Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

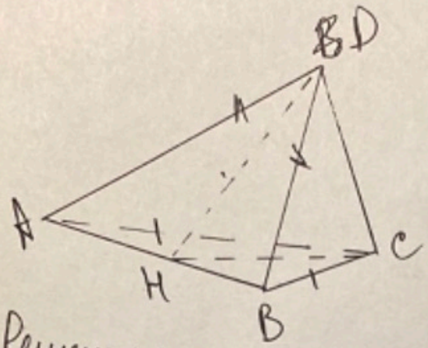
Шифр: **21104184**

ID профиля: **173625**

Вариант 17

Чистовик №1.

№ 2



$AB = 2$

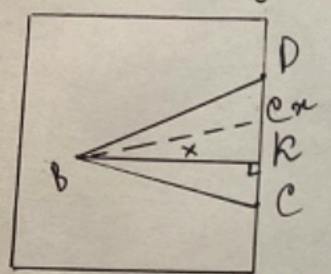
$BC = AC = 5$

$AD = BD = 6$

Решение:

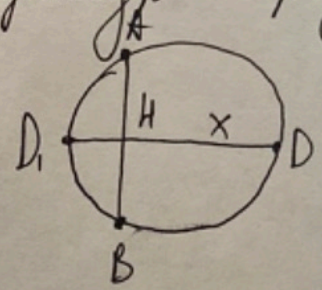
① пусть т. H – середина AB, тогда $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$
(т.к. $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ – равнобедренные)
следовательно $AB \perp CDH$

сечение цилиндра плоскостью CDH:



точки A и H находятся "за" т. B,
X – расстояние от AB до CD, $X = HK$
(K – основание высоты в $\triangle HCD$)
C_2 – вторая возм. расп C при том же самом x

цилиндр сверху:



$AB = 2$, $HD = x$

по св-ву пересек. хорд в окр-ти:

$D_1H \cdot HD = AH \cdot HB$

$(2R - x)x = 1 \cdot 1$

$2Rx - x^2 = 1. \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$2Rx = x^2 + 1$

$R = \frac{x^2+1}{2x}$

$x + \frac{1}{x} \geq 2ч = 2 \Leftrightarrow x = 1.$

$\Rightarrow$ наименьшее возм. значение достигается, если $x = 1$

$\Rightarrow R = 1$

Чистовик №3

№1

$$\begin{cases}\underbrace{(a_1+5d)}_{a_6}\underbrace{(a_1+11d)}_{a_{12}} > \underbrace{10a_1+45d}_{S}+1 \\ \underbrace{(a_1+6d)}_{a_7}\underbrace{(a_1+10d)}_{a_{11}} < \underbrace{10a_1+45d}_{S}+17\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16a_1d+60d < 10a_1+45d+17 \mid (\cdot(-1))\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ + \\ -a_1^2-16a_1d-60d^2 > -10a_1-45d-17\end{cases}$$

$$-5d^2 > -16$$

$$d^2 < \frac{16}{5}$$

$d \in \left(-\sqrt{\frac{16}{5}}; \sqrt{\frac{16}{5}}\right)$, т.к. прогрессия возрастающая, то $d>0 \Rightarrow d \in \left(0; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то d тоже целое

$$\sqrt{\frac{16}{5}} < \sqrt{\frac{20}{5}}$$

$$0 < \sqrt{\frac{16}{5}} < 2 \Rightarrow d = 1.$$

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0\end{cases}$$

$D = 36+8 = 44$

$a_1 = \frac{-6+\sqrt{44}}{2}$

$a_2 = \frac{-6-\sqrt{44}}{2}$

$$\begin{cases}(a_1+3)^2>0 \\ \left(a_1+\frac{\sqrt{44}-6}{2}\right)\left(a_1-\frac{6+\sqrt{44}}{2}\right)<0\end{cases}$$

$$a \in \left(\frac{-6-\sqrt{44}}{2}; -3\right) \cup \left(-3; \frac{\sqrt{44}-6}{2}\right)$$

~~учтем, что а - целое число, тогда~~

Чистовик № 4 (продолжение № 1)

учтем, что а - целое число, тогда

$\frac{-6-\sqrt{44}}{2} \approx -6$, $\frac{-6+\sqrt{44}}{2} \approx 0$

Ответ: $a_1 \in [-6; -3) \cup (-3; 0)$

Черновик

при $b = 1$:

$(a_1+5)(a_1+11) > \frac{a_1(a_1+9)}{2} + 1$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > \frac{a_1^2 + 9a_1}{2} + 1$

$a_1^2 + 23a_1 + 110 - 2 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 + 108 > 0$

$D = 23^2 - 432 = 97$

$a_1 = \frac{-23+\sqrt{97}}{2}$ $a_1 = \frac{-23-\sqrt{97}}{2}$.

