Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104138**

ID профиля: **140259**

Вариант 17

МАТЕМ, 11 кл.

№1

1) $S = 10a_1 + 45d$, где $a_1 \in \mathbb{Z}$, d – разность арифм. прогрессии и $d \in \mathbb{N}$, т.к. $a_1, a_2 \dots \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > 10a_1 + 45d + 1 \\ 10a_1 + 45d + 17 > a_7 \cdot a_{11} \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ 10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 + 10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 + 10a_1 + 45d + 1$

$16 > 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5} < 4 \Rightarrow \begin{cases} d^2 < 4 \\ d \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow d = 1$

3) $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ 10a_1 + 62 > a_1^2 + 16a_1 + 60 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1+3)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < (a_1+3)^2 < 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a_1 + 3 < \sqrt{11} \\ -\sqrt{11} < a_1 + 3 < 0 \end{array} \right.$; $\left[\begin{array}{l} -3 < a_1 < \sqrt{11} - 3 \\ -\sqrt{11} - 3 < a_1 < -3 \end{array} \right.$,

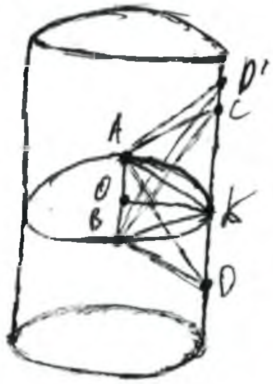
$\left[\begin{array}{l} -2 \le a_1 \le 0 < \sqrt{11} - 3 < 1 \\ -7 < -\sqrt{11} - 3 < -6 \le a_1 \le -4 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 = -6;\ a_1 = -5;\ a_1 = -4;\ a_1 = -2;\ a_1 = -1;\ a_1 = 0.$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$.

чистовик | 2

МАТЕМ, 11 кл.

№2



1) Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$:

$\begin{cases} AC = BC \\ AD = BD \\ CD \text{ - общая} \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow AK = BK$, где $AK \perp CD$ и $BK \perp CD$

$\Downarrow$

ΔABK ~~тупо~~ вписан в окружность $\Leftarrow$ плоскость $ABK \perp$ прямой CD параллельную основаниям цилиндра.

2) Получаем, что наименьший диаметр окружности основания цилиндра равен длине отрезка $AB = 2 \Rightarrow R = 1$

3) Пусть центр окружности O, тогда: $OA = OB = OK = 1$;

$\begin{cases} AK = BK \\ \angle AKB = 90 \end{cases} \Rightarrow AK = BK = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$

4) Рассмотрим $\triangle ACK$ (или $\triangle BCK$):

$\begin{cases} AK = \sqrt{2} \\ AC = 5 \\ \angle AKC = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow CK = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

Аналогично для $\triangle ADK$ (или $\triangle BDK$):

$DK = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

5) Точки C и D могут находиться по одну сторону от ABK, тогда: $CD = DK - CK = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

А могут по разные стороны от ABK, тогда:

$CD = DK + CK = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34} - \sqrt{23}$; $\sqrt{34} + \sqrt{23}$.

№3

1) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – формула ~~окружности~~ круга на декартовой плоскости радиуса R с центром в точке $(a; b)$

Тогда $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$ включает в себя все точки лежащие внутри окружности.

2) Получаем, что площадь фигуры M – это площадь окружности с радиусом $\sqrt{2}$.

3) Т.к. площадь окружности не зависит от координат центра окружности, то достаточно доказать, что существуют вещественные a и b, при которых $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$.

$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow 0^2+0^2 \le \min(2\cdot0+2\cdot0, 2)$

$0 \le 0$

Соответственно такие a и b существуют

4) Получаем, что площадь фигуры M равна:

