Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104398**

ID профиля: **377481**

Вариант 17

Чистовик

математика, 11

$\boxed{В-17}$

№1

$S = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = 5a_1+5a_{10} = 10a_1+45d$, d — разность прогрессии $(a_2-a_1=d)$, $d>0$

По условию:

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1, \\ S+17 > a_7 a_{11}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1, \\ 10a_1+45d+17 > (a_1+6d)(a_1+10d); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+55d^2 > 10a_1+45d+1, \\ 10a_1+45d+17 > a_1^2+16da_1+60d^2; \end{cases}$$

Сложим нер-ва:

$$a_1^2+16da_1+55d^2+10a_1+45d+17 > 10a_1+45d+1+a_1^2+16da_1+60d^2$$

$5d^2<16 \Rightarrow d^2<\frac{16}{5}$ и т.к. $d>0$, то $\boxed{d<\frac{4}{\sqrt5}}$

$S = 10a_1+45d \Rightarrow a_1 = \frac{S-45d}{10}$, $d\in\left(0;\frac{4}{\sqrt5}\right)$

~~a_{max}~~ при $d\to 0$, $a_1\to a_{1max} \Rightarrow a_1<\frac{S}{10}$

при $d\to\frac{4}{\sqrt5}$, $a_1\to a_{1min} \Rightarrow a_1 > \frac{S-36\sqrt5}{10}$

Ответ: $a_1\in\left(\frac{S-36\sqrt5}{10};\frac{S}{10}\right)$.

Чистовик   математика, 11

$\boxed{В-17}$ №3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2, & \text{I} \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2); & \text{II} \end{cases}$$

Фигура M представляет из себя наложение всех кругов радиуса $\sqrt{2}$ с координатами центра $(a;b)$, где a и b такие, что $a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$

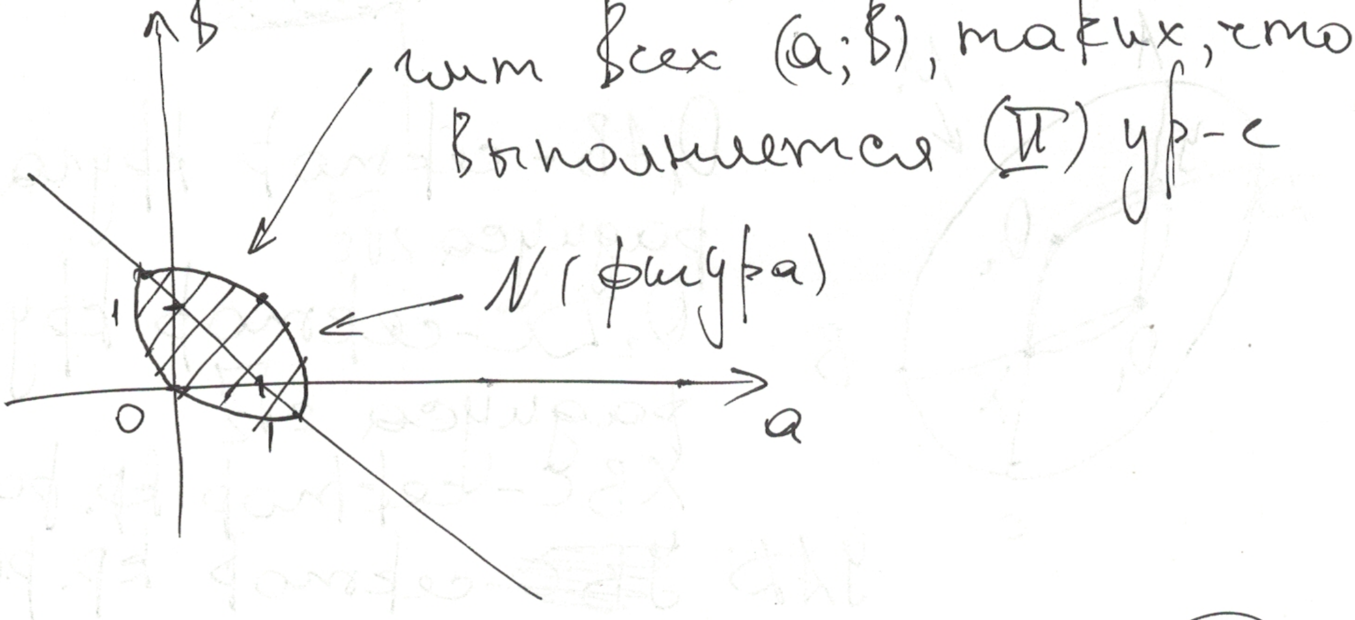
1) $\underline{a+b<1}$:

$a^2+b^2 \le 2a+2b \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

$\underline{a+b>1}$:

$a^2+b^2 \le 2$.

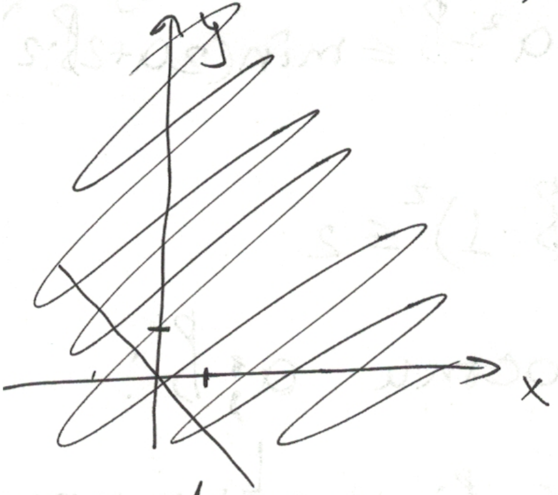
На плоскости $a;b$:

