Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104464**

ID профиля: **834584**

Вариант 17

Чистовик ⑤

№3 М – мн-во точек x, y:

(x; y) такие, что $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, при кот. вып. сист.

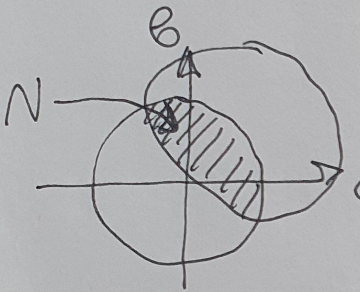
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 & (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) & (2) \end{cases}$$

Площадь фигуры М = ?

Для каждой пары (a, b) удовл. (2)

Нер-во (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$

Надо найти мн-во N точек (a, b), удовл (2).



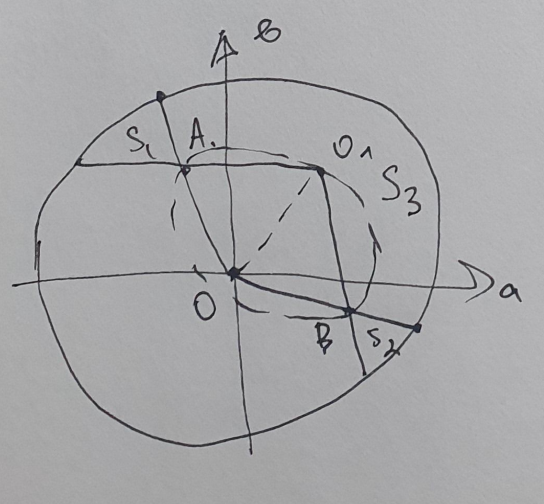
Нер-во (2) равносильно сист.:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 2a + 2b & (2a) \\ a^2 + b^2 \le 2 & (2б) \end{cases}$$

(2a): $a^2 - 2a + 1 + b - 2b^2 + 1 \le 2$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \le 2$

Мн-во М – все такие точки, удалённые от мн-ва N не больше, чем на $\sqrt{2}$, т.е. М выглядит так.



$\angle OAO_1 = \frac{\pi}{3}$

Т.к. A – пересеч. окр-тей радиуса $\sqrt{2}$, с центром на расст. $\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_1 = \pi(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\pi}{3}$

$S_2 = S_1$

чистовик (5)

S_3 – площадь сектора круга $R = 2\sqrt{2}$ и углом $\frac{2\pi}{3}$:

$$S_3 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{8\pi}{3}$$

S_4 – аналогично $\frac{8\pi}{3}$

$$S_3 \cap S_4 = ?$$

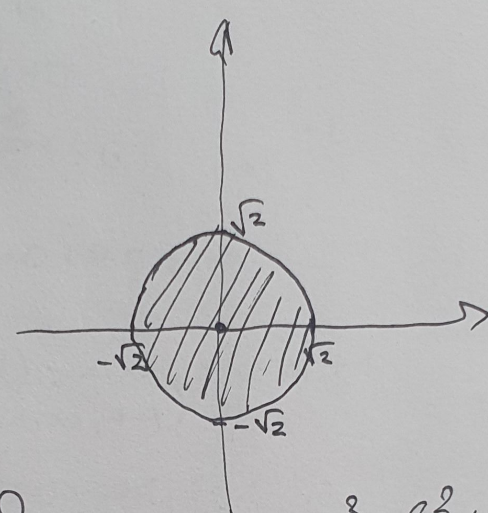
~~2 площади~~ 2 площади

Черновик (2):

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,\ 2)\end{cases}$$

(1) $O(a;b)$



I $2a+2b>2$

$a^2+b^2-2a-2b\le 0$

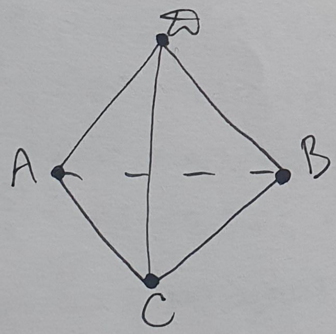
$a^2-2ab+b^2+2ab-2a-2b\le 0$

$(a+b)^2-2ab-2(a+b)\le 0$

$a^2+b^2\le 2$

$\cancel{a^2+b^2}$

№2



Черновик (4)

