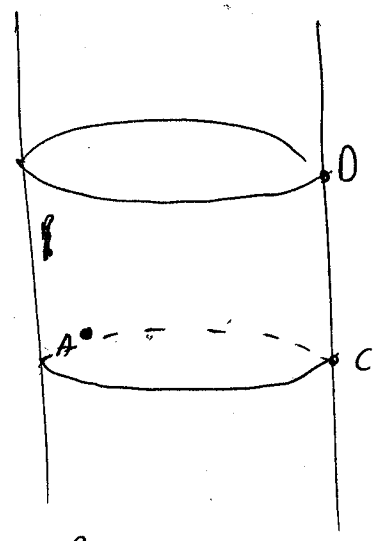
ID профиля: **193969**

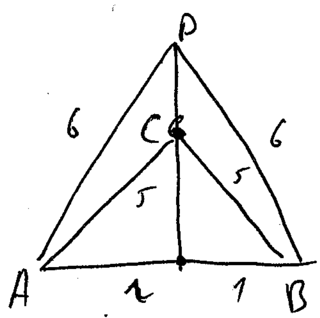
Вариант 17

~~черновик~~

ЧЕРНОВИК





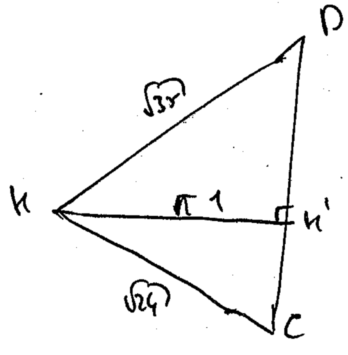


(KCD) — плоскость симметрии => A симметрично B относ. (KCD). $(KCD) \parallel \ell$, ℓ — ось цилиндра, т.к. $CD \parallel \ell_c$ => $AB \perp \ell$, => AB — какая-то хорда ℓ какой-то окружности — сечении цилиндра ∥ основанию.

Тогда $AB \le 2r$, => $r \ge \frac{AB}{2}$, => $r_{min} = \frac{AB}{2} = 1$. — когда AB — диаметр

=> K — центр той окр.

Рассмотрим теперь (KCD):



$KD = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$

$KC = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$

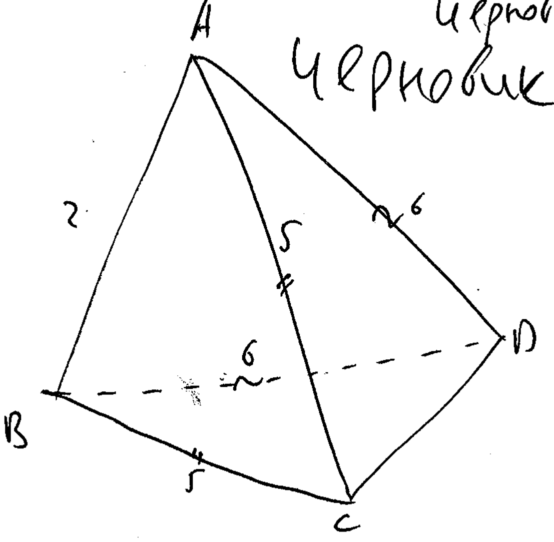
$PK' = \sqrt{34}$, $CK' = \sqrt{23}$ $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

$$\boxed{CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2} = -\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = -(2+\sqrt{3})$$

Черновик

Черновик $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2.$

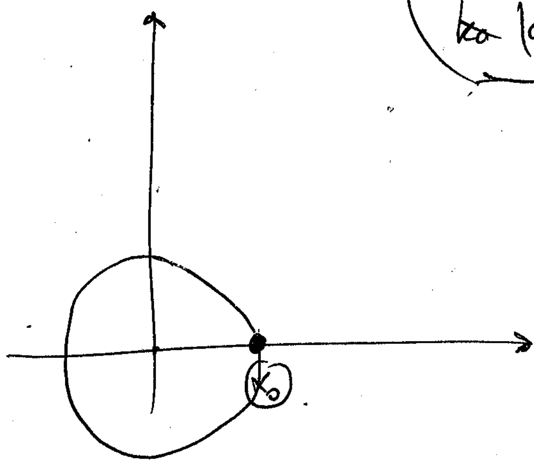


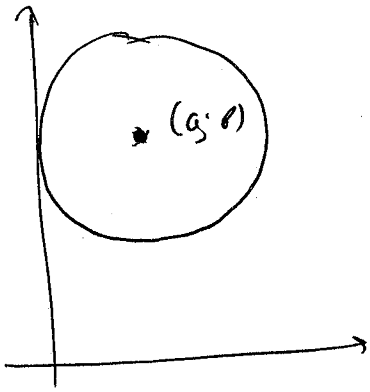
$a^2+b^2 \le \min(2(a+b), 2)$

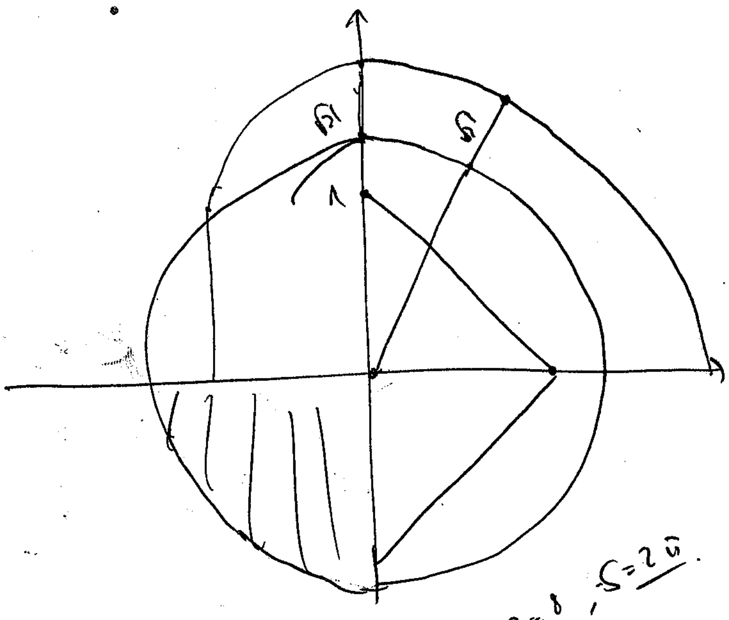
1) $a+b<1$

$a^2+b^2 \le 2$

$|a|,|b| \le \sqrt{2}$,







$\frac{\pi r^2}{4}$, $r=2\sqrt{2}$, $r^2=8$, $S=2\pi$.

$a^2+b^2 \le \min(2(a+b), 2)$

$a+b>0$,

$a^2+b^2 \le (a+b)\cdot 2$

$a=1-x$

$b=1-y$.

$(1-x)^2+(1-y)^2 \le (2-x-y)\cdot 2$

$x^2-\cancel{2x}+1+y^2-2y+1 \le 4-2x-2y$

$x^2+y^2 \le 2$. V.

$a,b>0$

Черновик

Черновик

$a_1, \quad a_1+b, \quad —, \quad a_1+9b.$

$(2a_1+9b)\cdot 5 = S$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5b)(a_1+11b) > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6b)(a_1+10b) < S+17$