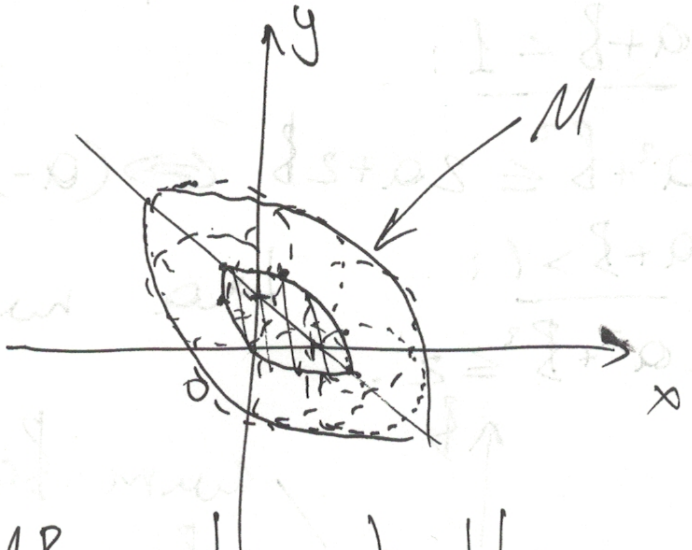


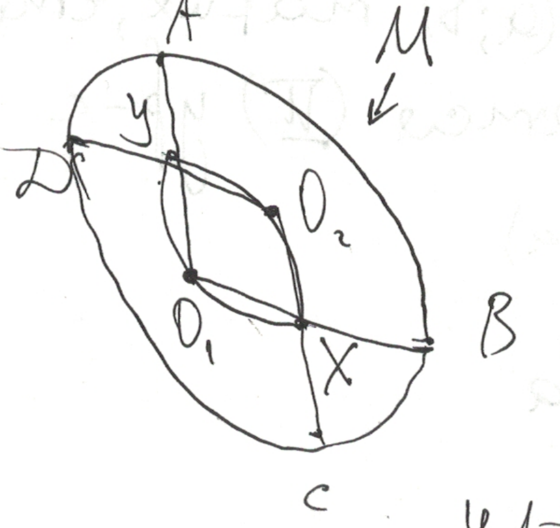
Чистовик математика, 11

№3

При переходе обратно в декарт. пл-ть в каждую т-ку фигуры N мы можем поместить центр круга радиуса $\sqrt{2}$. (N – пер-е двух кругов, одинак. центр одного лежит на краю другого). Т.о. M – „расширение" N на $\sqrt{2}$, т.е. почти пер-е. кругов, центры к-ых лежат в $(0;0)$ и $(1;1)$ и радиусы – $2\sqrt{2}$.







O_1AB – сектор круга радиуса $2\sqrt{2}$

O_2DC – сектор круга радиуса $2\sqrt{2}$

XBC – сектор кр. рад. $\sqrt{2}$

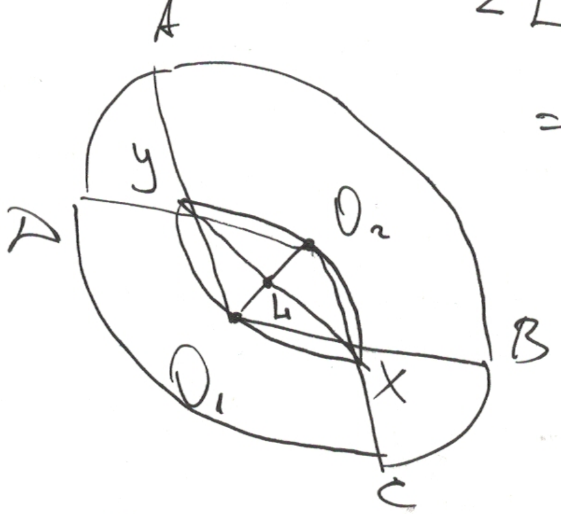
YAD ~~YBC~~ – сектор кр. рад. $\sqrt{2}$

Чистовик математика, 11

№ 3

$S_M = S_{O_1AB} + S_{O_2DC} + S_{XBC} + S_{YAD}$

$O_1O_2 = \sqrt{2} \Rightarrow O_1L = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и т.к. $O_1Y = \sqrt{2}$, то



$\angle LO_1Y = 60^\circ \Rightarrow \angle AO_1B = \angle DO_2C = 120^\circ \Rightarrow S_{O_1AB} = S_{O_2DC} = S_{\text{кр. рад. } 2\sqrt{2}} \cdot \frac{120}{360} = \frac{2\pi \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

Т.к. $\angle O_1XL = 90 - \angle LO_1X$, то

$\angle O_1XL = 30^\circ \Rightarrow \angle O_2XO_1 = \angle BXC = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{XBC} = S_{YAD} = S_{\text{кр. рад } \sqrt{2}} \cdot \frac{60}{360} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

$S_M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{\pi}{3}(8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) =$

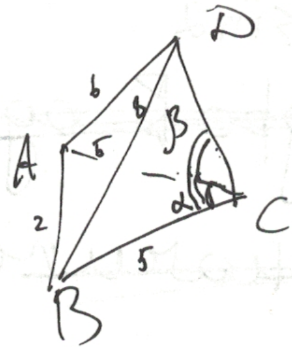
$= \frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$

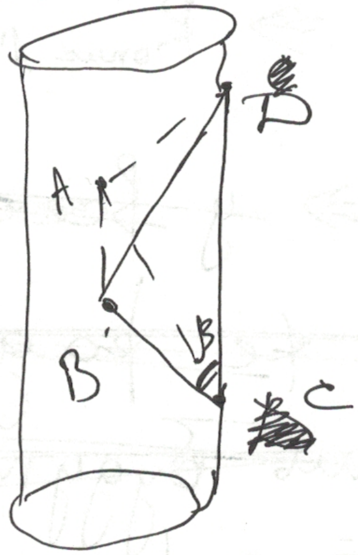
Ответ: $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$

Чистовик   математика, 11

$\boxed{В-17}$

№2

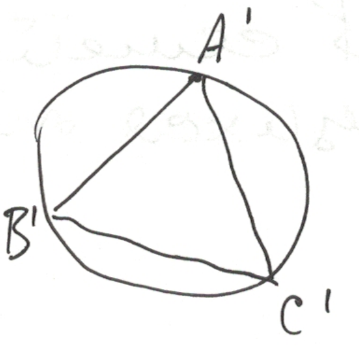




$\angle ACB = \alpha$

$\angle BCD = \beta$

Рассм. проекцию ABC на нижнее основание – это впис. треуг. $A'B'C'$:



$A'B'$ = проекц. AB

$A'C'$ и $B'C'$ – аналогич.