Черновик 3:

$(-6+5)(-6+11) > \cancel{8} -60+46$

$(\cancel{-5})(5) > -14$

$(-6+6)\cdot(-6+10) < -60+45+17$

$(0+5)(0+11) > 46$

$(0+6)(0+10) < 45+17$

$(-4+5)(-4+11) > -\cancel{60}\,40+46$

$1\cdot 7 > -$

$(-4+6)(-4+10) < -40+45+17$

$2\cdot 6 <$

1: $(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1$

$(a_1+10)(a_1+22) > 10a_1+91$

$a_1^2+22a_1+\cancel{10a_1}+220 > \cancel{10a_1}+91$

$a_1^2+22a_1+129 > 0$

$\frac{D}{4}=121-129<0$

2: $(a_1+12)(a_1+20) < 10a_1+90+17$

$a_1^2+20a_1+12a_1+240 < 10a_1+107$

$a_1^2+22a_1+133<0$

$\frac{D}{4}=121-133<0 \Rightarrow a_1^2+22a_1+133>0$ при $\forall a_1$.

при $d=2$ не будет подх. a_1.

Черновик (1):

№1

$a_6 \cdot a_{12} > S + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S + 17$

$a_1 = ?$

$d > 0$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{10}^{5} = 5a_1 + 5a_{10} =$

$= (2a_1 + 9d)5 =$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_2 = a_1 + d$

$= 10a_1 + 45d$

(1) $a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 5a_1 d + 11a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 - 10a_1 + 16a_1 d - 45d + 55d^2 > 1$

(2) $(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 6a_1 d + 10a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$(a_6 + d)(a_{12} - d) < S + 17$

$a_6 \cdot a_{12} + a_{12} \cdot d - d^2 - a_6 d < S + 17$

$> S+1$

$a_{12} d - d^2 - a_6 \cdot d < 16$

$(a_1 + 11d)d - d^2 - (a_1 + 5d) \cdot d < 16$

$\cancel{a_1 d} + 11d^2 - d^2 - \cancel{a_1 d} - 5d^2 < 16$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} \to 3{,}2$

$d < \frac{4}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{4}{3} < \frac{4}{\sqrt{5}} \leq 2$

$d = 2$

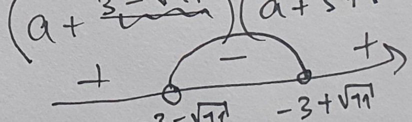
$d = 1$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$

$a_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{1}$

$(a + 3 - \sqrt{11})(a + 3 + \sqrt{11}) < 0$



$-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$ $\quad (-7; 0)$

$0 < -3 + \sqrt{11} < 1$ $\quad \boxed{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0}$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1$

1: $(a_1 + 10)(a_1 + 22) > 10a_1 + 91$

$a_1^2 + 22a_1 + \cancel{10a_1} + 220 > \cancel{10a_1} + 91$

$a_1^2 + 22a_1 + 129 > 0$

$\frac{D}{4} = 121 - 129 < 0$

2: $(a_1 + 5)(a_1 + 11) > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 11a_1 + 5a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$\cancel{\frac{D}{4} = 9 - 9}$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17$

$(a_1 + 6)(a_1 + 10) < 10a_1 + 45 + 17$

$a_1^2 + \cancel{10a_1} + 6a_1 + 60 < \cancel{10a_1} + 62$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

Черновик 4

№ 1

1: $(a_1+5d)(a_1+11d) > 45d+10a_1+1$

$a_1^2+11a_1d+5a_1d+55d^2 > 45d+10a_1+1$

$a_1^2+16a_1d+55d^2-45d-10a_1-1>0$

2: $(a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17$

$a_1^2+10a_1d+6a_1d+60d^2-10a_1-45d-17<0$

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2)\end{cases}$$

№1.1 Чистовик (1)

Продолж. см № 1.2.

