Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104295**

ID профиля: **862725**

Вариант 17

$a_i \in \mathbb{Z}$

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$

№1. Чистовик.

$$S=\frac{(a_1+a_1+d(n-1))n}{2}=\frac{(2a_1+d(n-1))n}{2};\ n=10$$

$a_6=a_1+5d$

$a_{12}=a_1+11d$

$a_7=a_1+6d$

$a_{11}=a_1+10d$

$$\begin{array}{r}45\\+17\\\hline 62\end{array}\qquad \begin{array}{r}55\\-46\\\hline 9\end{array}$$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{(2a_1+d(9))10}{2}+1\\ (a_1+6d)(a_1+10d) < \frac{(2a_1+9d)10}{2}+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+11da_1+5da_1+55d^2 > 5(2a_1+9d)+1\\ a_1^2+10a_1d+6a_1d+60d^2 < 5(2a_1+9d)+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+16da_1+55d^2 > 10a_1+45d+1\\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17\end{cases}$$

Сложим 2-а неравенства.

$$\underline{a_1^2}+\underline{16da_1}+55d^2+\underline{10a_1}+\underline{45d}+17 > \underline{10a_1}+\underline{45d}+1+\underline{a_1^2}+\underline{16a_1d}+60d^2$$

$55d^2+17 > 1+60d^2$

$16 > 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d < \frac{4}{\sqrt5}$ Откуда $d=1$.

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46\\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0\\ a_1^2+6a_1-2<0\end{cases}$$

$-3; -3$

$$\begin{cases}(a_1+3)^2>0 & a_1\neq-3\\ a_1^2+6a_1-2<0 & a_1\in[-6;0]\end{cases}$$

$a_1^2+6a_1-2<0$

$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(-2)=9+2=11$

$a_1=-\frac{3+\sqrt{11}}{1}=-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{D}}{4}$ / a

$a_2=-\frac{3-\sqrt{11}}{1}$

$-7<-3-\sqrt{11}<-6$

$0<-3+\sqrt{11}<1.$

$+ \quad -6 \quad - \quad +$

$-3-\sqrt{11} \quad 0 \quad -3+\sqrt{11}$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0.$

и 2 Чистовик:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$ $a, b \in R$

(круг)

Первое уравнение задаёт окружность с центром $(a;b)$ и радиусом $(\sqrt{2})=R$; (Вместе с точками внутри)

Для второго уравнения можно привести пример удовлетворяющий условию: $a=b=\frac{1}{2}$