Причём, $A'B' = AB$, $A'C' = AC\sin\beta$, $B'C' = BC\sin\beta$

По теор. син: $R =$ (заметим, что $A'B'/\sin A'C'B'$

$\angle A'C'B' = \angle ACB = \alpha$

По теор. кос. в $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{50-4}{2\cdot 25} = \dfrac{46}{50} = 0{,}92. \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

Чистовик математика, 11

№2

$= \sqrt{0,1496} \Rightarrow R_{\text{опис } A'B'C'} = R_{\text{ц.}} = \frac{A'B'}{\sin\alpha} =$

$= \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow$ ~~у всех цилиндров один и тот же радиус, а значит, они лишь будут отличаться высотой~~ $\Rightarrow$ радиус цилиндра будет определяться лишь углом β – это единственный параметр. И при фикс. β. мы сможем вписывать лишь в семейство цил., отличающихся только высотой...

$S = a_1 + \dots + a_{10} = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot \cancel{5}10$ $\boxed{\text{Черновик}}$

~~$S=(a_5+a_6)\cdot 5$~~ $S=(a_1+9d)5$

$$\begin{array}{r} \times\ 45 \\ 16 \\ \hline 270 \\ 45 \\ \hline 720 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 45 \\ 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$\cancel{4}\ \frac{9\cdot5\cdot4}{\sqrt5} = 36\sqrt5$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > (a_1+9d)5+1$

$a_6\cdot a_{12} < S+1$

$a_6(a_{11}+d) > S+1$

$(a_6+d)(a_{11}) < S+17$

$a_1^2+16da_1+55d^2 > 5a_1+45d+1$

$a_1^2+a_1(16d-5)+55d^2-45d-1>0$

~~$D<0$~~

$55d^2+d(16a_1-45)+a_1^2-5a_1-1>0$

$D<0$

$256a_1^2-1440a_1+2025-220(a_1^2-5a_1-1)=$

$=256a_1^2-1440a_1+2025-220a_1^2+1100a_1+220=$

$=36a_1^2-340a_1+2245<0$

$(a_1+6d)(a_1+10d)<(a_1+9d)5+17$

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+60d^2<5a_1+45d+17 \\ a_1^2+16da_1+55d^2>5a_1+45d+1 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2+16da_1}+60d^2+\cancel{5a_1+45d}+1<\cancel{5a_1+45d}+17+\cancel{a_1^2+16da_1}+55d^2$

$5d^2<16$

$d^2<\frac{\sqrt{16}}{\sqrt5}=\frac{4}{\sqrt5}$

Черновик

$d < \frac{4}{\sqrt{5}} \to d \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$S = 5a_1 + 45d \to a_1 = \frac{S - 45d}{5} = \frac{S}{5} - 9d$

max:

$a_1 = \frac{S}{5} - 0 \Rightarrow a_1 < \frac{S}{5}$

min:

$a_1 = \frac{S}{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow a_1 > \frac{S}{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{S - 4\sqrt{5}}{5}$

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2, \\ a^2 + b^2 \le (2a + 2b; 2)\min \end{cases}$

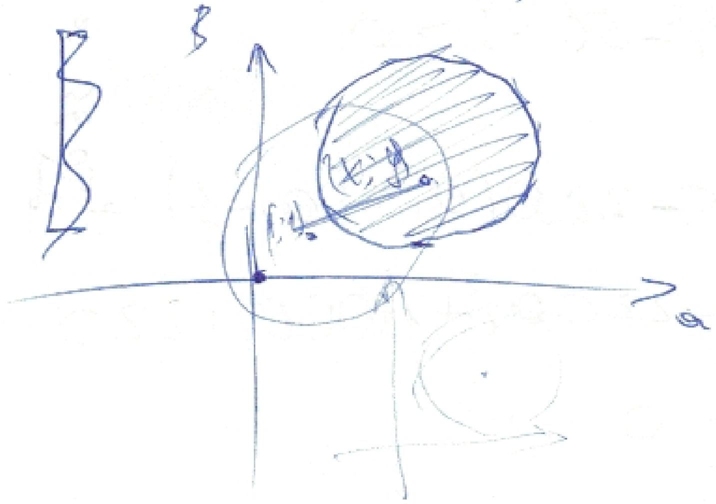
$a + b \le 1$

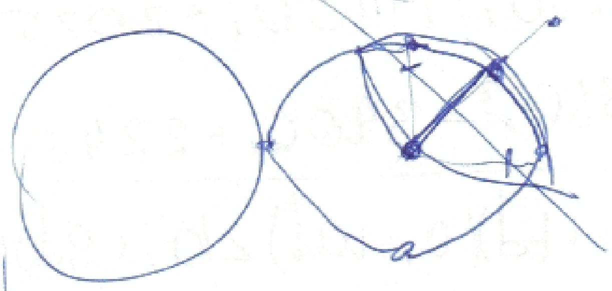
$a^2 + b^2 \le 2a + 2b$

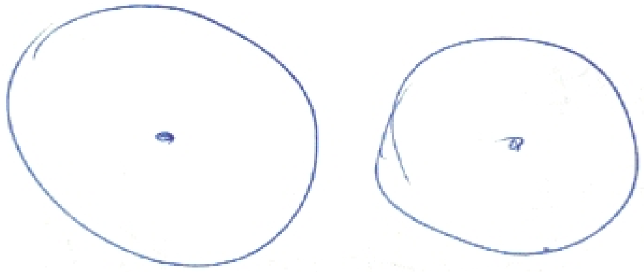
$a^2 - 2a + b^2 - 2b \le 0$

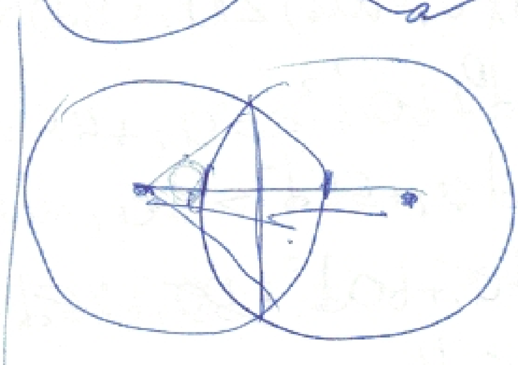
$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \le 2$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \le 2$