$a_1^2+16a_1b+55b^2 > S+1$

$a_1^2+16a_1b+60b^2 < S+17$

$5b^2 < 16, \quad b^2 < 3{,}2 \Rightarrow b \in (-\sqrt{3{,}2}; \sqrt{3{,}2})$

$\sqrt{3{,}2} < \sqrt{4} < 2 \Rightarrow |b| < 2 \Rightarrow b = \{1; 0; -1\}$

1) $b=0$, ~~⇒ be const~~ ~~не м.д.~~, $S = 10a_1$

$a_1^2 > S+1 \qquad a_1^2 > 10a_1+1 \qquad a_1^2-10a_1-1>0$

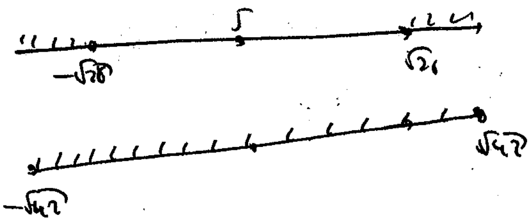
$a_1^2 < S+17 \qquad a_1^2 < 10a_1+17$

$D = 100+4 = 104$

$a_1 \in \cancel{10\pm}\ \frac{10-2\sqrt{26}}{2}, \frac{10+2\sqrt{26}}{2}$

$a_1 \in 5-\sqrt{26}; 5+\sqrt{26}$

$D=168, \quad a_1 \in \frac{10\pm\sqrt{168}}{2} = 5\pm\sqrt{42}.$



$a_1 \in (5-\sqrt{42}; 5-\sqrt{26}) \cup (5+\sqrt{26}; 5+\sqrt{42}).$

$a_1 = \{6; 6\}$

2) $b=-1$, $\quad S = (2a_1-9)\cdot 5 = 10a_1-45$

$a_1^2-16a_1+55 > 10a_1-45, \quad a_1^2-26a_1+100>0$

$D = 26^2-400 = 276 = 69\cdot 4$

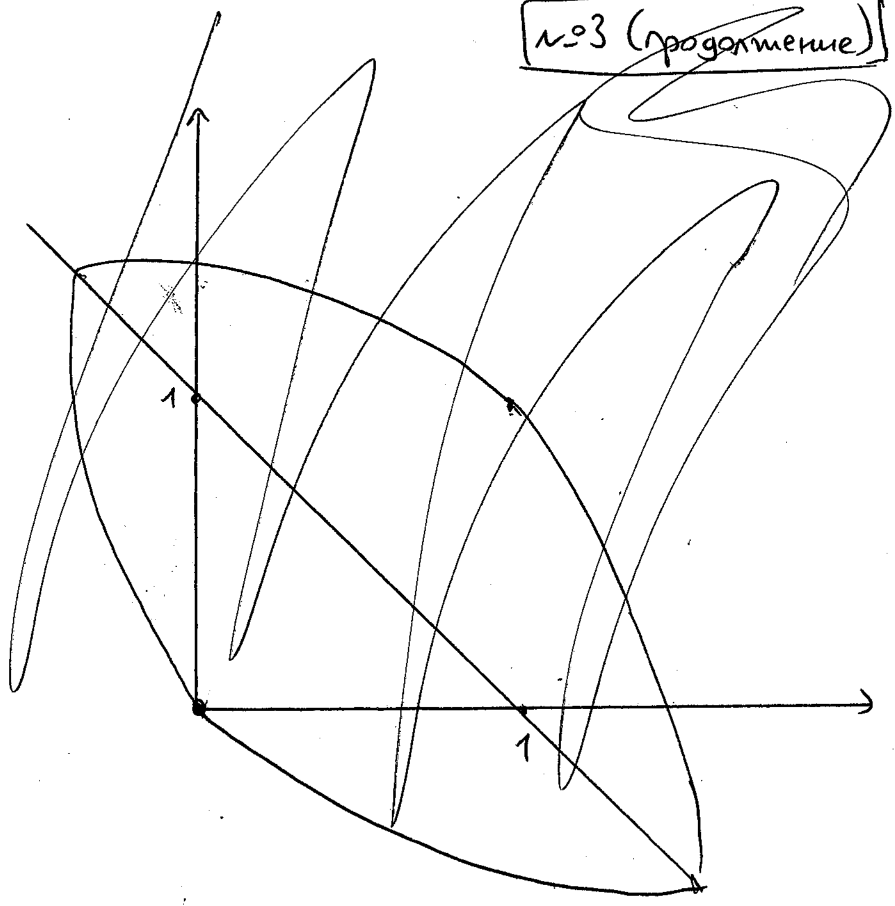
26×26: 156, 52, 676

$a_1 \in 13-\sqrt{69}; 13+\sqrt{69}.$

~~Чистовик~~

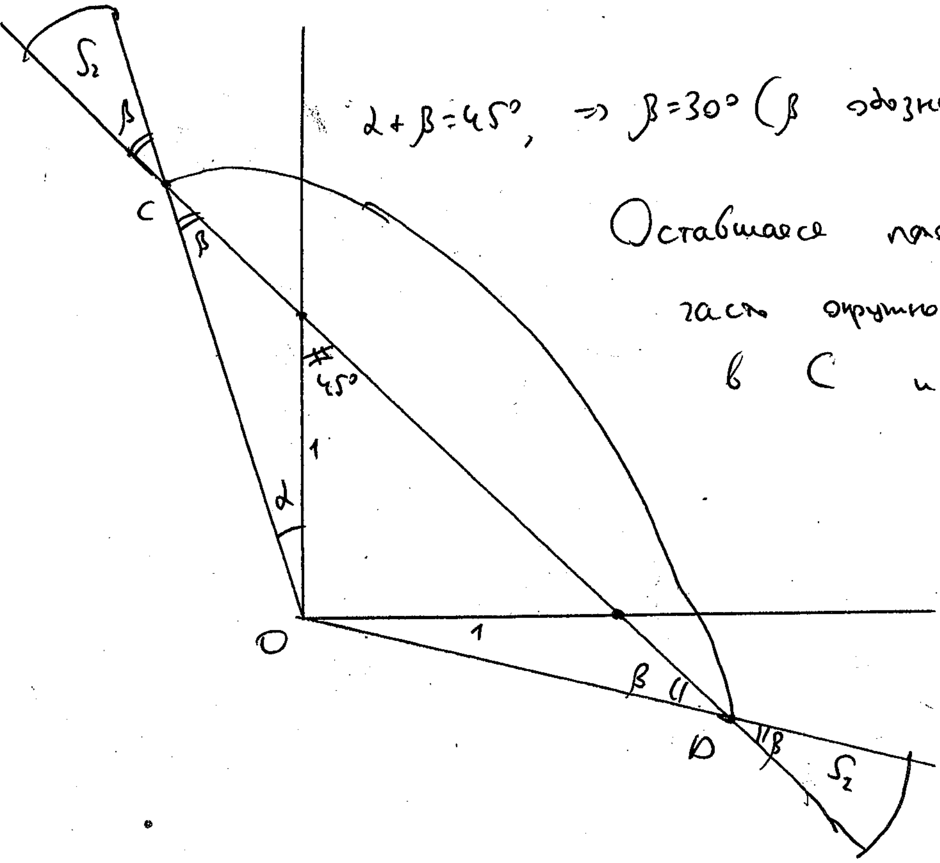
$\boxed{№3 \text{ (продолжение)}}$

Черновик



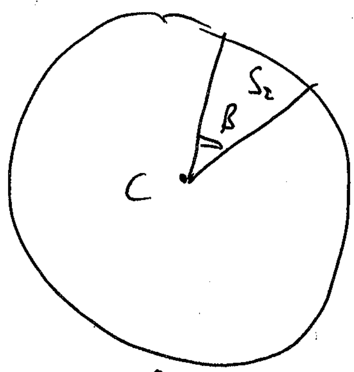
Чистовик   №3 (продолжение)

Осталось посчитать часть площади M, находящейся между прямой $a+b=1$ и углом COD:



$\alpha+\beta=45°$, $\Rightarrow \beta=30°$ (β обозначен на картинке).

Оставшаяся площадь — $2S_2$, а S_2 — часть окружности радиуса $\sqrt{3}$ с центрами в C и в D:



$S_2 = \pi r^2 \cdot \frac{\beta}{360} = \frac{\pi}{12} \cdot 2 = \frac{\pi}{6}$,

$2S_2 = \frac{\pi}{3}$.

Значит, площадь ~~...~~ части фигуры M выше прямой ($a+b=1$) —

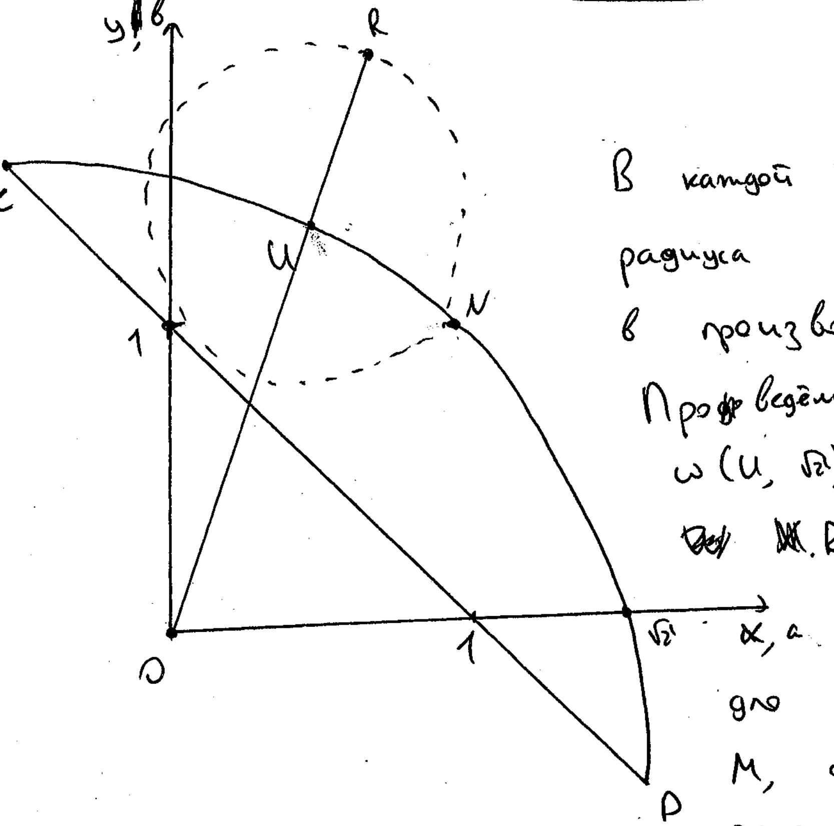
$\frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = S_0$. Отсюда $S_M = 2S_0$ (в силу доказанной выше симметрии относительно прямой $a+b=1$), $\Rightarrow S_M = 6\pi - \sqrt{3}$.

