Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

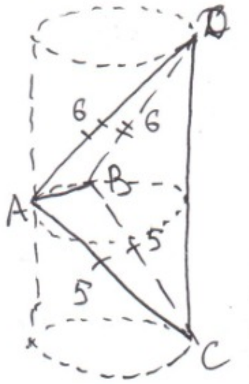
Шифр: **21104110**

ID профиля: **805829**

Вариант 17

Чистовик. Вариант 17.

2.



Дано: ABCD- тетраэдр, $AC=CB=5$, $AD=DB=6$, $AB=2$.

ABCD-впис. в цилиндр., (CD) парал-на оси цилиндра.

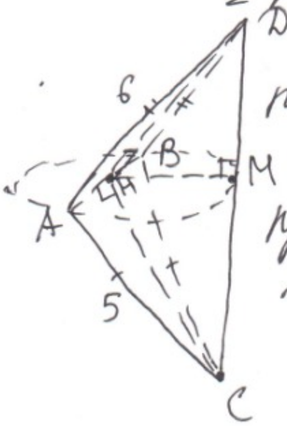
$r_{цилиндра}$ — наименьший.

Найти: CD.

Решение: 1) т.к (CD) парал-на оси цилиндра, то [CD] лежит на бок. пов-ти.

Т.к $\triangle CAB$ и $\triangle DAB$ — равнобедренные, можно сказать, что A и B лежат на одной большой ~~круге~~ окруж-ти цилиндра, т.к., они лежат на пересечении сфер $\omega_1(D; r=6)$ и $\omega_2(C; r=5)$, а значит, $[AB]\perp[DC] \Rightarrow [AB]\parallel\alpha$, где α - пл-ть основания цилиндра.

Т.о, имеем большую окр-ть, в кот. лежит хорда $AB=2$, сл-но меньше $\frac{2}{2}=1$ радиус быть не может. Решим задачу для $r_ц=1$:



Пусть H- сер. [AB], но AB-диаметр, $\Rightarrow AH=HB=1 \Rightarrow DH\perp AB$,
$CH \perp AB$.

Тогда: Из $\triangle AHD$: $HD=\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$

Из $\triangle CHA$: $CH=\sqrt{25-1}=\sqrt{24}$

Проведём $[HM]\perp[CD]$, $M\in[CD]$, $HM=r_ц=1$ (т.к $\perp[DC]$, H-центр. окр-ти)

Из $\triangle HMD$: $\left.\begin{aligned} DM&=\sqrt{35-1}=\sqrt{34} \\ MC&=\sqrt{24-1}=\sqrt{23} \end{aligned}\right\} \Rightarrow CD=\sqrt{34}+\sqrt{23}$.

Ответ: $\sqrt{34}+\sqrt{23}$.

Чистовик.

1. $S=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n=(2a_1+9d)\cdot 5=10a_1+45d$, $d>0$ (по усл.)

$\begin{cases} a_6a_{12}=(a_1+5d)(a_1+11d)>10a_1+45d+1 \\ a_7a_{11}=(a_1+6d)(a_1+10d)<10a_1+45d+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2>10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16a_1d+60d^2<10a_1+45d+17 \end{cases}$ (*) $\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2>10a_1+45d+1 \\ -a_1^2-16a_1d-60d^2>-10a_1-45d-17 \end{cases}$ (+)

сложив нер-ва имеем:

$-5d^2>-16$

$d^2<\frac{16}{5} \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt5}<d<\frac{4}{\sqrt5}$, но $d>0 \Rightarrow 0<d<\frac{4}{\sqrt5}$, но $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ – целые,

сл-но $d\in\mathbb{Z} \Rightarrow d=1$ ← подставим в систему (*):

$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt5}\not<2 \\ 4\not<2\sqrt5 \\ 16\not<20 \end{cases}$

$3<\sqrt{11}<4$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55-10a_1-45-1>0 \ (1) \\ a_1^2+16a_1+60-10a_1-45-17<0 \ (2) \end{cases}$