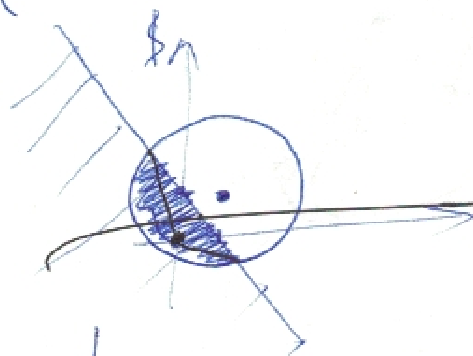


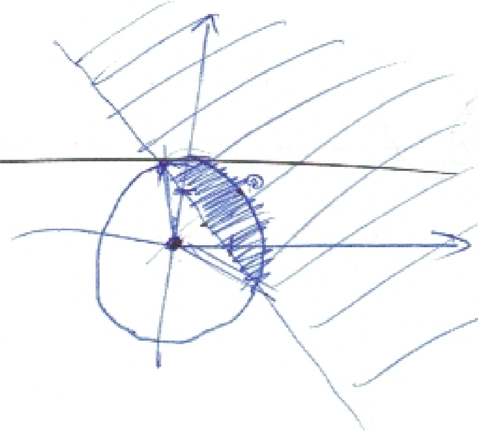


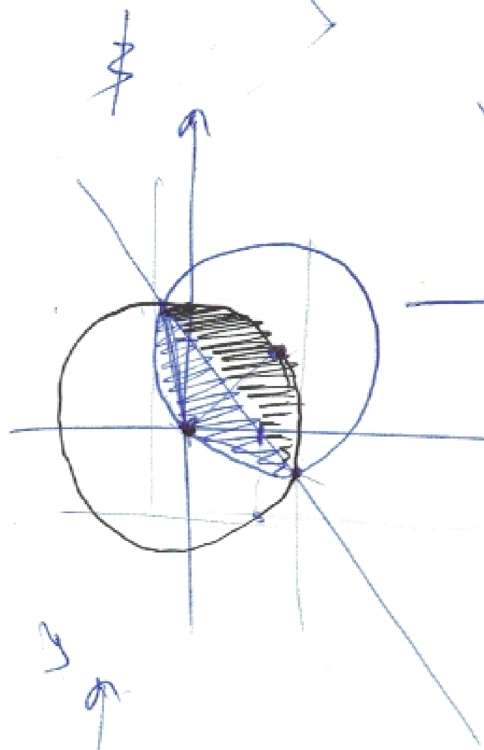


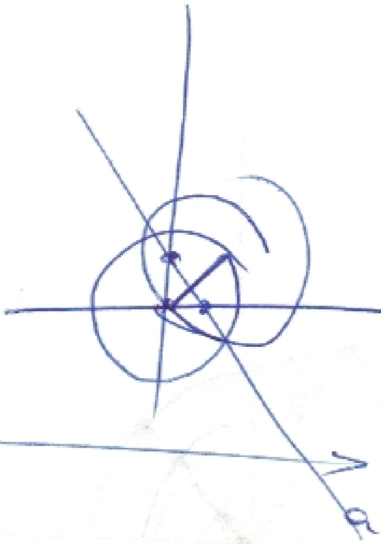
Параметр

$$\begin{cases} a+b<1 \\ \cancel{a^2+b^2}\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2 \end{cases}\qquad \begin{cases} a+b>1 \\ a^2+b^2\le 2 \end{cases}$$