$d>0$

$S=\frac{a_1+a_{10}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{10}^{\,5}=(a_1+9d+a_1)5=10a_1+45d$

$a_6\cdot a_{12}>S+1$

$a_7\cdot a_{11}<S+17 \longrightarrow (a_6+d)(a_{12}-d)<S+17$

$a_1,a_2,a_3\ldots a_n\in\mathbb{Z}$

$a_1=?$

$(a_6a_{12})+a_{12}\cdot d-a_6d-d^2<$ ~~$10a_1+45d+17$~~ $S+17$

$a_6\cdot a_{12}>S+1$

$\Downarrow$

$a_{12}\cdot d-a_6d-d^2<16$

$(a_1+11d)d-(a_1+5d)d-d^2<16$

$\cancel{a_1d}+11d^2-\cancel{a_1d}-5d^2-d^2<16$

$5d^2<16$

$d<\frac{4}{\sqrt5}$, т.к. $d>0$ по усл.

$\frac{4}{3}<\frac{4}{\sqrt5}\leq 2$

$\Downarrow$

$d\leq 2$, но $d>0$ по усл

Т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то и d – целое

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} d=1 \quad (1)\\ d=2 \quad (2)\end{array}\right.$

(1) $d=1$:

$\begin{cases}(1)\ (a_1+5)(a_1+11)>S+1 \to a_1^2+11a_1+5a_1+55>46+10a_1\\ (2)\ (a_1+6)(a_1+10)<S+17 \to a_1^2+\cancel{10a_1}+6a_1+60<45+17+\cancel{10a_1}\\ S=45+a_1\cdot 10\end{cases}$

(1) $a_1^2+6a_1+9>0$

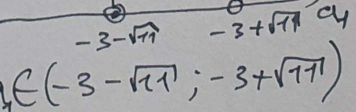
$(a_1+3)^2>0$

$\boxed{a_1\neq-3}$

(2) $a_1^2+6a_1-2<0$

$\frac{D}{4}=9+2=11$

$a_1=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{1}$



$a_1\in(-3-\sqrt{11};-3+\sqrt{11})$

$-7<-3-\sqrt{11}<-6$

$0<-3+\sqrt{11}<1$

$\Downarrow$

$a_1\in(-7;1)\Rightarrow a_1=\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

но $a_1\neq-3\Rightarrow a_1=\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$

№1.2. Чистовик (2)

(2) $d=2$:

$$\begin{cases} (a_1+10)(a_1+22) > S+1\cancel{2} \quad (1) \\ (a_1+12)(a_1+20) < S+17 \quad (2) \\ S = 10a_1+90 \end{cases}$$

(1) $a_1^2+22a_1+\cancel{10a_1}+220 > \cancel{10a_1}+\cancel{90}\,91$

$a_1^2+22a_1+129>0$

$\frac{D}{4}=121-129<0 \Rightarrow a_1^2+22a_1+129>0$ при $\forall a_1$

(2) $a_1^2+20a_1+12a_1+240 < 10a_1+107$

$a_1^2+22a_1+133<0$

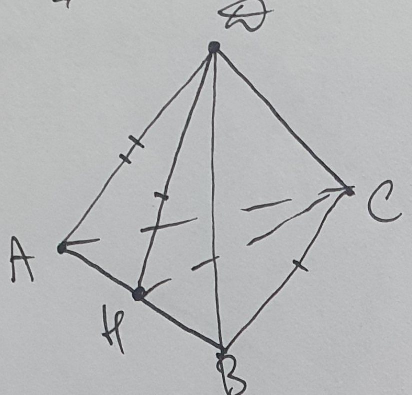
$\frac{D}{4}=121-133<0 \Rightarrow a_1^2+22a_1+133>0$ при $\forall a_1$

Случай, когда $d=2$ не подх.

Отв. $\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$

Чистовик③

№2.1.



$AB = 2$

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 6$

$CD = ?$

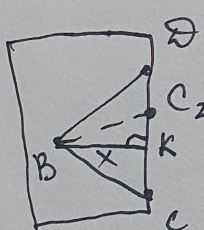
Тетраэдр $ABCD$ вписан в цилиндр, все вершины на боковых сторонах пов-ти. $CD \parallel$ оси цилиндра.