$\pi R^2 = 3{,}14\cdot(\sqrt{2})^2 = 6{,}28$

Ответ: 6,28

черновик

$S = a_1 + \dots + a_{10}$

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + k$

$a_3 = a_1 + 2k$

$a_6 = a_1 + 5k$

$a_7 = a_1 + 6k$

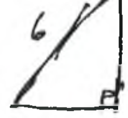
$a_{10} = a_1 + 9k$

$a_{11} = a_1 + 10k$

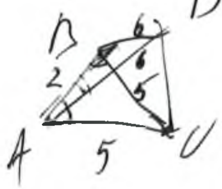
$a_{12} = a_1 + 11k$

$\sqrt{34} - \sqrt{23}$

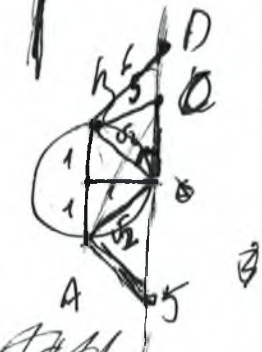
$\sqrt{34} + \sqrt{23}$



$\sqrt{36-2} = \sqrt{34}$



$\sqrt{25-2} = \sqrt{23}$



$R = \sqrt{2}$

$O(a; b)$

$\pi R^2 = \pi \cdot 2 =$

~~-45~~

~~$-30 + 45 = 15$~~

~~$9 - 48 + 55 > 16$~~

$S = 10a_1 + 45k$ 45

$45k + 1$

~~$56 < 56 + 16$~~

$a_6 \cdot a_{12} > S + 1 = 10a_1 + 45k$ $(a_1 + 5k)(a_1 + 11k) = a_1^2 + 16ka_1 + 55k^2$

$a_7 \cdot a_{11} \le S + 17 = 10a_1 + 45k + 17 > (a_1 + 6k)(a_1 + 10k) = a_1^2 + 16ka_1 + 60k^2$

$10a_1 + 45k + 17 + a_1^2 + 16ka_1 + 55k^2 > a_1^2 + 16ka_1 + 60k^2 + 10a_1 + 45k + 1$

$16 > 5k^2 \Rightarrow$ $k = 1$

$4 > \frac{16}{5} > k^2$ $k \in \mathbb{N}$

$4 k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 1$

$10a_1 + 45$

$0 < a_1^2 + 6a_1 + 9 = (a_1 + 3)^2$

$0 > a_1^2 + 6a_1 - 2 = (a_1 + 3)^2 - 11$

$a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

$10a_1 + 46 < a_1^2 + 16a_1 + 55$

$0 < (a_1 + 3)^2 < 11$

$10a_1 + 62 > a_1^2 + 16a_1 + 60$

$0 < a_1 + 3 < \sqrt{11}$

$\boxed{-\sqrt{11} - 3 < a_1 < -3}$

$-\sqrt{11} < a_1 + 3 < 0$

$-3 < a_1 < \sqrt{11} - 3 < 1$

$-10 + 45 = 35$

$-20 + 45 = 25$

$\boxed{\begin{matrix} -2 \le a_1 \le 0 \\ -6 \le a_1 \le -4 \end{matrix}}$

$-60 + 45 = -15$

$4 - 32 + 55 > 26$

$36 - 96 + 55 > -14$ 1 $-16 + 55 > 36$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

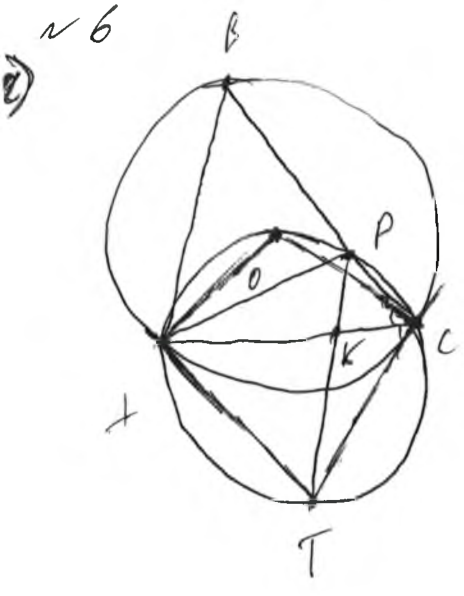
Шифр: **21104138**

ID профиля: **140259**

Вариант 17

МАТЕМ, 11 кл. | чистовик | 1

№ 6



1) Для $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ высота из точки P – общая. Следовательно:

$AK : KC = S_{\triangle APK} : S_{\triangle CPK} = 3 : 2$.