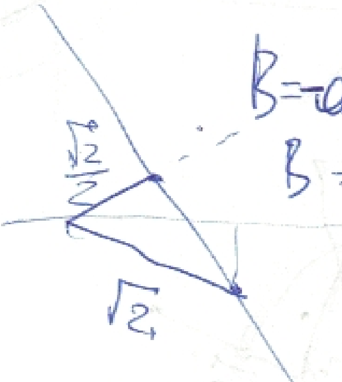
$\cancel{a^2+b^2=}$

$b=\sqrt{2-a^2}=1-a$

$2-a^2=a^2+1-2a$

$2a^2-2a+1=0$

$\cancel{D=4-}$



$b=-a+1$

$b=\sqrt{2-a^2}$

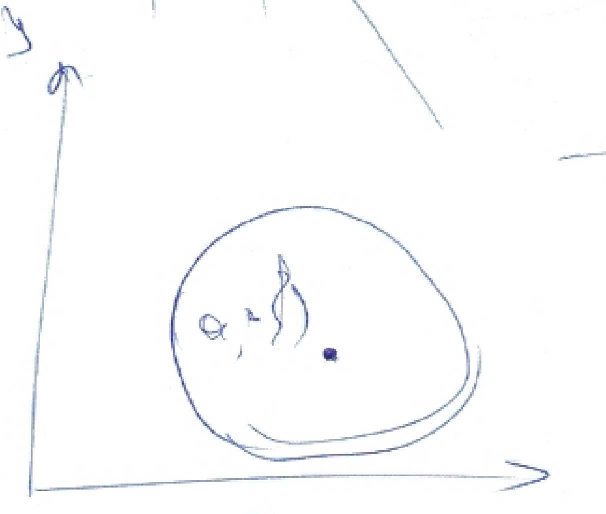
$2-a^2=1+a^2-2a$

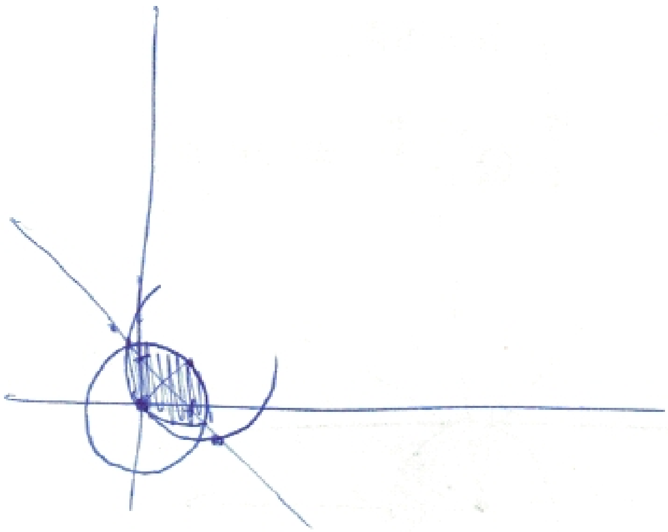
$2a^2-2a-1=0$

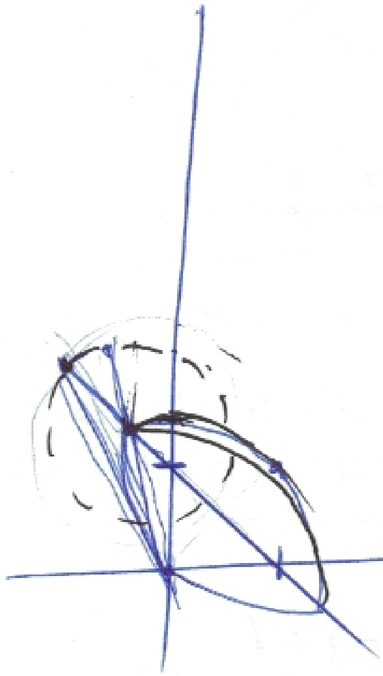
$D=4+8=12$

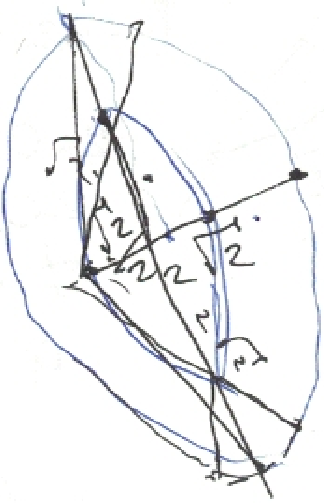
$a=\frac{2\pm\sqrt{12}}{4}=$

$=\frac{1\pm\sqrt3}{2}$

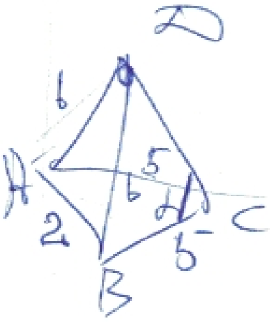


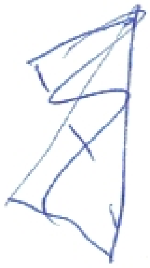


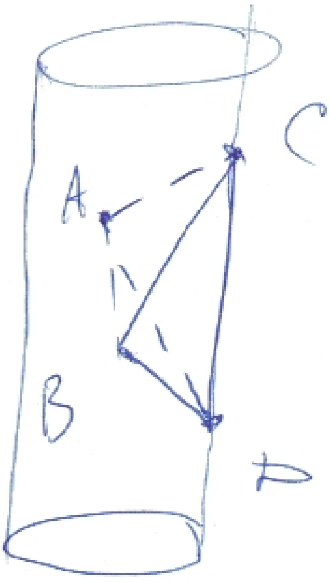




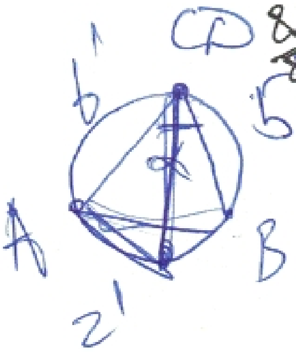
черновик







$$
\begin{array}{r}
\times\ 92 \\
92 \\
\hline
224 \\
828\ \ \\
\hline
8504
\end{array}
$$



$l \sin \alpha$

$$
\begin{array}{r}
10000 \\
8504 \\
1496
\end{array}
$$

$\times 92$

$R = \frac{2'}{\sin}$

1496

3

$$
\begin{array}{r}
\times\ 36 \\
36 \\
\hline
216 \\
108\ \ \\
\hline
1296
\end{array}
$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104398**

ID профиля: **377481**

Вариант 17

Чистовик математика, 11

$\boxed{В-17}$ №4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6=2^1\cdot3^1, \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot3^{16}; \end{cases}$$

Пусть: $a=2^{\alpha_1}\cdot3^{\beta_1}$, $b=2^{\alpha_2}\cdot3^{\beta_2}$; $c=2^{\alpha_3}\cdot3^{\beta_3}$, причём $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\beta_1\cdot\beta_2\cdot\beta_3\neq0$, $\alpha_{1,2,3}$ и $\beta_{1,2,3}\in\mathbb{Z}$ и $\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=15$, $\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=16$, $\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$, $\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=1$. Это всё следует из условия. Если ~~что~~ у кого-то степень двойки или тройки нулевая, то это ч-ло не делится на НОД, а если чья-то степень двойки больше 15 или степень тройки больше 16, то НОК не поделится на это ч-ло. Очевидно, иных простых чисел в разложении нет (тогда бы НОК не поделился на ч-ло, к-е делится на p, $p\neq2$, $p\neq3$, p - простое).

Т.о. одно из $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ равно 1, другое - 15, а третье - любому ч-лу от 1 до 15. Аналогично с β_1,β_2,β_3: одно равно 1, другое - 16, а третье - от 1 до 16. Посчитаем кол-во троек $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ и перемножим (т.к.

Чистовик

математика, 11

№1

$(2;3)=1$, то при перемножении мы не подсчитаем какие-то два или три одинаковых набора (a, b, c)). Полученное ч-ло будет ответом.