R цилиндра наим из возможных.

Какие значения может принимать CD?

Пусть H – середина AB, тогда $DH \perp AB$ (из равности $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$) $\Rightarrow AB \perp (CDH)$

Изобр. сечение цилиндра плоскостью (CDH):

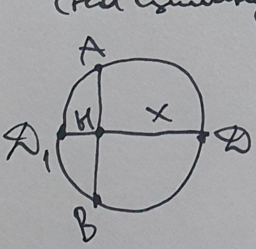


т-ки A и H находятся „за" т. B.

x – расстояние от AB до CD ($x = HK$), где K – осн. высоты в $\triangle HCD$

C_2 – второе возм расп. C при том же x.

Вид сверху: (на цилиндр)



$AB = 2, HD = x.$

по св-ву пересек. хорд $D_1H \cdot HD = AH \cdot HB$

$(2R - x)\cdot x = 1 \cdot 1$

$2Rx - x^2 - 1 = 0$

$2Rx = x^2 + 1$

$R = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

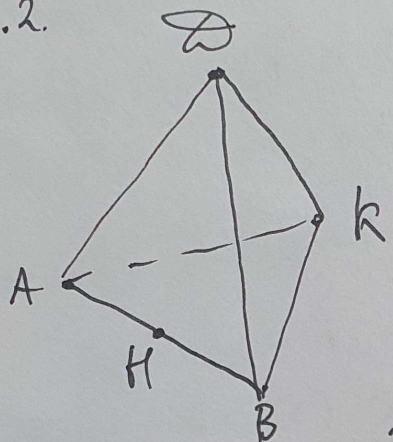
$x + \frac{1}{x} \geq 2$ и $= 2 \Rightarrow x = 1$

наим. возм. R достигается, если $x = 1$.

Прод. см. на №2.2.

Чистовик (4)

№ 2.2.



Т.о. в ситуации наим. R имеет $AH = HB = HK = 1$

Т.к. ABK – п/у и р/б.

1) Т.к. HK – общ. перпенд. к AB и CD, то $(ABK) \perp KD$ и $\angle AKD = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

2) $AK = \sqrt{2}$

3) $KD^2 = AD^2 - AK^2 = 36 - 2 = 34$

$KD = \sqrt{34}$ *

Аналогично KC:

$KC^2 = AC^2 - AK^2 = 5^2 - (\sqrt{2})^2 = 23$

$KC = \sqrt{23}$

Т.о. $CD = KC + KD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$ *

либо $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$ (*), когда C и D по одну сторону от K

Отв. $\sqrt{34} + \sqrt{23}$ или $\sqrt{34} - \sqrt{23}$.

(*) в системе „C_2"

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104464**

ID профиля: **834584**

Вариант 17

Чистовик (2)

№5.2.

$x = \frac{2}{7}$

2: $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{8}{7}+1}\left(\frac{1}{7}+2\right)^2 =$

$= \log_{\frac{15}{7}}\left(\frac{15}{7}\right)^2 = 2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_{\frac{15}{7}} \frac{10}{7} - 1 = \log_{\frac{15}{7}} \frac{3}{7} \neq 2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\sqrt{\frac{3}{7}}}\left(\frac{8}{7}+1\right) \neq 2$

$x = \frac{2}{7}$ – все подх.

3: $x = 10$

① $\log_{41}(49)$

② $\log_{7} 49 \neq \log_{41} 49$

③ $\log_{7} 41 \neq \log_{41} 49$

$\Rightarrow x = 10$ все подх.

Отв. $x = 2$.