(1): $a_1^2+6a_1+9>0$ (2): $a_1^2+6a_1-2<0$

$(a_1+3)^2>0$ $\frac{D}{4}=9+2=11$

$\boxed{a_1\neq-3}$ $a_1=-3\pm\sqrt{11} \Rightarrow -3-\sqrt{11}<a_1<-3+\sqrt{11}$

$\Downarrow$

$a_1\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

(*): $\begin{cases} a_1\neq-3 \\ \left[\begin{array}{l} a_1=-6 \\ a_1=-5 \\ a_1=-4 \\ a_1=-3 \\ a_1=-2 \\ a_1=-1 \\ a_1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}$.

Ответ: $-6;-5;-4;-2;-1;0$.

21104110 (U805829 M1296323)

Чистовик

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \ (1) \\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) \ (2)\end{cases}$ ← мн-во кругов с центром в $(a;b)$ и $r=\sqrt{2}$

Заметим, что если $a>1$ или $b>1$, то $\min(2a+2b;2)=2a+2b$.

Заметим, что при $a^2+b^2=2$ нер-во (2) выполняется.

Если $a<0$ и $b<0$, то $a^2+b^2>0$, но $\min(2a+2b;2)<0 \Rightarrow \varnothing$, значит $(a;b)$ не лежит в 3й коорд. четверти.

$a^2+b^2 \le 2a+2b \Leftrightarrow \left[\begin{cases}a>2\\b>2\end{cases} \quad \begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases}0<a<2\\0<b<2\end{cases}$ ← система может им. реш. только при данных a и b.

система не им. реш

$a^2+b^2\le 2$ ← круг с центром $0;0$ и $r=\sqrt{2}$

Пересекая получаем четверть круга с $r=\sqrt{2}$, это мн-во возможных a и b (рис 1)

Мн-во M представляет собой мн-во кругов, с центрами $(a;b)$ и $r=\sqrt{2}$. (рис. 2)

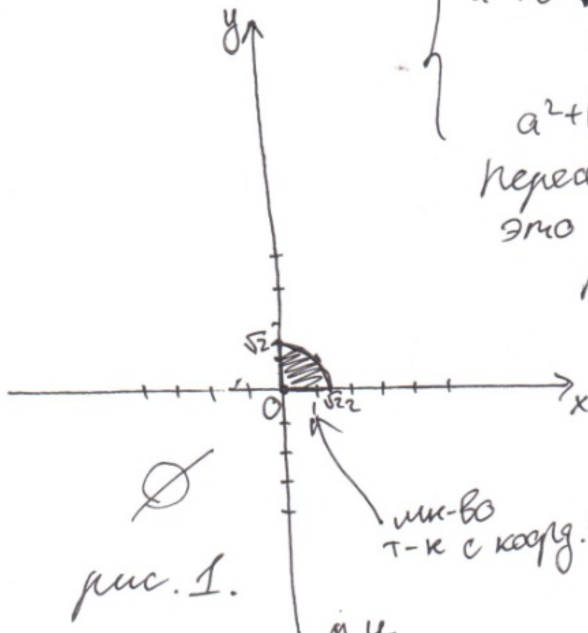


рис. 1.

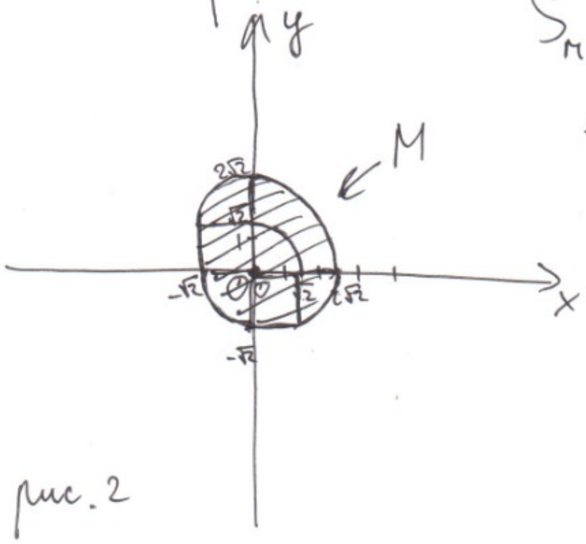


рис. 2

$S_M=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{2})^2+\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2+2\cdot(\sqrt{2})^2=$

$=2\pi+\frac{3\pi}{2}+4=3,5\pi+4$

Ответ: $3,5\pi+4$.