2) $\angle AOC = 2\angle ABC$ – центральный

$\angle APC = \angle AOC$, т.к. A, O, P и C лежат на одной окружности, а углы опираются на общую дугу.

3) Рассмотрим четырёхугольник $AOCT$:

$\begin{cases} \angle A = \angle C = 90^\circ \text{ (касательные перпендикулярны радиусу)} \\ \angle A + \angle O + \angle C + \angle T = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle O + \angle T = 360^\circ - 180$

$\angle O + \angle T = 180^\circ \Rightarrow T$ – лежит на окружности AOC

4) $TA = TC$ – касательные к окружности равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \frac{1}{2}\angle APC = \angle ABC$

(опираются на равные хорды)

5) Рассмотрим $\triangle CPK$ и $\triangle ABC$

$\left.\begin{matrix} \angle C \text{ – общий} \\ \angle ABC = \angle CPK \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle ABC$

6) $AK : KC = 5 : 2 = 2{,}5 \Rightarrow S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CPK} = 2{,}5^2 = 6{,}25 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6{,}25 \cdot 4$

$S_{\triangle ABC} = 25$

Ответ: 25

Черновик

$\boxed{1\cdot 3}$ + $\boxed{6\cdot 15\cdot 16-3}$ + $\boxed{6\cdot 14\cdot 16-5}$

$x=2^{14}\cdot 3^{15}$ $\quad$ $x=2^{0-14}\cdot 3^{0-15}$ $\quad$ $x=2^{14}\cdot 3^{0-15}$

$y=1$ $\quad$ $y=3^{15}\cdot 2^{0-14}$ $\quad$ $y=3^{15}$

$z=1$ $\quad$ $z=1$ $\quad$ $z=2^{1-14}$

$a=x\cdot 2\cdot 3$ $\quad$ НОД $(x;y;z)=1$

$b=y\cdot 2\cdot 3$ $\quad$ $a=a'\cdot 6$ $\boxed{13\cdot 14\cdot 6}$

$c=z\cdot 2\cdot 3$ $\quad$ $b=b'\cdot 6$ $\quad$ НОД $(a';b';c')=1$

$x=2^{14}$ $\quad$ $z=2^{1-13}3^{1-14}$ $\quad$ $c=c'\cdot 6$

$y=3^{15}$

НОД $(a';b')=t_1$

3^{0-15} $a\cdot b\cdot c=x\cdot y\cdot z\cdot 2^3\cdot 3^3$ $\quad$ НОД $(a';c')=t_2$

НОД $(b';c')=t_3$

2^{14} $\quad$ $xyz\cdot 2\cdot 3=$ НОК $(a;b;c)$

$x=2^{14}\cdot t_1\cdot t_2$ $\quad$ $t_1\cdot t_2\cdot t_3=2^{14-n}\cdot 3^{15-n}$ $\quad$ $a=x\cdot t_1\cdot t_2$

3^{15} $y=3^{n}\cdot t_1\cdot t_3$ $\quad$ $x\cdot y\cdot z=2^{14}\cdot 3^{15}\cdot 1$ $\quad$ $b'=y\cdot t_1\cdot t_3$

2^{0-14} $z=1\cdot t_2\cdot t_3$

$c'=z\cdot t_2\cdot t_3$ $\boxed{6\cdot 15\cdot 15-3}$

$\boxed{15\cdot 16}$ $\quad$ $\boxed{x\cdot y\cdot z\cdot t_1\cdot t_2\cdot t_3 = 2^{14}\cdot 3^{15}\cdot 1}$

$x=2^{14}$

$y=3^{15}\cdot 2^{0-14}$

$z=3^{1-15}$

$x=2^{1-13}$ $\quad$ $5x-1>0$

$y=3^{1-15}$ $\quad$ $\boxed{x>\frac{1}{5}=0{,}2}$ $\quad$ $2\log_{5x-1}(4x+1)$ $\quad$ $2\log_{4x+1}(0{,}5x+2)$