№4 Чистовик 3

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Т.к. $НОК = 2^{15}\cdot 3^{16}$, то

$$\begin{cases} a=2^{x_1}\cdot 3^{y_1} \\ b=2^{x_2}\cdot 3^{y_2} \\ c=2^{x_3}\cdot 3^{y_3} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 39 \\ 14 \\ \hline +\,156 \\ 39 \\ \hline \times\, 546 \\ 3 \\ \hline 1638 \end{array}$$

Составим систему

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=15 \\ y_1+y_2+y_3=16 \\ \min(x_1,x_2,x_3)=1 \\ \min(y_1;y_2;y_3)=1 \end{cases}$$

Пусть $x_1=1$ и $y_1=1$, тогда

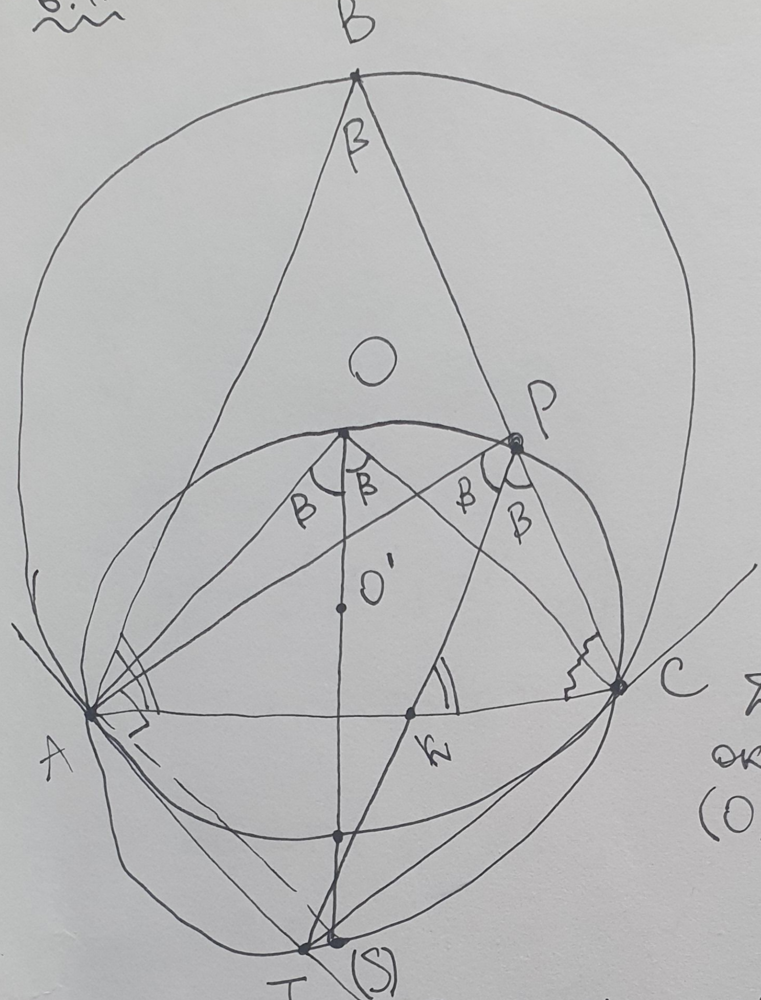
$$\begin{cases} x_2+x_3=14 - 13\text{ реш.} \\ y_2+y_3=15 - 14\text{ реш.} \end{cases}$$

Тогда всего: ~~14·15·3·3~~ $13\cdot 3\cdot 14\cdot 3=1638$

Отв. 1638.

Чистовик 4.

№6.1.



$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=4$

а) $S_{ABC}=?$

б) $AC=?$

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$

Решение:

а) O' – центр окр., опис. около $\triangle AOC$.

Достроим OO' до диаметра окр., опис. около $\triangle AOC$ (OS), тогда $\angle OAS=90°$.

$\Downarrow$

OS – кое $\Rightarrow$ S и T совпадают.

В $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ выс., проведённая из P – общая

$\Downarrow$

$\frac{AK}{KC}=\frac{3}{2}$ $\left(\begin{array}{l}\frac{AK\cdot h}{2}=6\\ \frac{KC\cdot h}{2}=4\end{array}\right)$

Пусть $\angle ABC=\beta$, тогда $\angle ABC=2\beta=\angle APC$, т.к. они опир. на одну и ту же дугу в окр., опис около $\triangle APC$.