Ответ $6\pi - \sqrt{3}$.

Лист №7

Чистовик

$\boxed{\text{№3 (продолжение)}}$



В каждой точке дуги CND есть окружность радиуса $\sqrt{2}$. Рассмотрим такую окружность в произвольной точке U.

Проведём OU до пересечения с окружностью $\omega(U, \sqrt{2})$ во второй раз — получим точку R. $OU = \sqrt{2}$, $UR = \sqrt{2}$, $\Rightarrow OR = 2\sqrt{2}$.

Значит, т.к. так можно сделать для любой точки $U \in CND$, часть фигуры M, ограниченная углом COD — это ~~часть~~ часть окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдём её площадь.

$\angle COD = 90° + 2\alpha$, α — угол между OD и осью x (в силу симметрии он равен углу между OC и осью y).

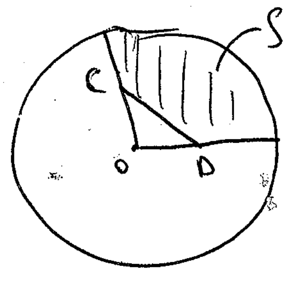
Найдём координаты D: $x_D^2 + y_D^2 = 2$, $x_D + y_D = 1$, $\Rightarrow y_D = 1 - x_D$,

$x_D^2 + 1 - 2x_D + x_D^2 = 2$, $2x_D^2 - 2x_D - 1 = 0$, $x_D = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Так как $x_D > \frac{1}{2}$ (из графика), $x_D = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\Rightarrow y_D = 1 - x_D = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|y_D|}{|x_D|} = \operatorname{arctg} \frac{|1-\sqrt{3}|}{|1+\sqrt{3}|} = \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) = 15°$.

Значит, $\angle COD = 90° + 30° = 120°$.



$S = \frac{120°}{360°} \cdot \pi r^2 - S_{COD}$, $r = 2\sqrt{2}$, $\Rightarrow S = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8 - S_{COD}$.

$S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Rightarrow S = \frac{8\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Лист №6

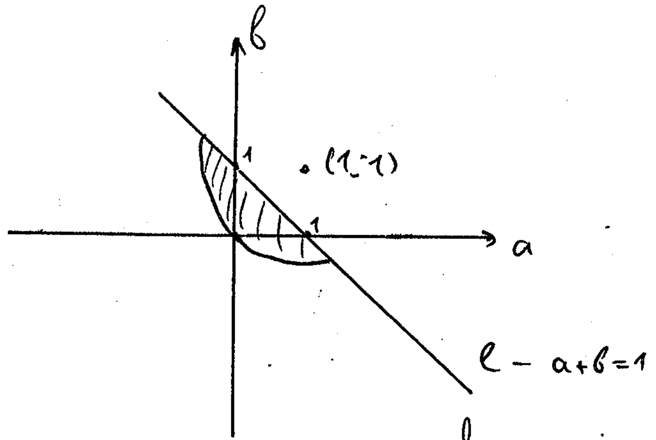
ЧИСТОВИК

№3 (продолжение)

Тогда должно выполнятся:

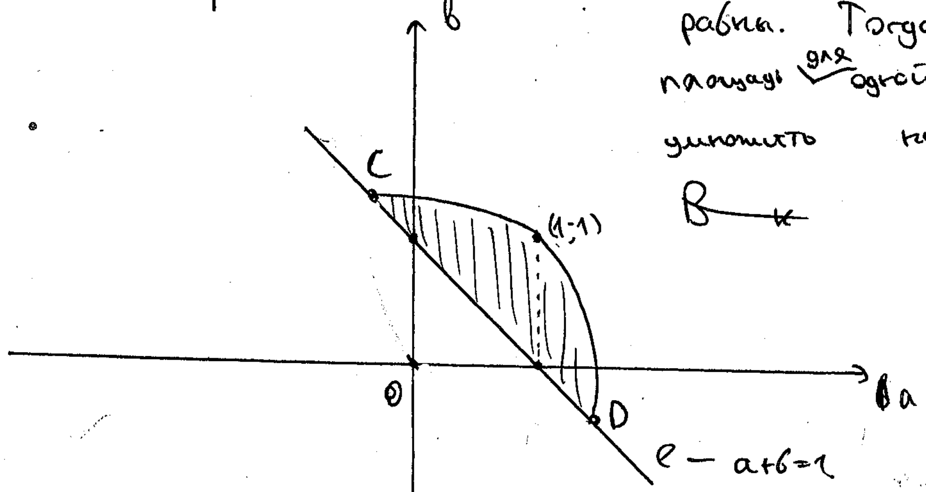
$a^2+b^2 \le 2(a+b)$, $\quad a^2-2a+b^2-2b \le 0$ $\quad a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$. Получили окружность с центром $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$, ограниченную условием $(a+b<1)$:



Полученная фигура симметрична той, что получилась в п. 1), относительно прямой $a+b=1$, т.к. их центры симметричны относительно этой прямой, а сами окружности равны. Тогда достаточно посчитать площадь для одной из частей и затем умножить на 2.

~~В~~



В каждой точке заштрихованной фигуры поместим окружность радиуса $\sqrt{2}$. Всё, что будет выше прямой l, и будет $\in M$ и будет составлять $\frac{1}{2}M$ (ведь т.к. части окружностей, образующие M, симметричны относительно l то и M симметрична относительно l).

В промежутке угла COD точки M образуют части окружности с центром в $(2;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$. Покажем это.

ЧИСТОВИК

№3

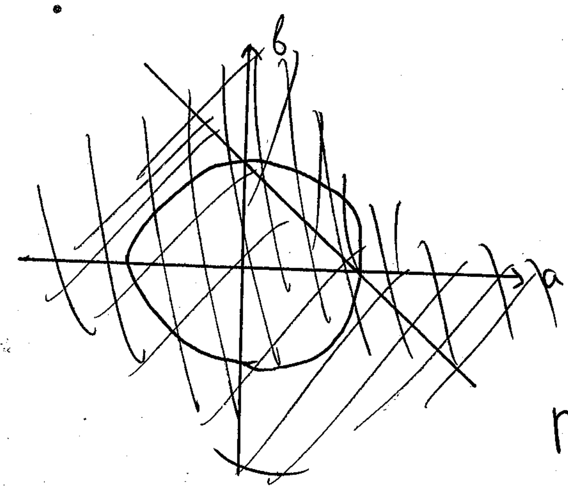
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2). & (2) \end{cases}$$

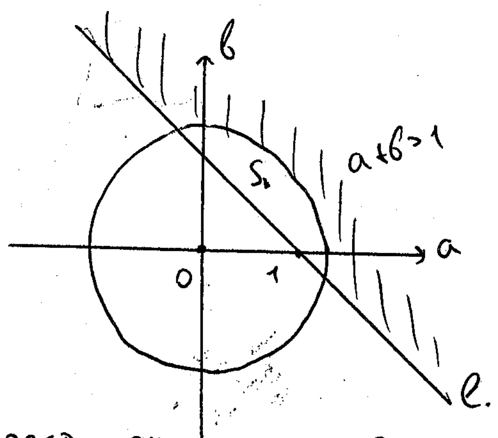
Заметим, что для каждой пары чисел $(a;b)$, удовлетворяющей (2), $\exists$ окружность с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{2}$, состоящая из подходящих ~~чисел~~ пар $(x;y)$, что следует из (1). Значит, фигура M состоит из объединения всех таких окружностей.

Найдём все подходящие пары $(a;b)$ из (2):

1) $\min(2a+2b,\ 2)=2 \Rightarrow 2a+2b \ge 2$, $a+b \ge 1$.

Тогда $a^2+b^2 \le 2 \Rightarrow$ получаем окружность с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Но при этом $a+b \ge 1$:





Подходит часть окружности, ограниченная прямой l и обозначенная за S_1.