$z=2^{1-14}\cdot 3^{0-15}$

$\boxed{x\neq 0{,}4}$ $\quad$ $4x+1>0$

$x>-0{,}25$ $\quad$ $\log_{0{,}5x+2}(5x-1)$

$4x\neq 0$

$x\neq 0$ $\quad$ $0{,}5x+2>0$ $\quad$ $x=2^{14}$

$15\cdot 16+$

$x>-4$ $\quad$ $y=3^{15}$

$\boxed{1}\boxed{3}+6\cdot\boxed{15\cdot 16}+3\cdot(15\cdot 16-1)$ $\quad$ $0{,}5x+2\neq 1$ $\quad$ $z=2^{1-13}\cdot 3^{1-14}$

$x\neq -2$

$\boxed{1}\cdot 3+\boxed{15\cdot 16}\cdot 6+\boxed{13}\cdot 6+\boxed{14}\cdot 6+\boxed{13\cdot 14}\cdot 6$ $\quad$ $13\cdot 6+14\cdot 6$

черновик

$x \neq 0{,}4 \qquad x > 0{,}2$

$x = 2^{14} \cdot 3^{15}$

$y = 2^{0-14}$

$z = 3^{0-15}$

$2\log_{(5x-1)}(4x+1)$

$\log_{(0{,}5x+2)}(5x-1)$

$2\log_{4x+1}(0{,}5x+2)$

$\dfrac{\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}(0{,}5x+2)}$

$x = 2^{14} \cdot 3^{15}$

$y = 2^{0-14} \cdot 3^{0-14}$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}(0{,}5x+2)$

$x = 2^{14} \cdot 3^{15}$
$y = 1$
$\cancel{z = 1}$
$\to \boxed{3}$

$\text{НОК}(x; y; z) = 2 \cdot 3$

$x = 2^{14} \cdot 3^{0-15}$
$y = 3^{15} \cdot 2^{0-14}$
$z = 1$
$\to 6 \cdot 16 \cdot 15 - 3$

$\boxed{6; 6; 1} \cdot 3$

$\boxed{6; 1; 1} \cdot 3$

$x = 2^{14} \cdot 3^{0-15}$
$y = 3^{15}$
$z = 2^{1-14}$
$\to 6 \cdot 14 \cdot 16 - 3$

$6\ 2\ 1 \cdot 6$

$6\ 3\ 1 \cdot 6$

$6\ 2\ 3 \cdot 6$

$2\ 3\ 1 \cdot 6$

$2\ 2\ 3 \cdot 3$

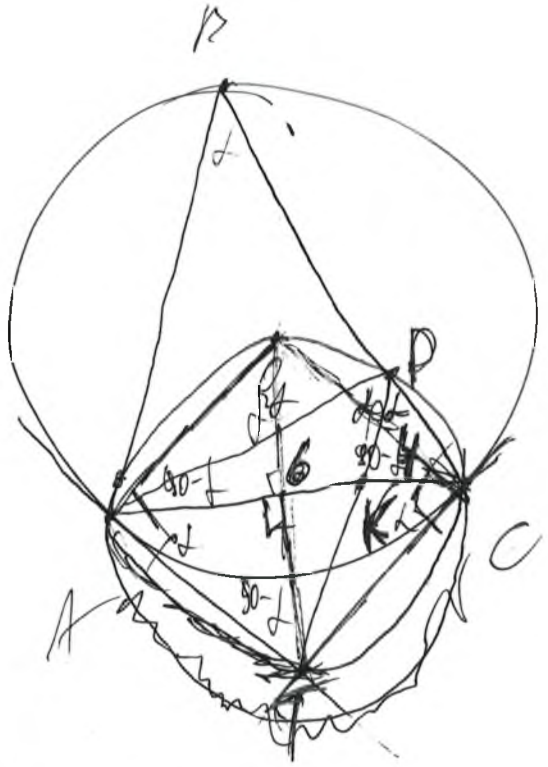
$2\ 3\ 3 \cdot 3$

$12 + 24 = 36$

$x = 2^{14}$
$y = 3^{16} \cdot 2^{0-14}$
$z = 3^{1-15}$
$\to 6 \cdot 15^2 - 3$

$x = 2^{14}$
$y = 3^{15}$
$z = 2^{1-13} \cdot 3^{1-14}$
$\to 6 \cdot 13 \cdot 14$

Черновик



$\frac{AC}{AK} =$ $AK : KC = 3 : 2$