$\angle APT=\frac{1}{2}\angle APC=\beta=\angle AOT$ – опир. на одну дугу

$\Downarrow$

PK – биссектр. $\angle APC$

$\angle KPC=\beta \Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$ ($\angle PKC=\angle BAC$, $\angle C$ – общ.)

$\frac{AK}{KC}=\frac{3}{2}$ $\frac{KC}{AC}=\frac{2}{5} \Rightarrow S_{ABC}=\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot S_{\triangle CPK}=\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 4=$
$=~~25~~$ 25

Отв. 25.

№ 6.2. Чистовик 5

б) $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{5}$ Пусть $\sin\beta = x$; $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{7}{5}$

$$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 74 \\ \hline 100 \\ +\,175\;\; \\ \hline 1850 \end{array}$$

$25x^2 = 49 - 49x^2$

$x^2 = \frac{49}{74} = ⊛$

$$\begin{array}{r} \times\, 250 \\ 7 \\ \hline 1750 \end{array}$$

$\angle BPA = \pi - 2\beta =$

$= \pi - (\pi - 2\beta) - \beta = \beta \Rightarrow AP = BP$, $\triangle ABP$ - р/с.

$S_{ABP} = 25 - 6 - 4 = 15$ Пусть $AB = \ell$:

$S_{ABP} = \frac{1}{2} AB\left(\frac{AB}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta\right) = \frac{\ell^2}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\ell^2}{20}$

$\frac{7\ell^2}{20} = 15 \Rightarrow \ell^2 = \frac{300}{7} \Rightarrow c = 10\sqrt{\frac{3}{7}}$

CH - высота в ABC

$\frac{1}{2} CH \cdot AB = 25 \rightarrow CH = \frac{50 \cdot \sqrt{7}}{10 \cdot \sqrt{3}} = 5\sqrt{\frac{7}{3}}$

$BC = \frac{CH}{\sin\beta} = \frac{5\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{\sqrt{74}}} = \frac{5 \cdot \sqrt{74}}{\sqrt{21}}$

Теперь ищем AC по т. косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta =$

$= \frac{300}{7} + \frac{25 \cdot 74}{21} - 2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{74}}{\sqrt{21}} \cdot \frac{5}{\sqrt{74}} =$

$= \frac{900}{21} + \frac{1850}{21} - \frac{2 \cdot 125 \cdot 7}{21} =$

$= \frac{900 + 1850 - 1750}{21} = \frac{1000}{21}$

$AC = \boxed{10\sqrt{\frac{10}{21}}}$

№5 Черновик (4)

Заметим, что $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log$

~~Чистовик~~ Черновик (5)

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Т.к. $НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$, то

$$\begin{cases} a=2^{x_1}\cdot 3^{y_1} \\ b=2^{x_2}\cdot 3^{y_2} \\ c=2^{x_3}\cdot 3^{y_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=15 \\ y_1+y_2+y_3=16 \\ \min(x_1,x_2,x_3)=1 \\ \min(y_1,y_2,y_3)=1 \end{cases}$$

Пусть $x_1=1$; $y_1=1$, тогда

$$\begin{cases} x_2+x_3=15 \Rightarrow 14 \text{ вариантов} \\ y_2+y_3=16 \Rightarrow 15 \text{ вариантов} \end{cases}$$

Тогда всего $15\cdot 14\cdot 9=1890$ вариантов

№5 Черновик (4)

(5)

Заметим, что $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log$

$\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=4$ *

(1) Если $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, а

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)-1$, то

$\log^2_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\left(\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)-1\right)=4$

$4\cdot\log^2_{5x-1}(4x+1)\cdot\left(2\log_{5x-1}(4x+1)-1\right)=4 \quad |:4$

$\log_{5x-1}(4x+1)=t$

$2t^3-t^2-1=0$

Заметим, что $t=1$ – решение

$\log_{5x-1}(4x+1)=1$

$4x+1=5x-1$

$x=2$

Проверим подх. ли $x=2$ под ОДЗ.