$a_1^2 + 23a_1 + 120 - 34 < 0$.

$a_1^2 + 23a_1 + 86 < 0$

$D = 529 - 344 = 185$

$a_1 = \frac{-23+\sqrt{185}}{2}$

$a_2 = \frac{-23-\sqrt{185}}{2}$

$a_1 \in \left(\frac{-23-\sqrt{185}}{2}; \frac{-23-\sqrt{97}}{2}\right) \cup \left(\frac{-23+\sqrt{97}}{2}; \frac{-23+\sqrt{185}}{2}\right)$

и находим целые a_1.

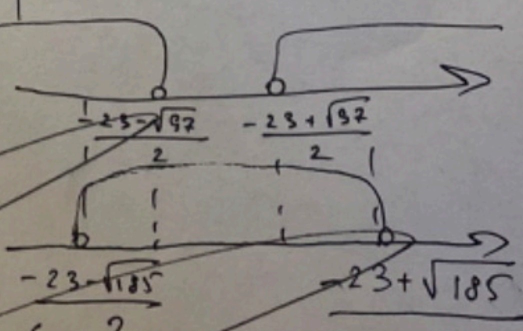
$23(20+3)$

$86 \cdot 4 = 460 + 69 = 529$

$320 + 24 = 344$.

$\sqrt{169} < \sqrt{185}$

$13 < \sqrt{185} < 14$.

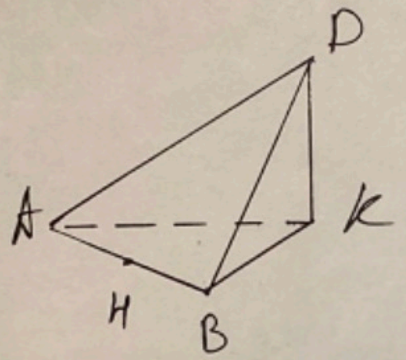


Чистовик № 2

(продолжение № 2)

т.о. в ситуации наши K имеем $AH = HB = HK = 1$.

т.к. $\triangle ABK$ - прямоуг и равнобедр.



Найдем KD:

1) т.к. HK - общий перпендикуляр к AB и CD, то $ABK \perp KD$ и $\angle AKD = 45^\circ$

2) $AK = \sqrt{2}$

3) $KD^2 = AD^2 - AK^2 = 36 - 2 = 34$

$KD = \sqrt{34}$

Аналогично KC:

$KC^2 = AC^2 - AK^2 = 5^2 - (\sqrt{2})^2 = 25 - 2 = 23$

$KC = \sqrt{23}$

т.о. $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$, либо в ситуации, когда C_2:

(C и D по одну сторону от K) $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} - \sqrt{23}$ или $\sqrt{34} + \sqrt{23}$.

Черновик

№1.

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \end{cases}$$

$1+2+3+4.$ 10.

$a + x > 0$

$a + b < 0.$

2 4 6 8 20.

$S = \frac{a_1 \cdot a_{10}}{2} = \frac{a_1(a_1 + 9b)}{2}$

$S \frac{2+8}{2} \cdot 4$ 10

2 4 6 8

$a_3 = 1 + 1(2).$

$a_n = a_1 + b(n-1)$

[redacted]

$a_6 = a_1 + b(5) \quad a_{12} = a_1 + 11b$

$$\begin{cases} (a_1 + 5b)(a_1 + 11b) > \frac{a_1(a_1 + 9b)}{2} + 1. \\ (a_1 + 6b)(a_1 + 10b) < \frac{a_1(a_1 + 9b)}{2} + 17 \end{cases}$$

$\cdot 15$ 55 -46 9

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1b + 55b^2 > \frac{a_1^2 + 9a_1b + 2}{2} \\ a_1^2 + 16a_1b + 60b^2 < \frac{a_1^2 + 9a_1b + 34}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

45 $+17$ 62

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1^2 + 32a_1b + 110b^2 > a_1^2 + 9a_1b + 2 \\ 2a_1^2 + 32a_1b + 120b^2 < a_1^2 + 9a_1b + 34 \end{cases} \Leftrightarrow$$