21104110 (U805829 M1296323)

Черновик.

S_{10} – сумма $\quad a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$

$a_6 a_{10} > S+1 \qquad a_6 = a_1 + 5d,\ a_{10} = a_1 + 9d$

$a_7 a_{11} < S+17 \qquad d > 0$

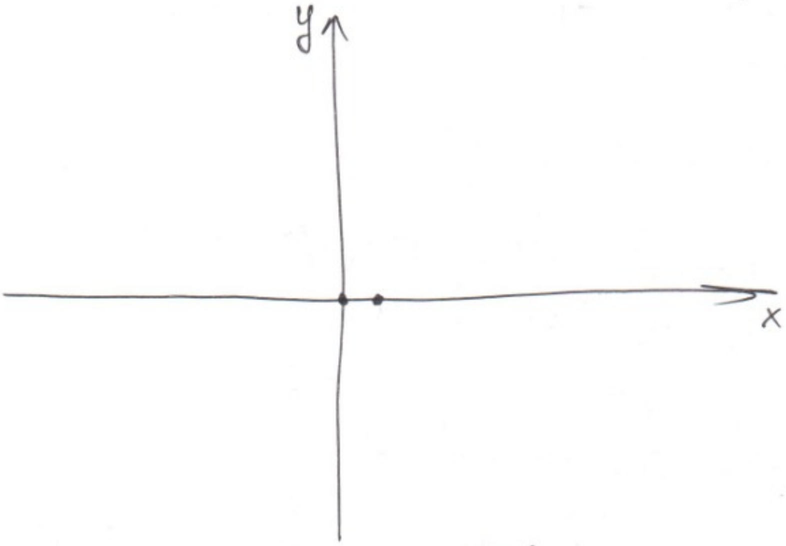
$a_6 a_{10} = a_1^2 + 14a_1 d + 45d^2 > S+1 \qquad \frac{a_6 + a_{10}}{2} = \frac{2a_1 + 14d}{2} = a_1 + 7d$

$a_7 a_{11} = a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < S+17$

$a_6^2 + a_{10}^2 + 2a_6 a_{10} \qquad \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = (2a_1 + 9d) \cdot 5$

$$\begin{cases} a_1^2 + 14a_1 d + 45d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \quad (1) \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

(1): $45d^2 + (14a-45)d + a^2 - 1 > 0 \quad$ (2): $60d^2 + (16a-45)d + a^2 - 17 < 0$



$2a + 2b < 2 \Leftrightarrow a + b < 1 \Rightarrow$

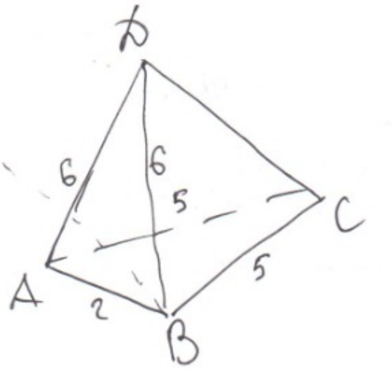
$\Rightarrow$

при $a<0$ и $b<0$

(2) не выполн., т.к $2a+2b<0$

$a^2+b^2>0$

$a \geq 0$



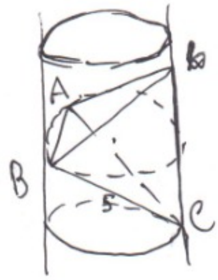
$$\begin{cases} 45d^2 + 14ad + a^2 > 10a + 45d + 1 \\ -60d^2 - 16ad - a^2 > -10a - 45d - 17 \end{cases} \oplus$$