Подходит $\Rightarrow x=\boxed{2}$ – реш

$$
\begin{array}{r|l}
2t^3-t^2-1 & t-1 \\
-\ 2t^3-2t^2 & 2t^2+t+1 \\
\hline
t^2-1 & \\
-\ t^2-t & \\
\hline
t-1 & \\
-\ t-1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$D=1-8<0$

$\Downarrow$

$2t^2+t+1>0$ при $\forall t$

(2) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)-1$

Черновик 3

№ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5

$\cancel{\text{НОД}} = \cancel{2 \cdot 3}$

$\cancel{\text{НОК} = 2^{15} \cdot 3^{14} \cdot 6}$

$2\log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2 \cancel{} 4 \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) =$

$= 4 \cdot \frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)} \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) =$

$= 4 \cdot \log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{4}{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}$

$4 \cdot \log^2_{5x-1}(4x+1) = \frac{4}{\log_{5x-1}\cancel{(5x-1)}(4x+1) - 1}$

$4\log^3_{5x-1}(4x+1) - 4\log^2_{5x-1}(4x+1) - 4 = 0$

$t = \log_{5x-1} 4x+1$

$4t^3 - 4t^2 - 4 = 0$

$t^3 - t^2 - 1 = 0$

$\log^2_{5x-1}(4x+1) = \frac{1}{\log_{5x-1}(4x+1) - 1}$

~~$a^{\log_a b} =$~~

$\cancel{4} \log^{\cancel{2}3}_{5x-1}(4x+1) \cdot 2 \cancel{\log} - \log^2_{5x-1}(4x+1) - 1 = 0$

$\log_{5x-1}(4x+1) = t$

$2t^3 - t^2 - 1 = 0$

$t = 1$ – корень

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - t^2 - 1 & t-1 \\ -\underline{2t^3 - 2t^2} & 2t^2 + t + 1 \\ t^2 - 1 & D = 1 - 8 < 0 \\ -\underline{t^2 - t} & \\ t - 1 & \\ -\underline{t - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$\log_{5x-1}(4x+1) = 1$

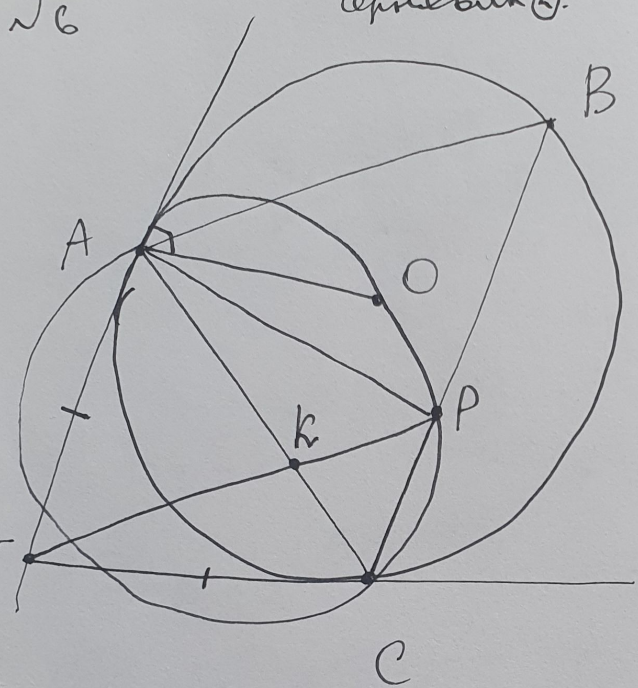
$\log_{5x-1}(4x+1) - \log_{5x-1}(5x-1) = 0$

$\log_{5x-1}\left(\frac{4x+1}{5x-1}\right) = 0$

$\frac{4x+1}{5x-1} = 1 \qquad x = 2$

$\frac{4x+1}{\cancel{5x-1}} = 5x-1$

№6 Черновик (2).