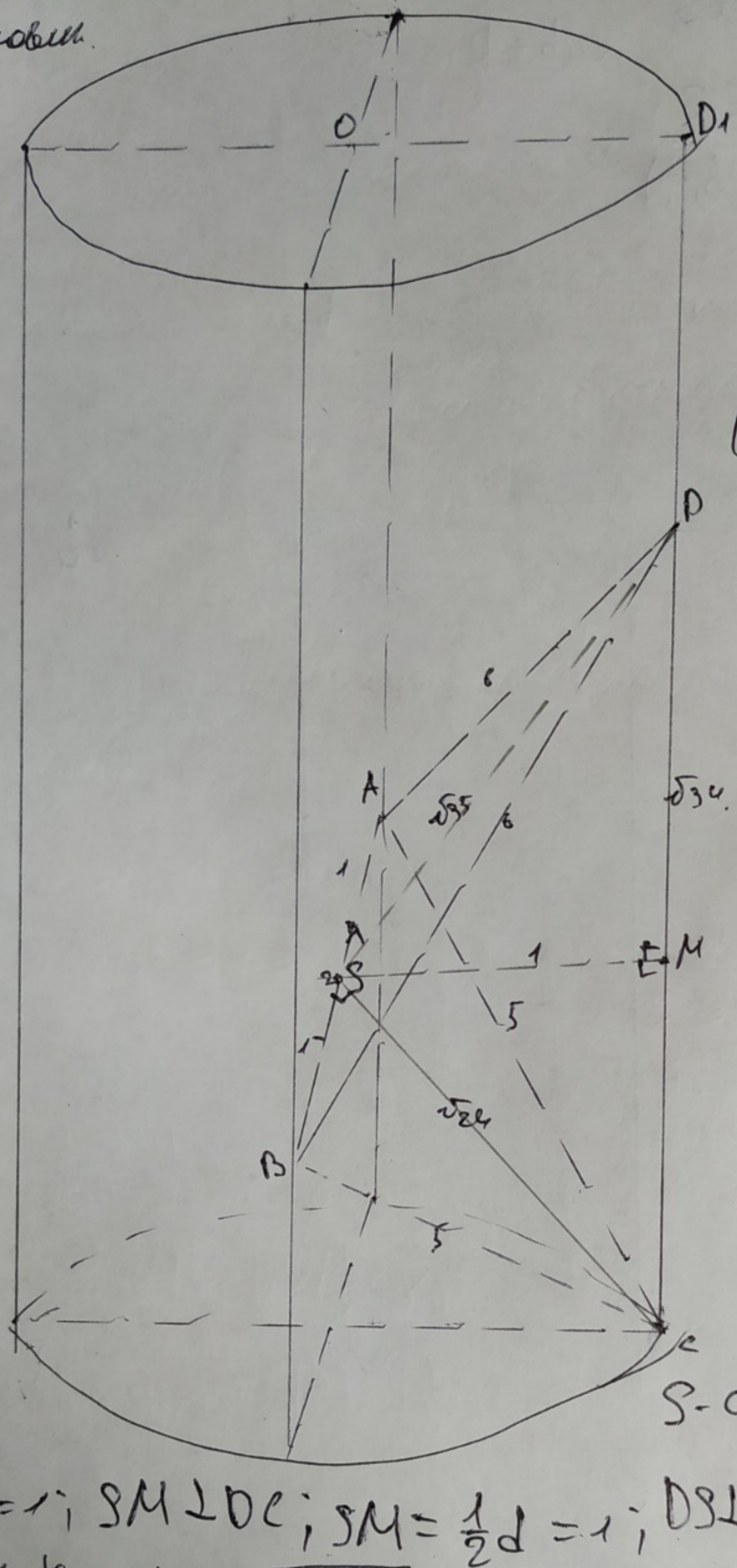
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le \min\left(2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \le \min(2,2)=2$$

$\frac{1}{2} \le \min(2,2)$. Площадь фигуры равна $\pi R^2=\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$ Ответ: 2π

21104295 (U862725 M1298985)

№8 Чистовик.



Решение.
Заметим что диаметр цилиндра обязан совпадать с AB, иначе тетраэдр можно будет растянуть в высоту (вдоль CD) так что AB съедет к правому концу цилиндра и в нем можно будет построить еще один меньшего диаметра. Так же DC лежит на стороне цилиндра, перпендикулярно основанию. O-центр основания т.ж. $AB \parallel$ плоск. осн. т-к $\triangle ADB$-равнобедренный S-середина AB;

$AS=SB=1$; $SM \perp DC$; $SM=\frac{1}{2}d=1$; $DS \perp AB$ (как высота в равнобедр.; $DS=\sqrt{AD^2-AS^2}=\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$ $DM=\sqrt{DS^2-SM^2}=\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$; $CS=\sqrt{BC^2-BS^2}=\sqrt{25-1}=\sqrt{24}$ $MC=\sqrt{SC^2-SM^2}=\sqrt{24-1}=\sqrt{23}$; $DC=\sqrt{23}+\sqrt{34}=DM+MC$

Ответ $DC=\sqrt{23}+\sqrt{34}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104295**

ID профиля: **862725**

Вариант 17

$a, b, c \in N$

№1. $a = d \cdot a_1;\ b = d \cdot b_1;\ c = d \cdot c_1$.

$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 6 \\ НОК(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$

$НОД(a_1; b_1; c_1) = 1$.

$d = 6$ когда $НОД(a_1, b_1, c_1) = 1$.

Рассмотрим принципиальные случаи.

(2) (3) ... (2, 3) - (1) - будем обозначать вхождения $2^q; 3^m$; или $2^k \cdot 3^s$ в ненулевой степени в число $a_1, b_1; c_1$.