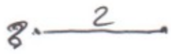
$-15d^2 - 2ad > -16$

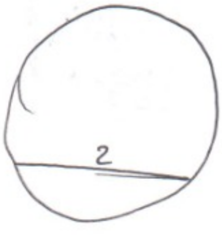
$15d^2 + 2ad < 16$

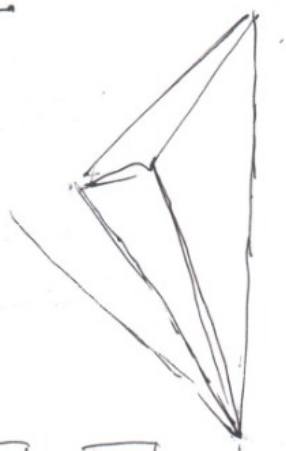
$d(15d + 2a) < 16$

$\frac{D}{4} = a^2 + 15 \cdot 16 > 0$









$DM = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$

$MC = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

$DH = \sqrt{35}$

$CH = \sqrt{24}$

21104110 (U805829 M1296323)

$DC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

(лист 1)

Черновик

$\frac{a_1+a_1+9d}{2}\cdot 10 = (2a+9d)5$

$10a+45d \le 10a + \frac{45\cdot 4}{\sqrt5}$

$a_6 a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a+45d+1$

$a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a+45d+17$

$\begin{cases} a^2+16ad+55d^2 > 10a+45d+1 \\ a^2+16ad+60d^2 \le 10a+45d+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+16ad+55d^2-10a > 45d+1 \\ -a^2-16ad-60d^2+10a > -45d-17 \end{cases}$ $\oplus$

$1\cdot\frac{1}{11}$, $1\cdot\frac{1}{12}$: $\begin{cases} \frac{a^2}{11}+\frac{16}{11}ad+5d^2 > \frac{45}{11}d+\frac{1}{11} \\ -\frac{a^2}{12}-\frac{16}{12}ad-5d^2 > -\frac{45}{12}d \end{cases}$

$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$-\frac{4}{\sqrt5} < d < \frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow d < \frac{4}{\sqrt5}$

$d=$

$a^2+16ad+60d^2-10a < 45d+17$

$a^2+16ad+60d^2-17 < 45d+10a$

Подставим $d=\frac{4}{\sqrt5}$:

$a^2+\frac{16\cdot4}{\sqrt5}a+12\cdot16-17 < \frac{45\cdot4}{\sqrt5}+10a \,|\cdot\sqrt5$