2) $\min(2a+2b,\ 2)=2a+2b \Rightarrow 2a+2b<2$, $a+b<1$, $\Rightarrow a<1$ и $b<1$.

Пусть $a=1-c$ и ~~$b=1-d$, $c,d>0$. Тогда:~~

$a^2+b^2 < 2(a+b)$, ~~$(1-c)^2+(1-d)^2<2(2-c-d)$, $c^2-2c+1+d^2-2d+1<4-2c-2d$.~~

$c^2+d^2<2$, $\Rightarrow$

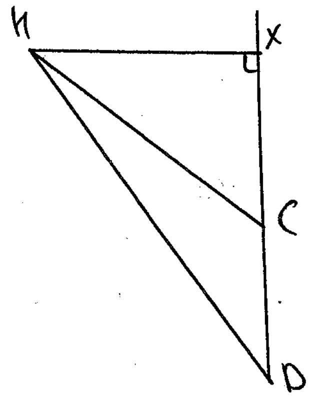
Лист №4

Чистовик

№2 (продолжение)

2 случай: $X \notin CD$. ~~Следует из теоремы синусов~~ (описано в P.s.)

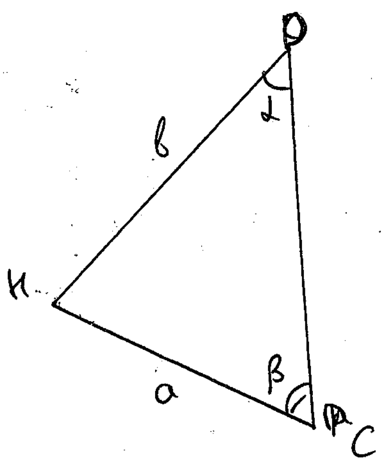
Значит, $\triangle HCD$ — тупоугольный. Т.к $HC < HD$, $\angle HDC < \angle HCD$ $\Rightarrow$ тупым может быть только $\angle HCD$ (~~иначе $\angle HDC$~~ если $\angle HDC$ — тупой, то $\angle HCD > \angle HDC$ — тоже тупой, чего не может быть).



Аналогично тому, что выше, $XC = \sqrt{23}$, $XD = \sqrt{34}$, $\Rightarrow CD = DX - CX = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

Ответ $\{\sqrt{23} + \sqrt{34};\ \sqrt{34} - \sqrt{23}\}$.

P.s. В решении использовано утверждение следующего характера: „Если в $\triangle HCD$ $HC < HD$, то $\angle HDC < \angle HCD$." Докажем его:



Пусть $\angle HDC = \alpha$, $HC = a$, $\angle HCD = \beta$, $HD = b$.

Запишем теорему синусов для $\triangle HDC$:

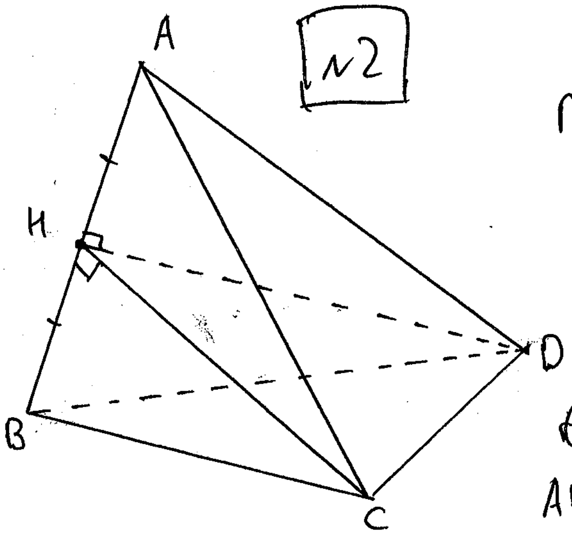
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Но $b > a$, $\Rightarrow \frac{b}{a} > 1$,

$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} > 1 \Rightarrow \sin\beta > \sin\alpha$.

Предположим, что $\alpha > \beta$, тогда α — тупой угол, который больше чем $(180° - \beta)$ — иначе $\sin\alpha \geq \sin\beta$. Но тогда сумма углов $\triangle HDC = \alpha + \beta + \angle CHD > 180°$, т.к $\alpha + \beta > \beta + (180 - \beta) > 180$. Противоречие $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha < \beta$, ч.т.д.

Лист №3

Чистовик

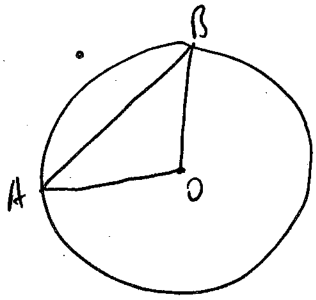


№2

Пусть H — середина AB. Так как $AC=CB$ и $AD=DB$, CH и DH — медианы и высоты в соответствующих треугольниках. Тогда $AB \perp CH$ и $AB \perp DH \Rightarrow AB \perp (HCD)$, (HCD) — плоскость HCD.

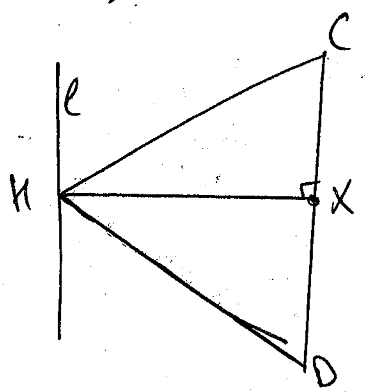
$AH=HB$, $\Rightarrow A$ симметрична B относительно (HCD).

$(HCD) \parallel \ell$, так как $CD \parallel \ell$, где ℓ — ось цилиндра, в который вписан тетраэдр. Тогда $AB \perp \ell$ т.к. $AB \perp (HCD)$. Но это значит, что AB лежит в плоскости, $\perp \ell$, т.е в сечении цилиндра, параллельном основанию. Рассмотрим это сечение (это окружность, т.к основание тоже окружность):



$OA=OB=R$, из неравенства $\triangle AOB$ $OA+OB \geq AB$, $\Rightarrow 2R \geq AB=2$, $2R \geq 2$, $R \geq 1$, $\Rightarrow R_{min}=1$, и R_{min} достигается, когда AB — диаметр цилиндра.

Тогда H — центр окружности сечения $(H \in \ell)$, т.к. $AH=HB$, $H \in AB$, а AB — диаметр. Тогда рассмотрим $\triangle HCD$:



Пусть HX — высота $\triangle HCD$. Рассмотрим 2 случая:

1) $X \in CD$ (рис слева). Из $\triangle ACH$ $CH=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}$, аналогично $DH=\sqrt{35}$. $HX=1$, т.к $HX \perp \ell$ и $X \in$ цилиндру, т.е. $HX=R$.

Отсюда $CD = CX + XD = \sqrt{HC^2-HX^2} + \sqrt{HD^2-HX^2} = \sqrt{23}+\sqrt{34}$.

Лист №2

ЧИСТОВИК

№1

Пусть b — разность этой прогрессии, $b \in \mathbb{Z}$, т.к. все числа — целые.

Тогда $S = \frac{2a_1+9b}{2} \cdot 10 = 5\cdot(2a_1+9b)$.

$a_6 = a_1+5b$, $a_{12} = a_1+11b$, $\Rightarrow a_6 \cdot a_{12} = a_1^2+16b\cdot a_1+55b^2$.

Аналогично, $a_7 a_{11} = a_1^2+16a_1 b+60b^2$.

$a_6 a_{12} > S+1$, $\Rightarrow a_1^2+16b\cdot a_1+55b^2 \geq S+1$.

$a_7 a_{11} < S+17$ $\Rightarrow S+17 > a_1^2+16b\cdot a_1+60b^2$.

Сложим полученные неравенства:

$a_1^2+16b\cdot a_1+55b^2+S+17 > S+1+a_1^2+16b\cdot a_1+60b^2$, $\Rightarrow 5b^2 < 16$, $\Rightarrow b^2 \leq 3{,}2$.

Т.к. $b \in \mathbb{Z}$, $b \in \{-1; 0; 1\}$, — иначе $b^2 > 3{,}2$.

~~1) $b=-1$, $\Rightarrow S=(2a_1-9)\cdot 5$~~

~~$a_6 a_{12} = a_1^2-16a_1+55 > (2a_1-9)\cdot 5$~~

~~$a_1^2-26a_1+100>0$, $a_1 = 13 \pm \sqrt{69}$, $\Rightarrow a_1 \in (13-\sqrt{69}; 13+\sqrt{69})$.~~

Так как прогрессия возрастающая, $b>0$ $\Rightarrow b=1$.

Тогда $S=(2a_1+9)\cdot 5 = 10a_1+45$.