Для α:

~~$A = C_3^3 \cdot 3! \cdot 15 - 6$, кол-во троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где нам важен порядок~~. Мы вычитаем 6, потому что мы посчитали 6 комбинаций дважды (потому что третье число может быть и 1, и 15):

α_1	1	1	1	15	15	15
α_2	1	15	15	1	1	15
α_3	15	1	15	1	15	1

Т.о. $A = -6 + 15 \cdot 3!$ ← кол-во перестановок $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$.

кол-во вариантов для „третьего" ч-ла

$A = -6 + 90 = 84$. – кол-во троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Аналогично для β: мы также вычитаем 6:

$B = -6 + 16 \cdot 3!$ ← кол-во перестановок β $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$

кол-во вариантов для „третьего" ч-ла

2

Чистовик

математика, 11

№4

B - кол-во троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -6 + 96 = 90$

Т.о. ответ - $A \cdot B = 90 \cdot 84 = 7560$

Ответ: 7560

Чистовик математики, 11

№ 5

Пусть $\sqrt{5x-1}=a$, $4x+1=b$, $\frac{x}{2}+2=c$

Тогда имеем: $\log_a b$, $\log_b c^2$, $\log_c a^2$

или (метод пер-а к новому основ.)

$\underbrace{\frac{\log_c b}{\log_c a}}_{n}$, $\underbrace{\frac{2}{\log_c b}}_{y}$, $\underbrace{2\log_c a}_{z}$.

① $y=z$:

Тогда $y\cdot z=4\frac{\log_c a}{\log_c b}=\frac{4}{n}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{4}{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}$

По усл: $y-n=1$, т.е. $\frac{2}{\sqrt{n}}-n=1 \Leftrightarrow \sqrt{n}^3+\sqrt{n}-2=0$

$\sqrt{n}=1 \Rightarrow n=1 \Rightarrow \log_c b=\log_c a \Rightarrow a=b$

$\sqrt{5x-1}=4x+1 \Rightarrow$ ~~$25x^2$~~ $5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2=0$, $D<0 \Rightarrow$ нет к-ней.

② $n=y$:

Тогда $\frac{n}{y}=1$: $\frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\frac{\log_c b}{2}=1$

$\log_c^2 b=\log_c a^2=z$.

Тогда, подставляя $\sqrt{z}$ вместо $\log_c b$,

Чистовик математика, 11

№ ~~2~~5

получим:

$y=\frac{2}{\sqrt{x}}$, $\cancel{x}n=\frac{2}{\sqrt{x}}$, $x=x$

По усл: $y-x=1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^3+\sqrt{x}-2=0$. Решение лишь одно $\sqrt{x}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow \log_c a^2=1 \Rightarrow c=a^2 \Rightarrow \frac{x}{2}+2=5x-1 \Leftrightarrow 5x-\frac{x}{2}=3 \mid \cdot 2$

$9x=6 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

3) $n\cancel{x}=x$:

Аналогично: $\frac{\cancel{x}n}{x}=1$ и, проделав всё так же как и во 2), получим

$\sqrt{y}=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \log_b c^2=1 \Rightarrow b=c^2$

$4x+1=\frac{x^2}{4}+2x+4 \mid \cdot 4$

закончилась ручка

$16x+4=x^2+8x+16 \Rightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow x=6, x=2$