$\sqrt5 a^2+64a+12\cdot16\cdot\sqrt5-17\sqrt5-45\cdot4-10\sqrt5 a < 0$

$\sqrt5 a^2+(64-10\sqrt5)a+175\sqrt5-180 < 0$

$64^2=2^{12}$

$D=(64-10\sqrt5)^2+4(180-175\sqrt5)\cdot\sqrt5=$

$=64^2-1280\sqrt5+500+720\sqrt5-20\cdot175=$

$=4096-560\sqrt5-3500=1096-560\sqrt5$

$560\sqrt5$

$2a+2b<2$

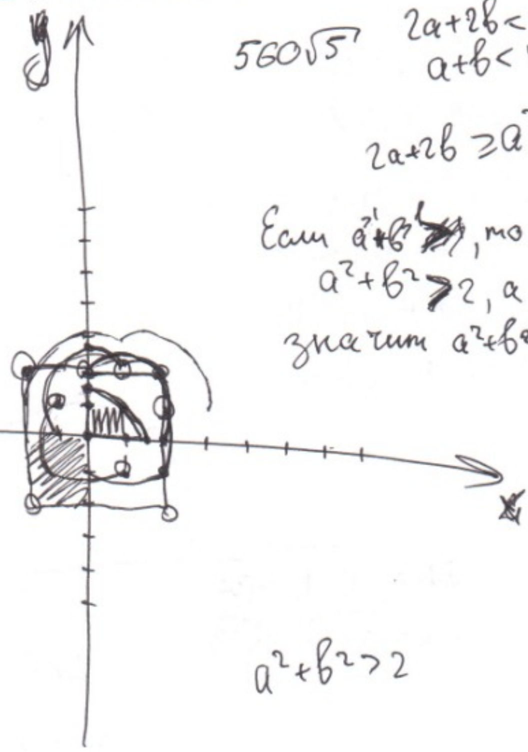
$a+b<1$

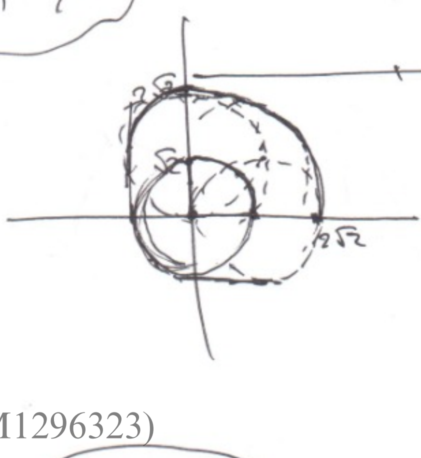
$2a+2b \ge a^2+b^2$

a	1	1	1	0	-1	-1	1	$\sqrt2$	0	-1
b	1	2	0	1	0	1	-1	0	$\sqrt2$	2
	√	–	√	√	–	+	+			

Если $a^2+b^2 \ge 1$, то $a^2+b^2 \ge 2$, а значит $a^2+b^2 > min$

если $|a|$ или $|b|$ хотя бы 2, то $\varnothing$





$a^2+b^2>2$

21104110 (U805829 M1296323)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104110**

ID профиля: **805829**

Вариант 17

Чистовик   Вариант 17.

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

Заметим, что у одного из чисел обязательно в разложении присутствует 2^{15}, у одного — 3^{16}, у одного 2^1 (не более!) и у одного — 3^1, иначе, система не вып-ся.

Очевидно, что все числа в разложении на мн-ли имеют только 2^n и 3^m, $\{m;n\}\in\mathbb{N}$

	a:	b:	c:
2:	2^1	2^{15}	2^n
3:	3^{16}	3^1	3^m

Мы можем выбрать два числа из a, b и c, у которых степени двоек будут 1 и 15 $\cancel{C_3^2}$ $3\cdot 2=6$ способами (3 варианта и выбор из 2х оставшихся)

Каждому из этих 6 вариантов соотв. 6 вариантов выбрать степени троек: 3^1, 3^{16} и 3^n, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Всего существует 36 способов распределения степеней между 3 числами, но, ~~и~~ оставшиеся степени (n и m) могут принимать след. значения: $n\in[1;15]$, $\{n;m\}\in\mathbb{N}$

$m\in[1;16]$

Сл-но существует 15 способов выбрать n и 16 способов выбрать m.

ИТОГ: $\underset{\text{перестановки степеней}}{36}\cdot\underbrace{15\cdot 16}_{\text{вариации степеней помимо первой и наиб.}}$ —— 6840

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 190 \\ \hline 3240 \\ 36 \\ \hline 6840 \end{array}$$

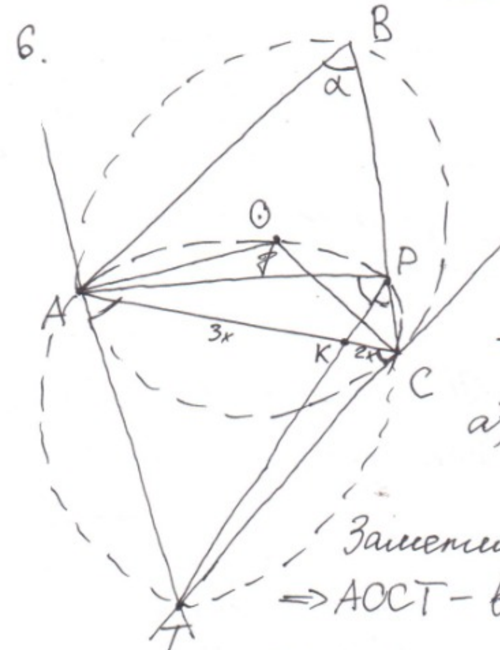
Ответ: 6840.