Рассмотрим случаи, не учитывая перестановки и подсчитаем.

a b c

(2) (2) (3) - 13

(2) (3) (3) - 14

(2, 3) (2) (3) - 13 · 14

1 1 (2; 3) - 1

1 (2, 3) (2, 3) - 13 · 14

1 (2, 3) (2) · 13

1 (2, 3) (3) · 14

$2^{14}; 3^{15}$

13 14

Итого 13 + 14 + 13 · 14 + 1 + 13 · 14 + 13 + 14.

~~3 137~~

26 + 2 · 13 · 14 + 28 + 1 = 419

26 + 364 + 29

364 + 55

$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 14 \\ \hline 52 \\ 13 \\ \hline 182 \end{array}$

$\begin{array}{r} 182 \\ \times\ 2 \\ \hline 364 \end{array}$

$\begin{array}{r} 364 \\ +\ 55 \\ \hline 419 \end{array}$

$\begin{array}{r} 419 \\ \times\ 6 \\ \hline 2514 \end{array}$

Умножим на число перестановок $3! = 6$

Ответ: 2514.

21104295 (U862725 M1298986)

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2\log_{5x-1}(4x+1) = 2A$ №2 Чистовик

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2B$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1) = C$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x\neq \frac{2}{5} \\ x\neq 0 \\ \frac{x}{2}+4\neq 2 \end{cases}$ $x>\frac{1}{5}$ $x\neq\frac{2}{5}$ $\cancel{x}\neq -2$

~~1-вый случай~~ $\cancel{\begin{cases} \frac{1}{2}A = 2B \\ C+1 = \frac{1}{2}A \end{cases} \quad \begin{cases} A = 4B \\ 2C+2 = A \end{cases}}$

$\cancel{A\cdot B = \log_{5x-1}(4x+1)\cdot\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{C}}$

$\cancel{A\cdot\frac{A}{4} = \frac{1}{C};\quad A^2 = \frac{4}{C};\quad C = \frac{4}{A^2};\quad 2\cdot\frac{4}{A^2}+2 = A}$

$\cancel{8+2A^2 = A^3;\quad A^3-2A^2-8=0}$

1-вый случай $\begin{cases} 2A=2B \\ C+1=2A \end{cases}$ $\begin{cases} A=B \\ C+1=2A \end{cases}$

$A\cdot A = \log_{(5x-1)}(4x+1)\cdot\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right) = \frac{1}{C} = A^2;\quad C = \frac{1}{A^2}$

$\frac{1}{A^2}+1 = 2A;\quad 1+A^2 = 2A^3;\quad 2A^3-A^2-1=0$

$$\begin{array}{r|l} 2A^3-A^2-1 & A-1 \\ \cline{2-2} -\;2A^3-2A^2 & 2A^2+A+1 \\ \hline -\;A^2-1 & \\ A^2-A & \\ \hline A-1 & \end{array}$$

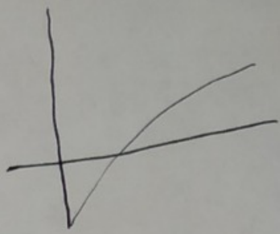
$A_1=1$ $\quad 2A^2+\cancel{2}A+1=0$

$D = 1^2-4\cdot 2\cdot 1$

1

(2)

Значит $A = B = 1$.



$\log_{5x-1}(4x+1) = 1$

$5x - 1 = 4x + 1$

$x = 2$

Проверка.

$C = \log_{(4+2)}(5\cdot 2 - 1) = 2.$

2. случай

$\cancel{\begin{cases} 2\cdot A = C\cdot 2 \\ 2B + 1 = A\cdot 2 \end{cases}}$ $\quad \cancel{A = C;\ A\cdot C = 6}$

$\cancel{C = \frac{1}{A^2}}$ $\quad \cancel{A = \frac{1}{A^2};\ A^3 = 1;\ A = C = 1}$

$\cancel{\log_{5x-1} 4x+1 = 1}$

$5x - 1 = 4x + 1$

$x = 2$

$\cancel{\begin{cases} 2A = C \\ 2B + 1 = A\cdot 2 \end{cases}}$ $\quad \cancel{B = \log_{(4\cdot 2+1)}(1+2) = \frac{1}{2} = \log_9 3}$