$a_6 a_{12} = a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1$, $a_1^2+6a_1+9>0$, $(a_1+3)^2>0$, $\Rightarrow a_1 \neq -3$.

$a_7 a_{11} = a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17$, $a_1^2+6a_1-2<0$, $D=44$,

$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$.

Значит, $a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{11})$, а так как $a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$, так как $-3-\sqrt{11} > -7$, а $-3+\sqrt{11} < 1$.

Ответ $a_1 = \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

Лист №1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104553**

ID профиля: **193969**

Вариант 17

~~Чистовик~~ черновик

№5

Запишем ОДЗ для всех логарифмов:

$$\left.\begin{matrix} 5x-1>0, & 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0, & 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0, & \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x>0{,}2; \quad x\neq 0{,}4.$$

Рассмотрим 3 случая:

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1.$

Тогда:

$\log_{5x-1}(4x+1)^2 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\Rightarrow \log_{5x-1}(4x+1)^2 = \log_{4x+1}\left(\frac{x+4}{2}\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \dfrac{1}{\log_{(4x+1)}5x-1}$. Пусть $a=5x-1$, $b=4x+1$, $c=\frac{x}{2}+2$.

$\log_a b = \log_b c$, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $\Rightarrow \dfrac{1}{\log_b a} = \log_b c$, $\log_b a \cdot \log_b c = 1.$

При этом $\log_b c^2 = \log_c a + 1$, $2\log_b c = \log_c a + 1$ а $\log_b c = \log_a b$,

$\Rightarrow 2\log_a b - \dfrac{1}{\log_a c} = 1$, $2\log_a b\cdot\log_a c - 1 = \log_a c$

$2\log_a b\cdot\log_a c = \log_a c + \log_a a = \log_a ca.$

$2\cdot\log_a b\cdot\log_a c = \log_a ca$

Черновик

ОДЗ:

$x > \frac{1}{5}$

$x \neq \frac{2}{5}$

$\log_{(5x-1)}(4x+1)^{x} = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^{x}$

$\log_a b = \log_b c.$

$\log_b a \cdot \log_b c = 1, \Rightarrow$

$a = b^{x}, \quad c = b^{\frac{1}{x}}$

$\log_c a + 1 = \log_b a.$

$1 = \log_b a - \log_c a =$

$= \frac{\log_a\left(\frac{c}{b}\right)}{\log_a b \cdot \log_a c}$

$\log_a \frac{c}{b} = \frac{\log_a c}{\log_b c} = \frac{\log_c b}{\log_a b} = \log_a c.$

$\frac{c}{b} = c, \quad b = 1.$

$2\log_a b \cdot 2\log_b c \cdot \log_{ac} a = 4.$

$\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c \cdot \log_c a = 1$

$a, a, a-1$

$a^2(a-1) = 4.$

~~Чистовик~~ Черновик

$\boxed{№5}$

Запишем ОДЗ для всех логарифмов:

$$\left.\begin{array}{ll} 5x-1>0, & 5x+1\neq 1 \\ 4x+1>0, & 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0, & \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{array}\right\} \quad x>\frac{1}{5},\quad x\neq\frac{2}{5}.$$

Тогда $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$.

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\cdot\log_{(4x+1)}(x+2)$.

Пусть ~~$a=5x-1,\ b=4x+1,\ c=\frac{x}{2}+2$~~

$(a;b;c)$ — тройка чисел $(5x-1;\ 4x+1;\ \frac{x}{2}+2)$ в ~~каком-то порядке~~

Тогда наши логарифмы — $\log_a b$, $\log_b c$

Пусть выполняется, что $\log_a b = \log$

Рассмотрим 3 случая:

1) $\log_{\sqrt{5x-1}} =$

$\log_a b = \log_b c.$

~~$\log_a a^x \cdot \log_b$~~

$b = a^x$

$c = b^x = (a^x)^x = a^{x^2}$

$\log_a b = x,\quad \log_a c = y.$

$\log_a$ ~~$a^b \cdot b^a$~~

$\log_b c \cdot \log_b a = 1$

$b = a^x,\quad c = a^y.$

$c^{\log_a b} =$

$4x+1 > \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \left(\frac{x+4}{2}\right)^2$