21104110 (U805829 M1296324)

(лист 1)

Чистовик.

6.



Дано: $\triangle ABC$, $\omega(O; AO)$ - опис. ок. $\triangle ABC$, $\omega_2 \cap [BC] = P$, $\{A; O; C\} \in \omega_2$. $[AT]$ и $[CT]$ - кас. к ω в т-ках A и C. $[TP] \cap [AC] = K$. $S_{APK} = 6$, $S_{CPK} = 4$.

а) Найти S_{ABC}

б) Найти AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$.

Решение:

а) $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Пусть $AK = 3x$, $KC = 2x$.

Заметим, что $\angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow AOCT$ - вписанный, $\Rightarrow \omega_2$ содерж. T (т.к. она описанная ок. $\triangle AOC$)

$\angle APT = \angle ACT$ (как впис.)

$\angle CAT = \angle ACT = \frac{1}{2} \smile AC$ (угол между хордой и кас-ной)

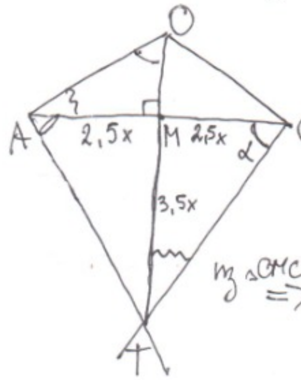
$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$ (как впис)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle APT = \angle ACT = \alpha$ ($\angle TAC$; пусть α)

$\angle TAC = \angle TPC$ (как впис.) $\Rightarrow \angle TPC = \alpha$, тогда $\angle ABC = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel KP$ (соотв. углы равны),

сл-но $\triangle ABC \overset{k}{\sim} \triangle KPC$ (по 2м углам ($\angle C$ - общ.)) $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 25$.

б) Опустим из O и T перпендик-ры на AC. Т.к. $\triangle ATC$ и $\triangle AOC$ - равноб., то оба перпендикуляра попадут на середину $[AC]$ - M.



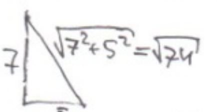
Из $\triangle TMC$: $\frac{TM}{MC} = tg\alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow TM = \frac{7 \cdot 2,5x}{5} = 3,5x$

Т.к. $AT \perp AO$, то $\angle MAO = 90° - \alpha \Rightarrow \angle AOM = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AM}{OM} = tg\,\alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow OM = \frac{5AM}{7} = \frac{12,5x}{7} \Rightarrow$

из $\triangle OMC$ $\Rightarrow OC = \sqrt{\left(\frac{5}{2}x\right)^2 + \left(\frac{25}{14}x\right)^2} \Rightarrow r_{\text{опис. ок.} \triangle ABC} = \sqrt{\left(\frac{25}{4} + \frac{625}{196}\right)x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Т. синусов: $2r = \frac{\sin \angle ABC}{AC} \Rightarrow 2 \cdot \frac{5}{7}\sqrt{74} = \frac{\sin \operatorname{arctg} \frac{7}{5}}{AC} \Rightarrow$



$\sin \operatorname{arctg} \frac{7}{5} = \frac{7}{\sqrt{74}}$

~~$\Rightarrow AC = \frac{7 \sin \operatorname{arctg} \frac{7}{5}}{10\sqrt{74}} = \frac{7^2}{10 \cdot 74} = \frac{49}{740}$~~

~~Ответ: а) 25 б) $\frac{49}{740}$~~

$\Rightarrow AC = 2 \cdot \frac{5}{7} \cdot \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{7}{5}\right) \cdot \sqrt{74} =$

$= 2 \cdot 5 = 10$

Ответ: а) 25
б) 10

21104110 (U805829 M1296324)

(лист 2)

Чистовик.