36 8 44

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1b + 110b^2 - 2 > 0 \\ a_1^2 + 23a_1b + 120b^2 - 34 < 0 \;|(-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1b + 110b^2 - 2 > 0 \\ -a_1^2 - 23a_1b - 120b^2 + 34 > 0 \end{cases}$$

$-10b^2 + 32 > 0.$

$10b^2 < 32$

$b^2 < 3{,}2$

$(b - \sqrt{3{,}2})(b + \sqrt{3{,}2}) < 0.$

$0{,}8\sqrt{5}.$ $\sqrt{\frac{16}{5}}$ $\sqrt{\frac{20}{5}}$

$-4\sqrt{0{,}2}$ $4\sqrt{0{,}2}$

b может быть

$\cancel{X}$ -1, $\cancel{0}$, 1.

т.к. возрастающая.

т.к. a целые, то b тоже целые.

тогда $4\sqrt{0{,}2} < 4\sqrt{0{,}25}.$

< 2

Чистовик N 1

N1

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \end{cases}$$

$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2}$

5.

Черновик

Чистовик № 2

№ 1.

$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11b \end{cases}$

Черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104184**

ID профиля: **173625**

Вариант 17

Черновик

N 4

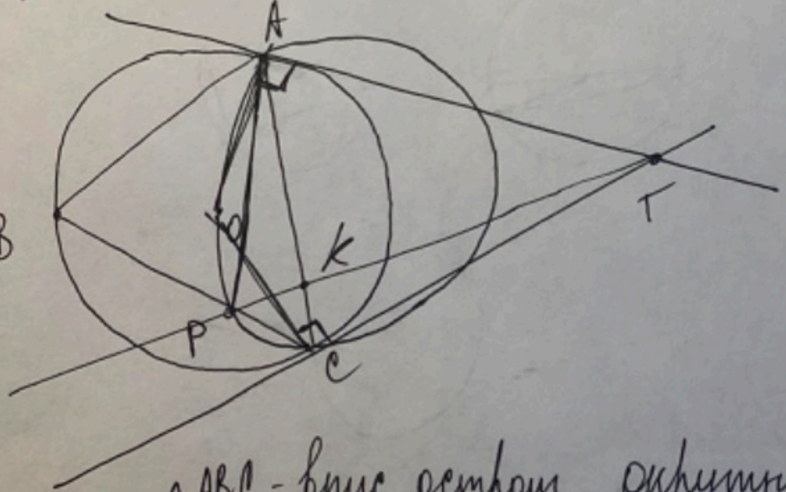
Найдите кол-во троек нат. чисел (a; b; c), удовл. системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 6 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 6 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 6^{15} \cdot 3 \end{cases}$$

N5

Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x+1)$ При каких x два из этих чисел равны, а 3 меньше их на 1?

N6



$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle CPK} = 4$

$\triangle ABC$ - впис. остроуг. окружность, проходящая чере A, O, C, пересекает BC в P

AT, CT - касательные

Черновик

№2

Заметим, что $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}\sqrt{5x-1} =$

$= 2\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$

$= 4$. Всюду на ОДЗ (*)

Если 2 числа совп, а 3 $= -1$, то из (*) $\Rightarrow$

$5x-1>0$, $x>\frac{1}{5}$

$a^2(a-1)=4 \Leftrightarrow a^3-a^2-4=0 \Leftrightarrow$

$5x\neq 2$.

$\Leftrightarrow (a-2)(a^2+a+2)=0 \Leftrightarrow a=2$

$4x+1>0$, $4x>-\frac{1}{4}$.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \Leftrightarrow x=2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \Leftrightarrow x=\frac{6}{7}$.

$\frac{x}{2}+2$

$\cancel{\log\left(\frac{x}{2}+2\right)\sqrt{5x}}$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \to$ $x=2$, $x=10$

Получается, что условие задачи может выполняться только при $x=2$

подставить и решить:

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \text{ при } x=2 = \log_3 9=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_9 3^2=1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_3(9)=2.\end{cases}$$

$x=2$. все выполнено!