$\cancel{C = \frac{1}{A^2}}$

$\cancel{2A = \frac{1}{A^2};\ 2A^3 = 1;\ A^3 = \frac{1}{2};\ \log_{(5x-1)} 4x+1 =}$

$\begin{cases} 2A = C \\ 2B + 1 = 2A \end{cases}$ $\quad A\cdot B = \frac{1}{C};\ C = \frac{1}{AB}$

$2A = \frac{1}{AB};\ 2A^2B = 1;\ B = \frac{1}{2A^2}$

$\frac{1}{A^2} + 1 = 2A$

$A^2 + 1 = 2A^3;\ 2A^3 - A^2 - 1 = 0$ $\quad A = 1$ Откуда $x = 2$.

3-ий случай

$\begin{cases} 2B = C \\ 2A + 1 = 2B \end{cases}$ $\quad A\cdot B = \frac{1}{C};\ C = \frac{1}{AB};\ 2B = \frac{1}{AB};\ 2B^2A = 1$

$A = \frac{1}{2B^2}$

$1 + B^2 = 2B^3$ $\quad \frac{1}{B^2} + 1 = 2B^2$

$2B^3 - B^2 - 1 = 0$ Откуда $B = 1$ и то...

единственный корень. (3)

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 1$ Проверка.

$\frac{x}{2}+2 = 4x+1$

$x+4 = 8x+2$

$7x = 2$

$x = \frac{7}{2}$

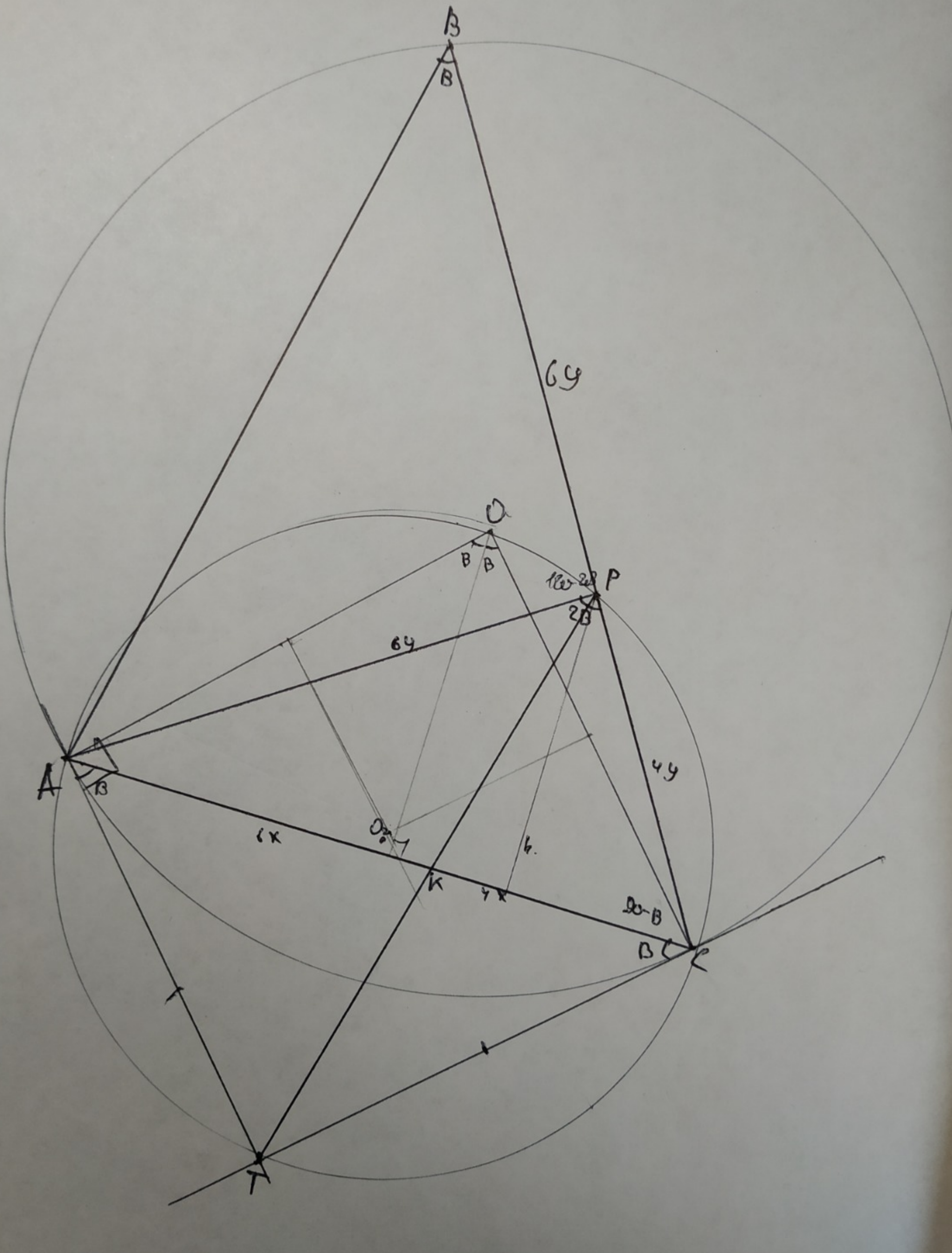
$\cancel{2\cdot 1 = \log\left(\frac{7}{2}+2\right)\left(5\frac{7}{2}-1\right) = \log\left(\frac{7+4}{2}\right)\cdot\left(\frac{35-2}{2}\right)}$