5. (1): $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

(2): $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

(3): $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x\neq 2 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$

Заметим, что при $x=2$: (1): $\log_3 9 = 2$

(2): $\log_9 9 = 1$

(3): $\log_3 9 = 2$

$\sqrt{}$

Ответ: 2.

21104110 (U805829 M1296324)

лист 3

Черновик

$НОД(a;b;c)=6 \Rightarrow a⋮6$, $b⋮6$, $c⋮6$ все три не кратны чему-то, больше 6.

$a:$	$2\cdot 3$	$2^{4}\cdot 3^{16}$	$2\cdot 3$
$b:$	$2\cdot 3$	$2^{15}\cdot 3$	$2\cdot 3$
$c:$	$2^{15}\cdot 3^{16}$	$2\cdot 3$	$2\cdot 3$

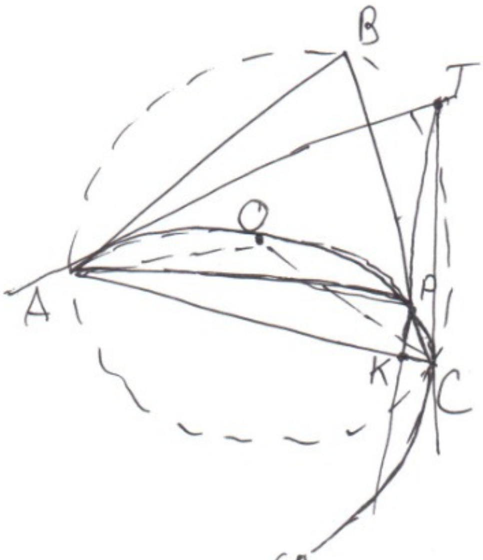
$(6;6;2^{15}\cdot 3^{16});(2\cdot 3^{16};2^{15}\cdot 3;6);($

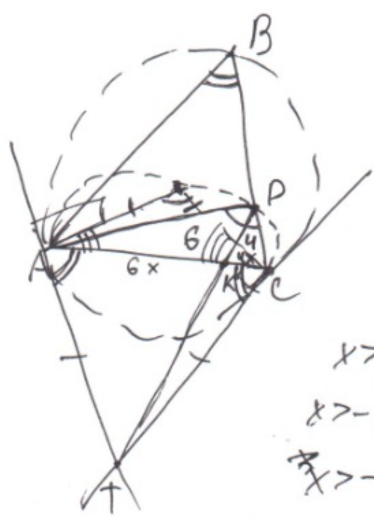
$a=2\cdot 3$
$b:2\cdot 3^{16}$
$c:2^{15}\cdot 3^{1},3^{2},\dots,3^{16}$
(16)

$b=2^{15}\cdot 3$
$c: 3^{16}\cdot 2^{1},2^{2},2^{3},\dots,2^{15}$
(14)

$2^2\cdot 3^2$

	a	b	c
2:	1	люб. из 15	1
3:	1	1	люб. из 16.





(1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\log_{5x-1}(4x+1)=2\log_t(u)$

(2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\log_u(w)$

(3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_w(t)$

$x>\frac{1}{5}, x\neq\frac{2}{5}$
$x>-\frac{1}{4}\ x\neq 0$
$x>-4, x\neq -2$

$\Rightarrow x>\frac{1}{5}, x\neq\frac{2}{5}$

К осн. $4x+1$: (1) $\frac{2\log_{4x+1}4x+1}{\log_{4x+1}5x-1}=\frac{2}{\log_{4x+1}5x-1}$

(3): $\frac{\log_{4x+1}5x-1}{\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2}$

I: $(1)=(3)=(2)+1$:
$2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2=\log^2_{4x+1}(5x-1)$