Подставим $2/3; 6; 2$ в исходные числа, ничего не нарушается, они входят в ОДЗ

Ответ: $2/3; 6; 2$

Чистовик математика, 11

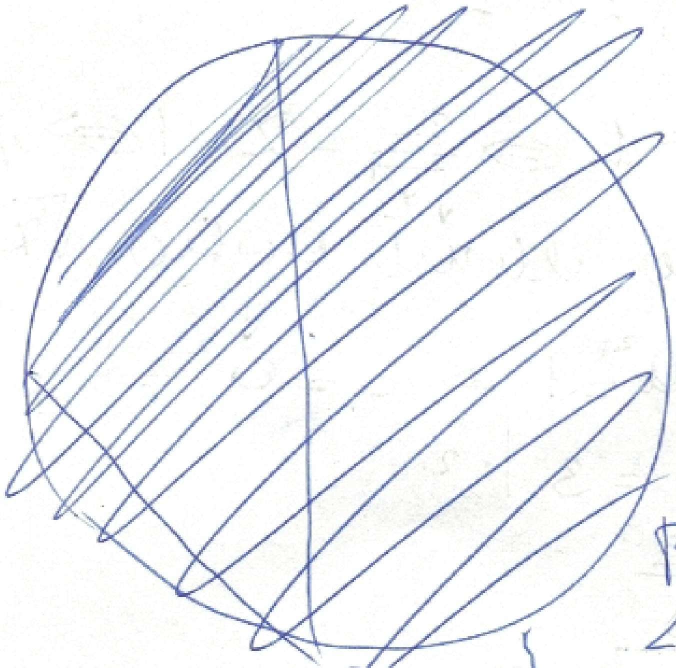
В-17 №6

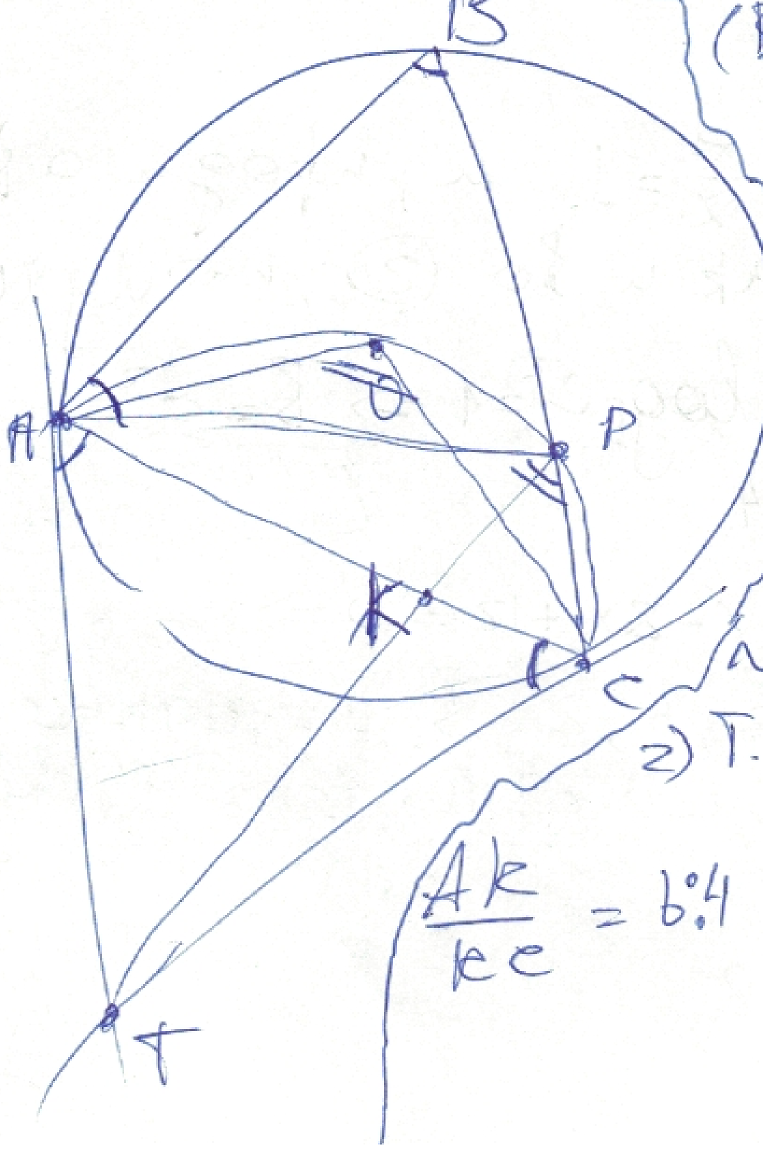
1) $\angle TCA = \angle TAC = \angle ABC$ (угол между хорд. и касат.).

$\angle AOC = \angle APC$ (AOPC – впис. четырехугольник).

$\angle AOC = \angle APC = 2\angle ABC$ (впис и центр. углы)

$\angle APC = \angle ABC + \angle BAP \Rightarrow \angle BAP = \frac{\angle APC}{2} = \frac{\angle AOC}{2} \Rightarrow \angle ABC = \angle BAP \Rightarrow \triangle ATC \sim \triangle BPA$.





2) Т.к. $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{4}$, то

$\frac{AK}{KC} = 6:4$

черновик

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_a b$, $\log_b c^2$, $\log_c a^2$

$\cancel{\overset{x}{\frac{\log_c b}{\log_c a}}, \overset{y}{\frac{2}{\log_c b}}, \overset{z}{2\log_c a}}$

$a^2-(a-1)=a^2-a+1$

$\cancel{x=y}$

$\cancel{x=}\ y=z$

$y\cdot 2=4\frac{\log_c a}{\log_c b}=\cancel{\log_a b\cdot 4}\ 4\cdot\log_b a$

$\cancel{x=\log_b a}$ $x=\log_a b$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}$, $2\log_c b$, $2\log_c a$

$2\log_c a$

$x=y$

$\cancel{\frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\frac{2}{\log_c b}=\frac{2}{\log_c a}=2\log_a c=}$

$\cancel{2(\log_a c-\log_c a)=\frac{\log_a^2 c-1}{\log_a c}}$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\frac{\log_c b}{2}=\frac{\log_c^2 b}{\log_c a^2}=1$

c, $\frac{2}{\sqrt{c}}$, $\frac{\sqrt{c}}{2c}$

$\log_c a^2=\log_c^2 b$

Черновик

$$\begin{cases} a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1} \\ b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2} \\ c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1 \\ \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 15 \\ \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 16 \end{cases} \end{cases}$$

(НОД и НОК)

$$\begin{aligned} a &= xy \\ b &= xz \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} (a;b) &= x \\ \text{НОК}(a;b) &= xyz \\ a\cdot b &= x^2yz \end{aligned}$$

$a\cdot b =$

$15\cdot 16 \rightarrow 240$

$$-15\begin{cases} \alpha_1 = 1 & -1 \\ \alpha_2 = 15 & -1 \\ \alpha_3 = [1; 15] \end{cases}$$

α_1 –	1	1	0	0	15	15
α_2 –	15	0	15	1	1	0
α_3 –	0	15	1	15	0	1

~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~15~~	~~1~~	~~15~~	~~15~~	~~15~~	~~15~~	~~15~~
~~15~~	~~15~~	~~1~~	~~15~~	~~15~~	~~15~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~15~~
~~1~~	~~15~~	~~15~~	~~15~~	~~1~~	~~1~~	~~15~~	~~15~~	~~1~~	~~15~~	~~1~~	~~1~~

$6\cdot 15$

~~$90 - 1$~~

$90 - 6 =$

$= 84$

$3 - 6\cdot 16 - 6 = 90$

Черновик

$\log_a b, \log_b c^2, \log_c a^2 = 2\log_c a,$

$\log_a b = x$, $\log_b c^2 = y$, $\log_c a^2 = z$

$x = z$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \frac{1}{2\log_c a} = 1$$

$\log_c b = 2\log_c^2 a$

$\log_{c^2} b = \log_c^2 a = \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\log_c b$

$\frac{1}{y}, \frac{2}{\sqrt{y}}; \frac{2\sqrt{y}}{y} = \frac{2}{\sqrt{y}}$

$\frac{2}{\sqrt{y}}, y, \frac{2}{\sqrt{y}}$

$-y + \frac{2}{\sqrt{y}} = 1$

$y = 1$

черновик

2.
$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1),\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2,\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

a B B c^2 c a^2

$\log_a B,\ \log_B c^2,\ \log_c a^2$

x y z

$x = \frac{\log_c B}{\log_c a};\ y = \frac{2}{\log_c B};\ z = 2\log_c a$

$x = y;\ \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow$

$\frac{\log_c^2 B}{\log_c a^2} = 1 \Rightarrow \log_c a^2 = z = \log_c^2 B$

$z,\ \frac{2}{\sqrt{z}},\ \frac{\sqrt{z}\,2}{z} = \frac{2}{\sqrt{z}}$

$\cancel{z-\frac{2}{\sqrt{z}}}$ $\frac{2}{\sqrt{z}} - z = 1 \quad |\cdot\sqrt{z}$