$2b = c = \log\left(\frac{7}{2\cdot 2}+2\right)\left(5\cdot\frac{7}{2}-1\right) = \log\left(\frac{7+8}{4}\right)^{15}\cdot\left(\frac{35-2}{2}\right)^{33}$

Не подходит:

Ответ: $x = 2$

Чистовик № 6



21104295 (U862725 M1298986)

Решение (6)

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{6}{4}$; $\angle ABC = \angle B$

$\angle AOC = 2B = 2\angle APC$ т.к. опираются на $\frown AC$; $\angle ACT = \angle ABC = B$ как угол между касательной и секущей; $\angle TAC = \angle ABC$; значит $AT = TC$

$S_{ABK} = \cancel{AP \cdot PK}$ $AK \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 4$

$KC \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 6$

$\frac{AC}{\sin 2B} = 2R$

$\frac{10x}{\sin 2B} = 2R$; $\frac{5x}{\sin 2B} = R$; $R = OA$

$S_{APC} = S_{APK} + S_{KPC} = 10$

$\frac{R^2 \sin 2B}{2} = 10$

$R^2 \sin 2B = 20$

$5x = R \sin 2B$

$R \cdot 5x = 20$

$Rx = 4.$

$AC = 10x = \frac{4}{R} \cdot 10 = \frac{40}{R}$

$\frac{AC}{\sin B} = 2R$ $\frac{40}{R} = 2R \sin B$

т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180$ то $T \in$ меньшей окруж.

Значит $\angle APT = \angle ACT = \angle B$ т.к. опир. на $\frown AT$

Значит $\angle TPC = \angle B$

Значит PK - биссектриса $\angle APC$; $\frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$

$\angle BAP = \cancel{\angle APB - B} = 180 - \angle B$

т.к. $\angle ABP + \angle BAP = \angle APC = 2B$

$AP = BP = 6y$; $PC = 4y$

$\frac{S_{APC}}{S_{ACB}} = \frac{4y \cdot 10x}{10y \cdot 10x} = \frac{2}{5}$; $S_{ABC} = \frac{5}{2} S_{APC} = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25$

$\cancel{\angle ABC}$

$\operatorname{tg} ABC = \frac{7}{3}$; AC-?

$\operatorname{tg} B = \frac{7}{5}$

Ответ: $S = 25$

21104295 (U862725 M1298986)

$b = d\lambda$

$$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{49}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{25+49}{25} = \frac{74}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{74}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{74}} = \sqrt{\frac{74-25}{74}} =$$

$$= \sqrt{\frac{49}{74}} = \frac{7}{\sqrt{74}}.$$

$Rx = 4$ $\quad x = \frac{4}{R}$

$$\frac{10x}{\sin B} = 2R;$$

$$\cancel{10}x = \cancel{4}R \sin \beta = \frac{20}{R}$$

21104295 (U862725 M1298986)