$16x+4 > x^2 + \cancel{16x} + 8x + 16.$

$x^2 - 8x + 12 < 0.$

$x \in (6;2)\ (2;6)$

$\log_a a^{xy} \qquad c^x$

$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a c^{\log_a b} = 1$

$c^{\log_a b} = a.$

$b = a^x$

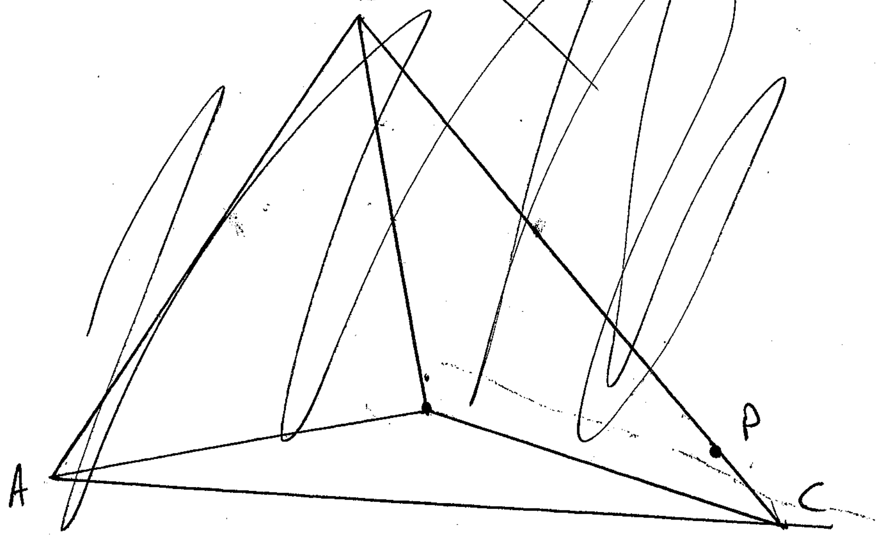
$c = a^y$

$2xy = x+1$

$x = \frac{1}{2y-1}$

~~чистовик~~

№6 черновик



черновик

~~gcd(с,~~

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1}$

$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3}$

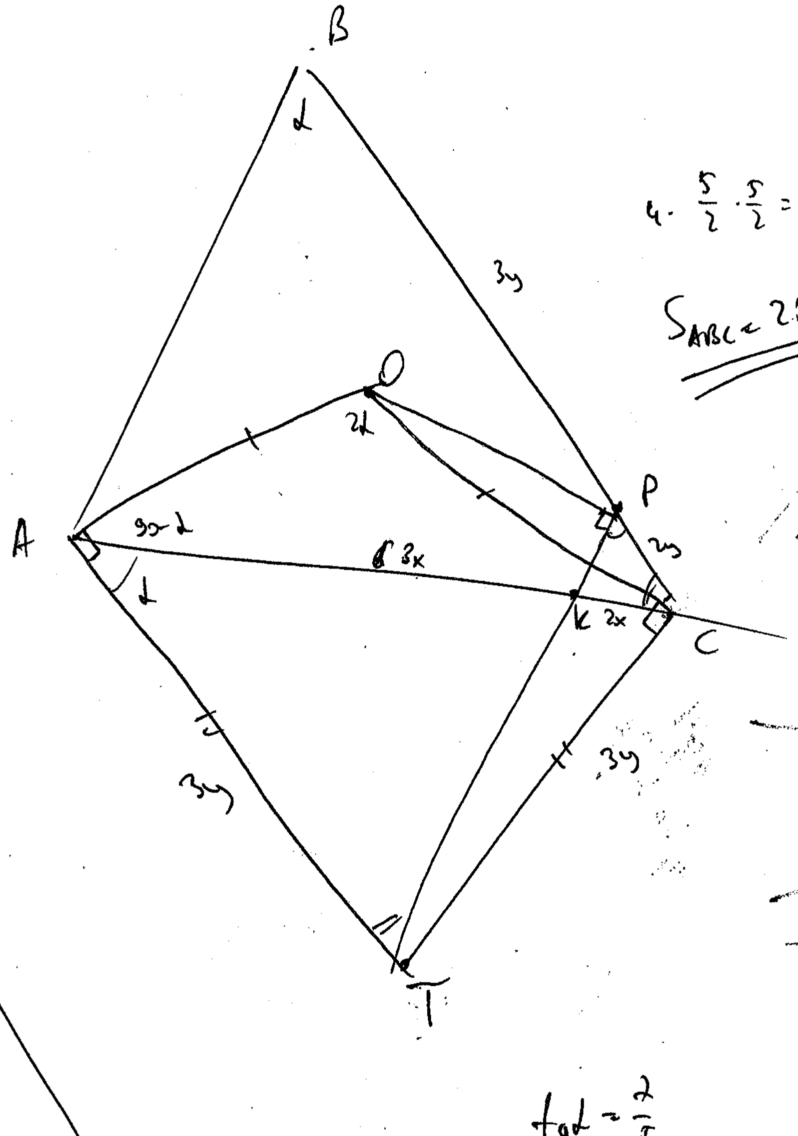
~~x_i, y_i~~ $\boxed{x_i, y_i \geq 1.}$

256 — вариантов y_i

225 — вариантов x_i

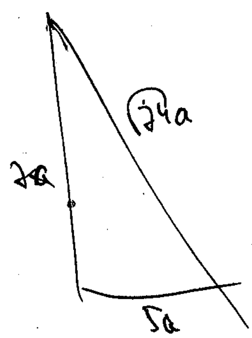
$\max_{x_i} = 15$

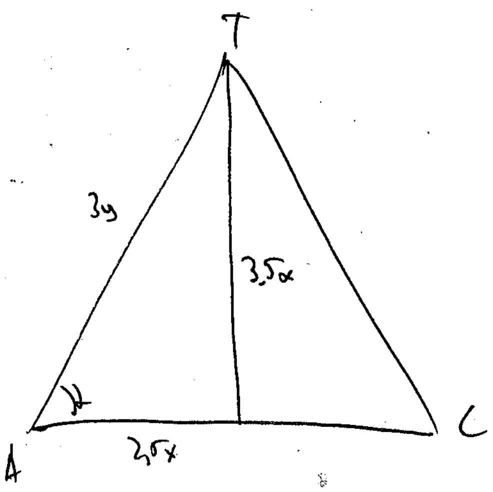
$\max_{y_i} = 16.$



$4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = 25$

$S_{ABC} = 25$





$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$

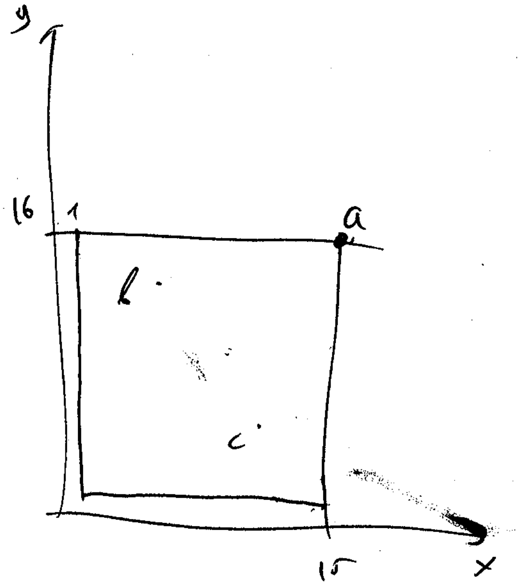
$S_{AKT} = \frac{9}{4} \cdot S_{cup} = 9.$

$S_{AKT} = 3x \cdot \frac{7}{4} x = \frac{21}{4} x^2$

$x^2 = \frac{36}{21}$

$x = \frac{6\sqrt{21}}{21} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$

$5x = \frac{10\sqrt{21}}{7}$



$16 \cdot 15$

$1 + 2 \cdot (16 \cdot 15 - 1) \cdot 3 + \cancel{b} 3 \cdot (16 \cdot 15 - 1)$

1) $(a; a; a)$ — 1

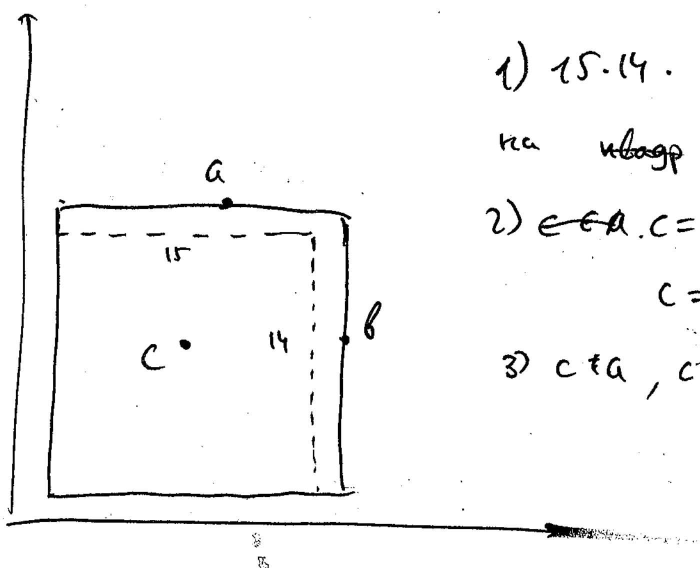
2) $(a; a; b)$
$(a; b; a)$ — $3 \cdot (16 \cdot 15 - 1)$
$(b; a; a)$

3) $(a; b; b)$
$(b; a; b)$ — $3 \cdot (16 \cdot 15 - 1)$
$(b; b; a)$

4) $(a; b; c)$ — $6 \cdot (16 \cdot 15 - 1) \cdot (16 \cdot 15 - 2)$

$= 6 \cdot (16 \cdot 15 - 1)^2 + 1$

II) Нет числа в вершине



1) $15 \cdot 14 \cdot (15 \cdot 14 - 1) \cdot 6$ — когда c не лежит на ~~квадр~~ угле ab

2) $c = a$, $3 \cdot 15 \cdot 14$
$c = b$, $3 \cdot 15 \cdot 14$

3) $c \neq a$, $c \in a$. $\frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 14$ 6
$c \in b$. $15 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot 6$

4) $6 \cdot 15 \cdot 14 \cdot (15 \cdot 14 - 1) + 6 \cdot 15 \cdot 14$
$+ 6 \cdot 15 \cdot 14 \cdot (7 + 6{,}5) =$

$= 6 \cdot 15 \cdot 14 \, (15 \cdot 14 + 7 + 6{,}5) = 45 \cdot 14 \cdot (30 \cdot 14 + 14 + 13) = 630 \cdot (420 + 27) = \underline{630 \cdot 447}$

№5

ОДЗ:

$x \neq 0$

$5x > 1, \quad 5x \neq 2, \quad 4x+1 > 0, \quad \cancel{4x+1 \neq 1}, \quad x \neq -4, \quad \frac{x}{2}+2 > 0, \quad \frac{x}{2}+2 \neq 1,$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{5x-1}(4x+1)^2$$

$$\log_{5x-1}(4x+1)^2 = 2\log_a b$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_b c$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)^1 = \log_c a$$

$a = 5x-1$

$b = 4x+1$

$c = \frac{x}{2}+2.$

ОДЗ:

$\boxed{x > 0{,}2. \quad x \neq 0{,}4.}$

1) $\log_a b = \log_b c; \Rightarrow \cancel{\frac{1}{\log_b a} = \log_b c}$

$\log_a b - \log_b c = 0.$

$\frac{1}{\log_b a} = \log_b c$

$\log_b c \cdot \log_b a = 1.$

$c = b^x, \quad a = b^{\frac{1}{x}}.$

$\cancel{\log_a b = x, \quad b = a^x, \quad c = b^x}$

$\Rightarrow$

1) $\log_{(5x-1)}(4x+1)^2 = \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

№4

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1}$

$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3}$

1) $a = 2^{15} \cdot 3^{16}$

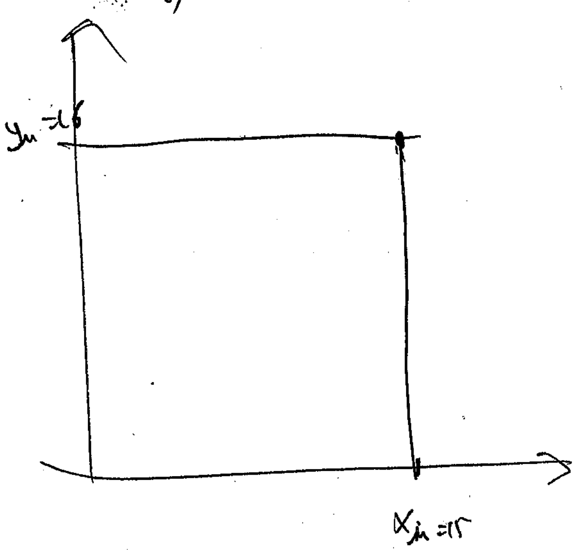
Всего пар —

$a = (x_1; y_1)$

$b = (x_2; y_2)$

$c = (x_3; y_2)$

1)



2) $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$,

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1$, $4x+1=\frac{x}{2}+2$, $8x+2=x+4$, $7x=2$, $x=\frac{2}{7}$.