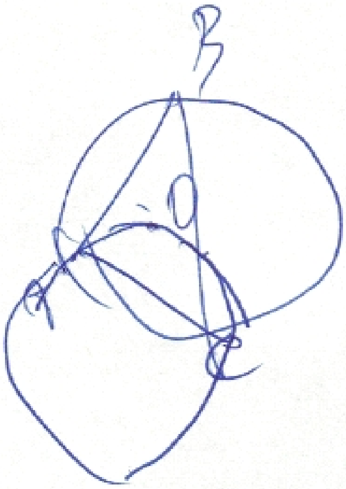
$2 - z\sqrt{z} = \sqrt{z} \Rightarrow \sqrt{z}^3 + \sqrt{z} - 2 = 0$

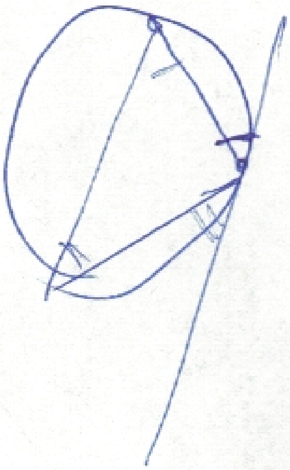
$\cancel{a^3+a-2=0}$ $\sqrt{z} = 1 \Rightarrow z = 1,$

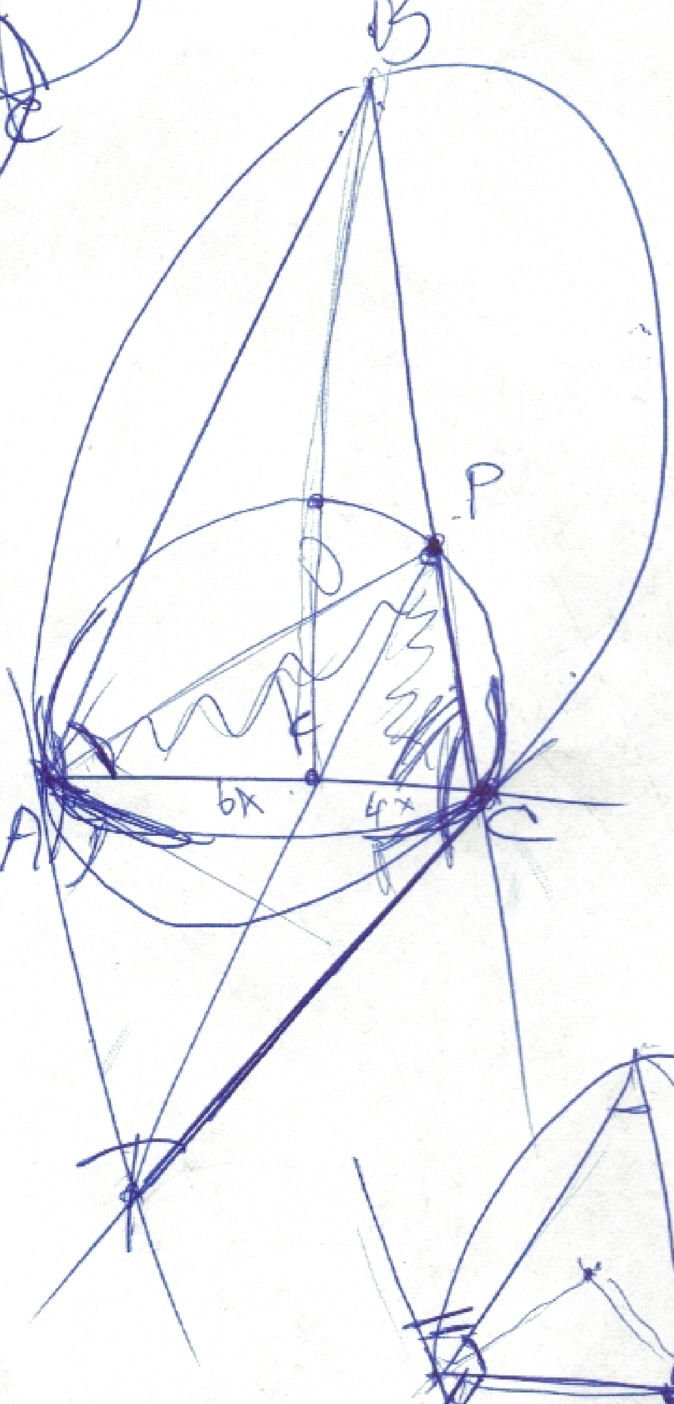
$$\begin{array}{l|l} a^3+a-2 & a-1 \\ \underline{a^3-a^2} & a^2+a+2 \\ \quad a^2+a & \\ \quad \underline{a^2-a} & \\ \qquad 2a-2 & \\ \qquad \underline{2a-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

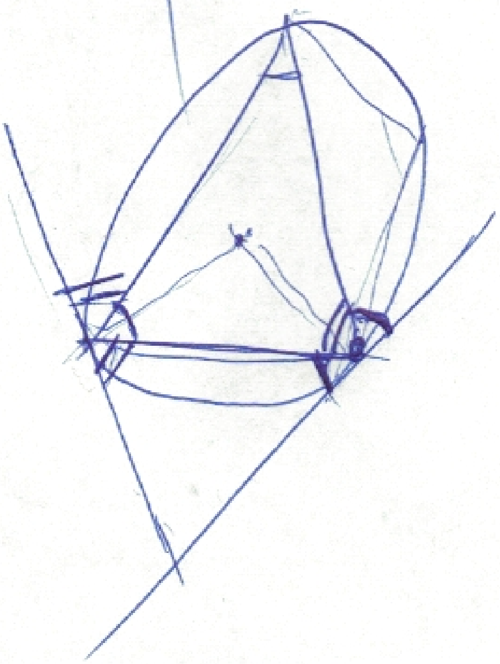
$a^2 = c$

Черновик









Черновик