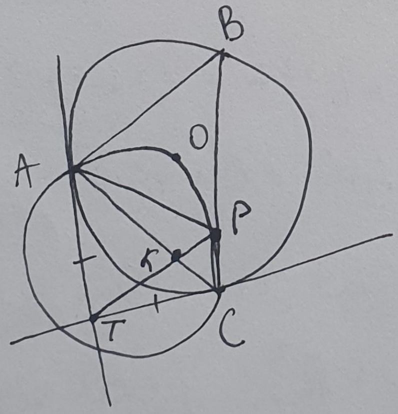
$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

a) $S_{ABC} = ?$

$$\frac{AP \cdot \cancel{PK} \cdot \sin\angle APK}{\cancel{2}} = \frac{PC \cdot \cancel{PK} \cdot \sin\angle KPC}{\cancel{2}}$$

~~AP~~.



1

Черновик 1: $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{7}{5}$

№1

$НОД(a;b;c)=6$

$НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$

$5\cos x = 7\sin x$

$\frac{\sin x}{\cos} = \frac{7}{5}$

$\times 14$, 15; 60, $+15$; 210

№5

1: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\rightarrow \log_3 9 = \log_9 9$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{7}{5}\cos x$

$1 = \frac{49}{25}\cos^2 x + \cos^2 x$

$\cos^2 x = \frac{25}{74}$

$\sin^2 x = 1-$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \frac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x\neq 2 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ x\neq -2 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$$

$2\log_{(5x-1)}(4x+1) = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\frac{x}{2}+2$

$4\log_{5x-1}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$

$= 4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\right) = 1$

$= 4$

$4\cdot\log^2_{5x-1}(4x+1)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\right) = 4$

$\log^2_{5x-1}(4x+1)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) + \log_{\frac{x+4}{2}}\left(\frac{2}{x+4}\right)\right) = 1$

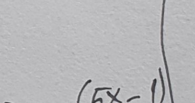
$\log^2_{5x-1}(4x+1)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{(5x-1)(x+4)}{2}\cdot\frac{2}{x+4}\right) = 1$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)\cdot\log_{5x-1}(4x+1) - \log^2_{5y-1}(4x+1) = 1$

$\log_{\frac{8}{7}+1}7\left(\frac{1}{7}+2\right)^2 = 2$

$\log_{\frac{15}{7}}\left(\frac{15}{7}\right)^2 = 2$

$\frac{AK}{KC}$



$\frac{h\cdot AK}{2}$ $h = 6$

$\frac{h\cdot KC}{2} = 3$

$\frac{AK}{KC} = 2$ $h = 12$

Черновик ①:

№5.1.

Заметим, что

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)}\cdot 2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^3\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$$

$$=4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=4 \text{ (на ОДЗ)}$$

Если два совпадают, а третье меньше на 1:

$$a^2(a-1)=4$$

$$a^3-a^2-4=0$$

$a=2$ – корень

$$\begin{array}{r|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \hline a^3-2a^2 & a^2+a+2 \\ a^2-4 & \\ a^2-2a & \\ 2a-4 & \\ 2a-4 & \\ 0 & \end{array}$$

$D=1-8<0$ ⇓ $a^2+a+2>0$ при $\forall a$

$$(a-2)(a^2+a+2)=0$$

$$a=2$$

1: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \to 4x+1=5x-1 \to x=2$ (подх. под ОДЗ)

2: $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \to \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1 \to 4x+1=\frac{x}{2}+2 \mid\cdot 2$

$8x+2=x+4$

$x=\frac{2}{7}$ – подх. под ОДЗ.

3: $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \to (5x-1)=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \mid\cdot 4$

$20x-4=x^2+8x+16$

$x^2-12x+20=0$

$\frac{D}{4}=36-20=4^2$

$x=\frac{6\pm4}{1}$

$\left[\begin{array}{l}x=10\\x=2\end{array}\right.$

Проверка: $x=2$:

1: $\log_3 9\neq\log_9 9$ или $\log_3 9=$

3: $\log_3($

1: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_3 9\neq\log_9 9$

2: $\log_{\frac{8}{7}+1}\left(\frac{1}{7}+2\right)^2=\log_{\sqrt{\frac{10}{7}-1}}$ ~~или~~ ① $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_3 9=\log_3 9$

② $\log_3 9-1=\log_9 9$ ~~$x=2$ подх~~

$\Rightarrow \boxed{x=2}$ подх.