$x=\boxed{2}$: $\log_3 9=2$
$\log_9 9=1$
$\log_3 9=2$

К осн. e: $\frac{2\ln 4x+1}{\ln 5x-1}$

$\frac{2\ln\frac{x}{2}+2}{\ln 4x+1}$

$\frac{\ln 5x-1}{\ln\frac{x}{2}+2}$

I
$(1)=(3)=(2)+1$

$2\ln(4x+1)\cdot\ln\frac{x}{2}+2=\ln^2 5x-1$

равенство вып-ся при
$(5x-1)^2=(4x+1)^2=\frac{x}{2}+2$, т.к. тогда ...

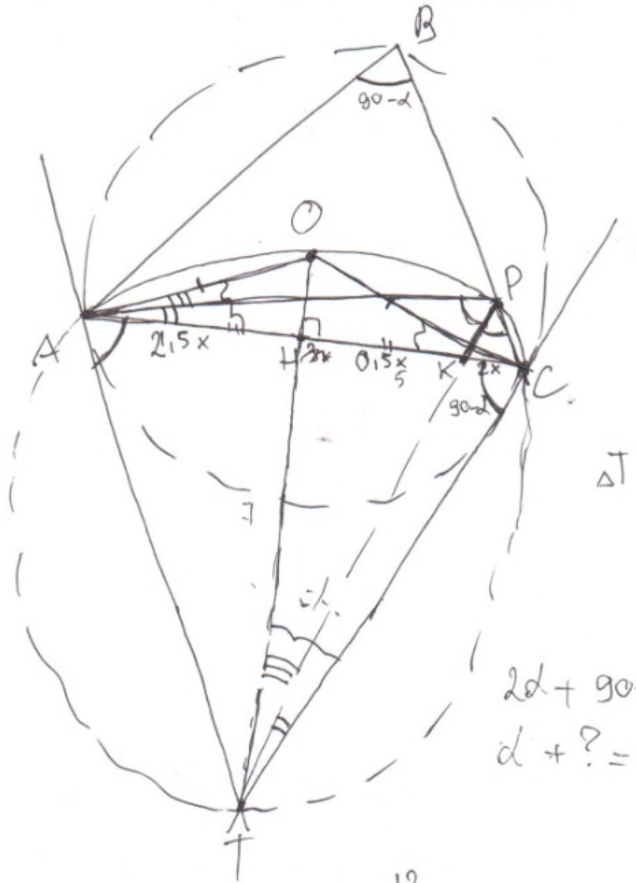
$25x$

$(4x+1)^{x}=\frac{x}{2}+2$

21104110 (U805829 M1296324)

лист 1

Черновик



$\triangle TKC \sim \triangle AKP \Rightarrow \dfrac{TK}{AK} = \dfrac{KC}{KP} = \dfrac{TC}{AP}$

$\dfrac{TK}{3x} = \dfrac{2x}{KP} = \dfrac{TC}{AP}$

$\triangle THC \sim \triangle CHO \Rightarrow \dfrac{TH}{CH} = \dfrac{HC}{HO} = \dfrac{TC}{CO}$

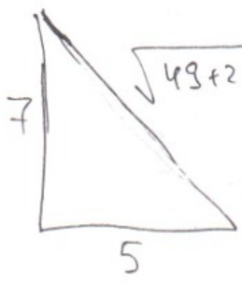
$\dfrac{TH}{2{,}5x} = \dfrac{2{,}5x}{HO} = \dfrac{TC}{OC}$

$2\alpha + 90 - \alpha + \underset{\angle KPC}{?} = 180$

$\alpha + ? = 90 \Rightarrow \angle KPC = 90^\circ - \alpha$

12

$\sqrt{\dfrac{25 \cdot 49 + 625}{196}} = \dfrac{5}{7}\sqrt{49+25} = \dfrac{5}{7}\sqrt{74}$



$\sqrt{49+25} = \sqrt{74}$