Тогда $2\log_{5x-1}(4x+1) = 2\cdot\log_{\frac{3}{7}}\frac{15}{7} \notin \mathbb{N}$ — нецелое число, $\Rightarrow$

оно не может быть $=2$ или отличаться от 2 на единицу, $\Rightarrow$ $x=\frac{2}{7}$ не подходит.

3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$, $\Rightarrow$ $5x-1=\left(\frac{x+4}{2}\right)^2$, $20x-4=x^2+8x+16$,

$x^2-12x+20=0$ $x=2$, $x=10$. $x=2$ уже проверили, осталось $x=10$.

$2\log_{5x-1}(4x+1) = 2\cdot\log_{49}41 \notin \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ $x=10$ тоже не подходит

Ответ: $x=2$

чистовик

$\boxed{№5}$

За-из ОДЗ:

$$\left.\begin{array}{ll} 5x-1>0, & 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0, & 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0, & \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{array}\right\} \; x>\frac{1}{5}; \quad x\neq\frac{2}{5}.$$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{(5x-1)}(4x+1)$, $\quad \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$.

Заметим, что произведение всех наших чисел равно

$$2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\cdot\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 4\cdot 1 = 4.$$

Пусть 2 каких-то числа равны a, третье — $a-1$

Тогда $a^2\cdot(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$; один из корней — $a=2$.

$$\begin{array}{l|l} a^3-a^2+0a-4 & a-2 \\ \cline{2-2} -a^3-2a^2 & a^2+a+2 \\ \hline \quad a^2-0a & \\ -a^2-2a & \\ \hline \quad\quad 2a-4 & \\ -2a-4 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

a^2+a+2 — $D<0$ $\Rightarrow$ единственный вариант — $a=2$

1). $2\log_{5x-1}(4x+1)=2$, $\log_{5x-1}(4x+1)=1$, $5x-1=4x+1$, $\underline{x=2}$.

Тогда $2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2\cdot\log_9 3=1$, а $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$,

то есть 2 числа равны, а третье меньше на $1 \Rightarrow$ $x=2$ подходит.

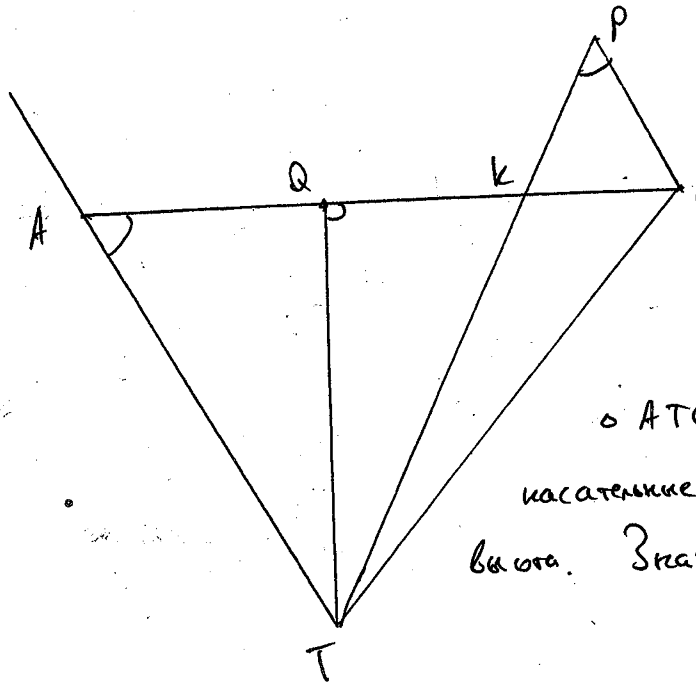
$\boxed{\text{Лист № 6}}$

Значит, $\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = k^2$ (т.к. площади подобных $\triangle$ относятся как квадрат коэффициента подобия) $= \frac{25}{4}$, $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{4} \cdot S_{PKC} = \frac{25}{4} \cdot 4 = 25.$

~~Ответ~~ $\boxed{S_{ABC} = 25}$

б) Пусть $AC = 5x$, тогда $KC = \frac{2}{5} \cdot 5x = 2x$, и $AK = 3x$.

Пусть TQ — высота $\triangle TAC$:



Как мы уже знаем, $\angle TAC = \alpha = \angle ABC$, $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5}$, $\Rightarrow TQ = AQ \cdot \frac{7}{5}$.

Но $AQ = \frac{AC}{2} = 2{,}5x$, так как $\triangle ATC$ — равнобедренный (т.к. TA и TC — касательные к ω из одной точки), а TQ — высота. Значит, $TQ = 2{,}5x \cdot \frac{7}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{5} x = 3{,}5x$.

$\angle TAC = \angle TPC$ (опираются на ~~CT~~ дугу CT ω), $\angle ATP = \angle ACP$ (опираются на дугу AP), $\Rightarrow \triangle ATK \sim \triangle PKC$ с коэффициентом подобия $n = \frac{KT}{KC}$.

$KQ = AK - AQ = \frac{x}{2}$, $\Rightarrow$ из т. Пифагора $\triangle QKT$ $KT = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x}{2}\right)^2} = 2{,}5\sqrt{2}x$.

Тогда $n = \frac{2{,}5\sqrt{2}x}{2x} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, $\Rightarrow n^2 = \frac{25 \cdot 2}{16} = \frac{25}{8}$.

Аналогично тому, что ~~в~~ было в п. а), $\frac{S_{AKT}}{S_{PCK}} = n^2$, $\Rightarrow S_{AKT} =$
$= \frac{25}{8} \cdot 4 = \frac{25}{2}$.

Но $S_{AKT} = TQ \cdot AK \cdot \frac{1}{2} = 3{,}5x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{4} x = \frac{25}{2}$, $\Rightarrow x = \frac{100}{42}$, $\Rightarrow = \frac{50}{21}$,
$\Rightarrow AC = 5x = \frac{250}{21}$.

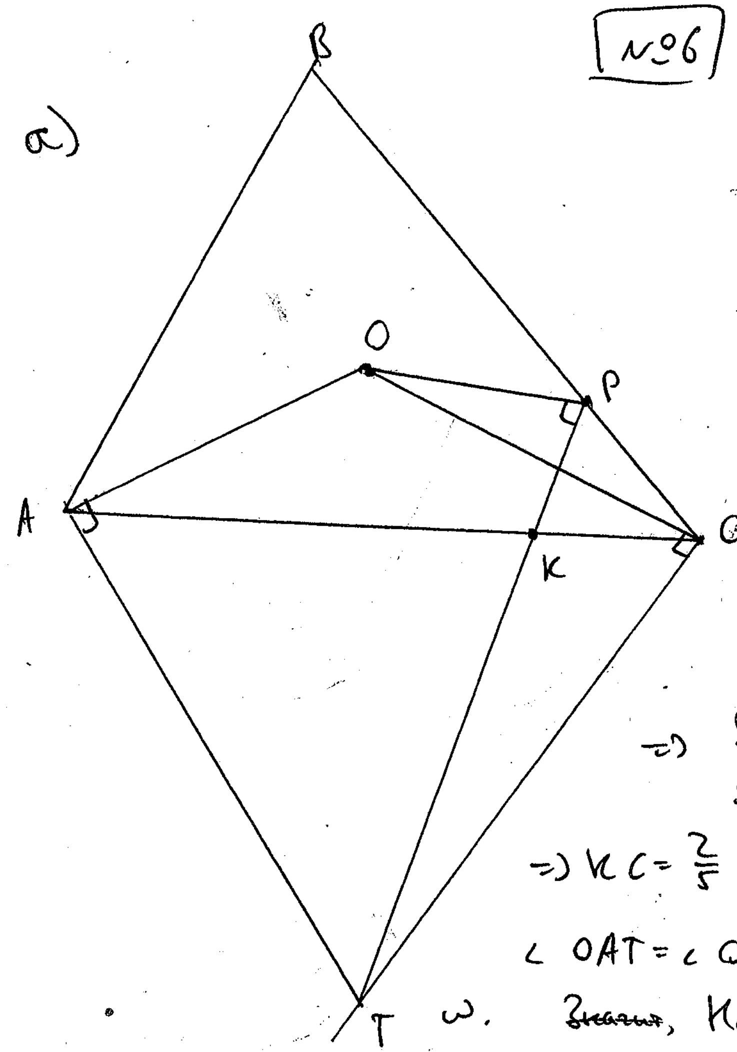
Ответ а) $S_{ABC} = 25$; б) $AC = \frac{250}{21}$.

Лист №5

ЧИСТОВИК

№6

а)



Дано: $S_{APK}=6$; $S_{CPK}=4$.

Найти: S_{ABC} — ?