Черновик:

ОДЗ

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq \frac{2}{5} \\ x>-0{,}25 \\ x\neq 0 \\ \cancel{\frac{x}{2}>-2} \\ x>-4 \\ \cancel{\frac{x}{2}\neq -1} \\ x\neq -2 \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$$

$$2\log_{5x-1}(4x+1)=2$$

$$5x-1=4x+1$$

$$x=2$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$$

$$4x+1=\frac{x}{2}+2$$

$$3{,}5x=1$$

$$x=\frac{1}{3{,}5}=\frac{2}{7}.$$

$$\cancel{\log_{\frac{x}{2}+2}\sqrt{5x-1}}$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=2$$

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$$

$$(0{,}5x+2)^2=5x-1$$

$$0{,}25x^2+2x+4=5x-1$$

$$0{,}25x^2-3x+5=0 \quad |\cdot 4$$

$$x^2-12x+20=0$$

$$D=144-80=64$$

$$x_1=\frac{12+8}{2}=10 \qquad x_2=\frac{12-8}{2}=2.$$

Черновик

НОД $(a; b; c) = 6 = 2 \cdot 3$

НОК $(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$.

т.к. НОК $= 2^{15} \cdot 3^{16}$, то

$$\begin{cases} a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \\ b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \\ c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \end{cases}$$

$a + b + c \vdots 3$

$a = 1$.

$14 \cdot 15 =$

$14(10+5) =$

$= 140 + 70 =$

210.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \text{ (пок-тель 2 в НОК)} \\ y_1 + y_2 + y_3 = 16 \text{ (пок-тель 3)} \end{cases}$$

все пок минимум 1 $\min(x_1; x_2, x_3)$

и с y то же самое.

пусть $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, тогда

$x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow 14$ в-тов

$y_2 + y_3 = 16 \Rightarrow 15$ в-тов.

Тогда всего ~~$14 \cdot 15 \cdot 3 = 18$~~ $14 \cdot 15 \cdot 9 = 1890$?

одно из x и из y по-любому $= 1$, т.к. иначе все кратно 2^2, получается 9 способов выбрать $x_? = 1$, $y_? = 1$

Чистовик N 1

N 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

т.к. НОК $= 2^{15} \cdot 3^{16}$, то

$$\begin{cases} a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \\ b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \\ c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 16 \end{cases}$$

Какое-то из x и какое-то из y равны 1, т.к. иначе НОК $\vdots\ 2^2$, получается, есть 9 способов выбрать, какое из x и какое из y равно единице.

пусть $x_1 = 1$, $y_1 = 1$,

тогда:

$x_2 + x_3 = 14 \Rightarrow 13$ в-тов

$y_2 + y_3 = 15 \Rightarrow 14$ в-тов

Получается, что всего в-тов таких троек:

$13 \cdot 14 \cdot 9 =$ ~~1636~~ 1638, все упорядоченные, т.к. учитываются все в-ты расстановки

Ответ: 1638

Чистовик №3

продолжение №5:

подставим $x = 2$ в каждый логарифм:

1.) $\log_{\sqrt{5\cdot 2-1}}(4\cdot 2+1) =$ 2.) $\log_{4\cdot 2+1}\left(\frac{2}{2}+2\right)^2 = \log_9 9 = 1$

$\log_{\sqrt{9}} 9 = 2$

3.) $\log_{\frac{2}{2}+2}(5\cdot 2-1) = \log_3 9 = 2$

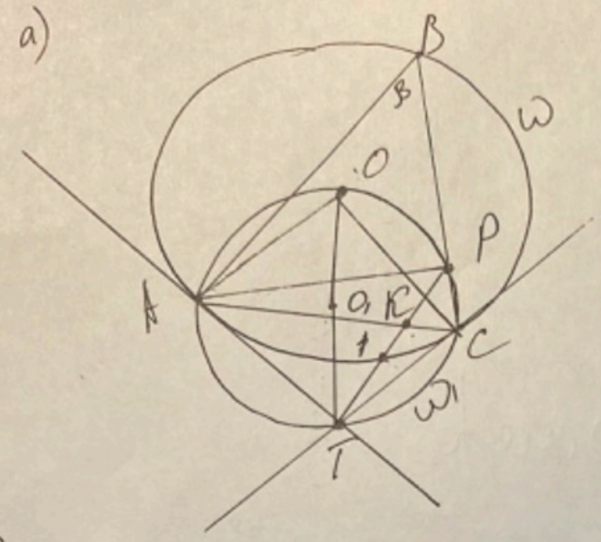
Действительно, при $x = 2$ условие задачи выполняется: 1) = 3); 2) − 1

Ответ: $X = 2$.