Решение:

Пусть PH — высота из P на AC. Тогда $S_{APK}=PH\cdot\frac{1}{2}\cdot AK$, $S_{PCK}=PH\cdot\frac{1}{2}\cdot CK$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{6}{4}=\frac{AK}{KC}$, $\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{3}{2}$, $\Rightarrow$ ~~KC=~~

$\Rightarrow KC=\frac{2}{5}\cdot AC.$

$\angle OAT=\angle OCT=90°$, т.к. TA и TC — касательные к ω. ~~Значит~~, Но 4-угольник $AOCT$ — вписанный, так как $\angle OAT+\angle OCT=180°$, ~~значит~~ $\Rightarrow T\in$ окружности AOC т.е. $T\in\omega$. И т.к. $\angle OCT=90°$, OT — диаметр ω.

Но $P\in\omega$, $\Rightarrow \angle OPT=\angle OCT=90°$.

O — центр окружности ABC $\Rightarrow$ если $\angle ABC=\alpha$, $\angle AOC=2\alpha$ (центральный угол = удвоенному вписанному), $\Rightarrow \angle ATC=180°-\angle AOC$ (т.к. $AOCT$ — вписанный) $=180°-2\alpha$, $AT=CT$, ~~т.к.~~ — как касательные из одной точки, $\Rightarrow \angle ACT=\angle CAT$, ~~и~~ ~~$\Rightarrow$~~ $\angle ACT+\angle CTA+\angle CAT=180°$

$180°=180°-2\alpha+2\cdot\angle CAT$, $\Rightarrow \angle CAT=\alpha$, $\Rightarrow \angle CPT=\angle CAT$ (опираются на дугу CT окружности ω) $=\alpha$. Но тогда $\angle ABC=\angle KPC=\alpha$, $\Rightarrow PK\parallel AC$

~~Но~~ Значит, $\triangle ABC\sim\triangle PKC$ с коэффициентом $\boxed{k=\frac{5}{2}}$ (~~так~~ доказано выше что $CK=\frac{2}{5}AC$, $\Rightarrow AC=\frac{5}{2}CK$).

Лист №4

Чистовик

$\boxed{\text{№4 (продолжение)}}$

Получили во $\underline{II}$ способе что всего троек, где нет точки ~~числа~~

$(16;15)$ — $15\cdot14\cdot3+15\cdot14\cdot3+\frac{15\cdot14}{2}\cdot15\cdot6+6\cdot\frac{14\cdot13}{2}\cdot15+15\cdot14\cdot15\cdot14=$

$=15\cdot14\cdot(6+45+39+15\cdot14)=30\cdot7\cdot(90+210)=300\cdot210=63000.$

Складывая с I случаем, получаем $63000+239\cdot720+1=80209.$

Ответ: 80209 троек

$\boxed{\text{Лист №3}}$

чистовик

$\boxed{№4 \text{ (продолжение)}}$

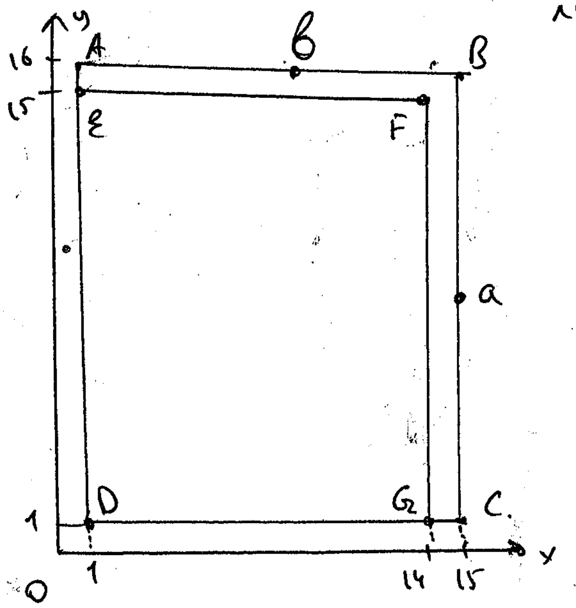
Тогда в (I) случае получаем что всего таких троек

$$1+(16\cdot 15-1)\cdot(3+3)+(16\cdot 15-1)\cdot 6\cdot(8\cdot 15-1)=(16\cdot 15-1)\cdot 6\cdot 120+1=$$

$$=239\cdot 720+1.$$

(II). Ни одна из точек $\neq (15;16)$. Тогда есть 2 точки $a\neq b$ такие, что $x_a=15$, а $y_b=16$ (это не обязательно числа a и b!).

1) Третье число (c) лежит на сторонах AB или BC (т.е. либо $c_x=15$, либо $c_y=16$).



a) $c=a$, таких троек $\underline{15\cdot 14\cdot 3}$

(15 способов выбрать a, т.к. $a_x=15$ и $a_y<16$, 14 — выбрать b, т.к. $b_y=16$ и $b_x\neq 15$, 3 — способов переставить тройки вида $(a;b;a)$).

б) $c=b$ — аналогично, таких троек $\underline{15\cdot 14\cdot 3}$

c) c лежит на ~~AB~~ BC

Таких троек $\frac{15\cdot 14}{2}\cdot 15\cdot 6$ ← перестановки

C_{15}^2 — способов выбрать 2 числа на ~~AB~~ BC

d) $c\in AB$ ~~$c\in BC$~~, таких троек ~~И~~ аналогично $6\cdot\frac{14\cdot 13}{2}\cdot 15$

2) c не лежит на сторонах AB и BC.

Таких троек $15\cdot 14\cdot(15\cdot 14)$

выбрать ~~a~~. выбрать b выбрать c

Чистовик

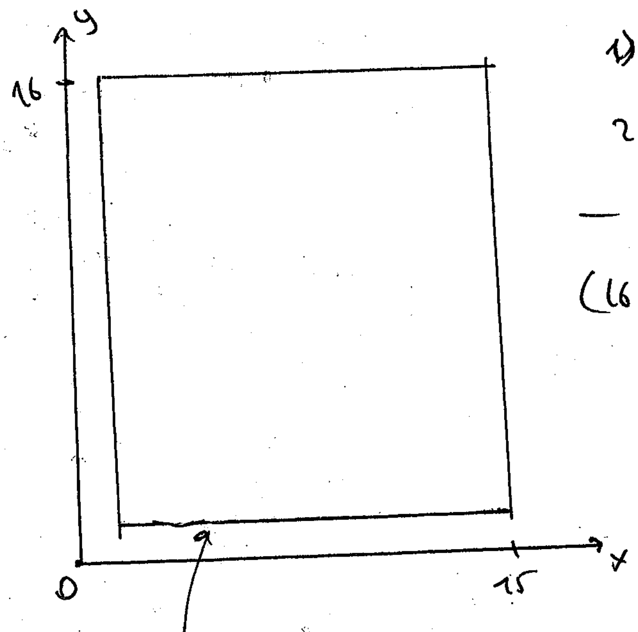
№4

Пусть $\begin{cases} a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \\ b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \\ c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \end{cases}$. Мы можем так представить числа a, b, c, т.к. если у какого-то есть простой делитель d, отличный от 2 и 3, НОК(a, b, c) было бы $\vdots d$, противоречие $\Rightarrow$ d не существует.

Так как НОД$(a, b, c) = 6$, $a \vdots 6$, $b \vdots 6$ и $c \vdots 6$, $\Rightarrow$ x_i и y_i по всем i ≥ 1. Аналогично, $x_i \leq 15$ и $y_i \leq 16$ по всем i, при этом хотя бы ~~Тогда будем рассматривать наши числа~~ одно из $x_i = 15$ и одно из $y_i = 16$ (иначе НОК$(a, b, c) \neq 2^{15} \cdot 3^{16}$ по определению).

Будем рассматривать наши числа как точки на координатной плоскости ~~Рассмотрим~~ с координатами $(x_i; y_i)$ и посчитаем кол-во троек из таких точек. Рассмотрим 2 случая.

(I) Одна из точек — $(15; 16)$.



границы области, где могут находиться точки.

1) Все ~~числа~~ точки совпадают — 1 тройка

2) Тройки вида $(a; a; b)$, где $a = (15; 16)$ — $(16 \cdot 15 - 1)$, упорядоченные такие тройки — $(16 \cdot 15 - 1) \cdot 3$

3) Тройки вида $(a; b; b)$, $a = (15; 16)$, $a \neq b$ — $(16 \cdot 15 - 1) \cdot 3$ (уже упорядочены)

4) Тройки $(a; b; c)$, $a \neq b \neq c$, $a = (15; 16)$ — $\frac{(16 \cdot 15 - 1) \cdot (16 \cdot 15 - 2)}{2} \cdot 6$