21104184 (U173625 M1295994)

Чистовик № 4

а)



Дано: $S_{\triangle APK} = 6$
$S_{\triangle CPK} = 4$

Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение:

1) O_1 - центр окружности ω_1, описанной около $\triangle AOC$

т. O_1 не обязательно должно принадлежать AC

достроим OO_1 до диаметра ω_1 (пусть $d = OS$)

тогда $\angle OAS = \frac{\pi}{2}$ как впис. угол, опир на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AS - касательная к ω $\Rightarrow S = T$

$\Rightarrow$ у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ высота из т P - общая $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK : KC = S_{\triangle AKP} : S_{\triangle KCP} = 3:2$

Если $\angle ABC = \beta$, то $\angle AOC = 2\beta$ и $\angle APC = 2\beta$

(опираются на $\cup AC$ в ω_1)

$\angle APT = \angle AOT = \frac{1}{2}\angle AOC = \beta$ (опир на одну дугу $\cup AT$ в ω_1)

$\Rightarrow PK$ - биссектриса $\angle APC \Rightarrow \angle KPC = \beta \Rightarrow PK \parallel AB$

$\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle C$ - общий, $\angle CPK = \angle CBA$ как соответственные)

k (коэфт подобия) $= \frac{KC}{AC} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle KPC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 25$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 25$

Чистовик №2

№5

Заметим, что:

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$$

$$=2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)\cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$$

$$=4$$ по св-ву $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ и $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

ОДЗ:

$$\begin{cases}5x-1>0\\5x-1\neq 1\\4x+1>0\\4x+1\neq 1\\\frac{x}{2}+2>0\\\frac{x}{2}+2\neq 1\end{cases}\Longleftrightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$$

т.к. два числа равны, а третье меньше на 1, то пусть эти числа будут a, a и $a-1$:

$$a^2(a-1)=4$$

$$a^3-a^2-4=0$$

$$(a-2)\underbrace{(a^2+a+2)}_{D<0}=0\Rightarrow a=2$$

1. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$2\log_{5x-1}(4x+1)=2$

$5x-1=4x+1$

$x=2$

2. $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$3{,}5x=1$

$x=\frac{2}{7}$

3. $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$

$0{,}25x^2-3x+5=0\ |\cdot 4$

$x^2-12x+20=0$

$D=144-80=64$

$x_1=\frac{12+8}{2}=10\quad x_2=\frac{12-8}{2}=2$

Из 1, 2 и 3 получается, что условие задачи выполнено только при $x=2$

Чистовик № 5

№ 6 б)

Решение:

Дано:
$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$

Найти: AC

① $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{5}$

пусть $\sin\beta = x$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{7}{5}$$

$$25x^2 = 49 - 49x^2$$

$$x^2 = \frac{49}{74}$$

$\sin\beta > 0$
$\Rightarrow x = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{74}}$

$\angle BPA = \pi - 2\beta \Rightarrow$ из $\triangle ABP$: $\angle PAB = \pi - \angle BPA - \angle PBA$

$= \pi - (\pi - 2\beta) - \beta = \beta \Rightarrow AP = BP$, $\triangle ABP$ - равнобедренный

$S_{\triangle ABP} = 25 - 6 - 4 = 15$

с другой стороны; $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \left(\frac{AB}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta\right) =$

$=$ при $AB = C$: $\frac{C^2}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7C^2}{20}$

$$\frac{7c^2}{20} = 15 \Rightarrow C^2 = \frac{300}{7} \Rightarrow C = 10\sqrt{\frac{3}{7}}$$

пусть CH - высота в $\triangle ABC$

$\frac{1}{2} CH \cdot AB = 25$; $\frac{1}{2} CH \cdot 10\sqrt{\frac{3}{7}} = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot CH = 25 \Rightarrow CH = \frac{5}{\sqrt{\frac{3}{7}}} = 5\sqrt{\frac{7}{3}}$

по т. косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta =$

$= \frac{300}{7} + \frac{25 \cdot 74}{21} - 2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{5\sqrt{74}}{\sqrt{21}\,\sqrt{3}} = \frac{300}{7} + \frac{1850}{21} - \frac{2 \cdot 125}{3} =$

$= \frac{900 + 1850 - 1750}{21} = \frac{1000}{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{1000}{21}} = 10\sqrt{\frac{10}{21}}$

Ответ: $10\sqrt{\frac{10}{21}}$

21104184 (U173625 M1295994)