Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104057**

ID профиля: **873790**

Вариант 17

чистовик

1. $S = a_1 + \ldots + a_{10} = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{\cancel{2}} \cdot \cancel{10}^{5} = 10a_1 + 45d$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \end{cases}$ $\quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$

$a_1 - ?$

$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 - 1 > S \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 - 17 < S \end{cases}$

$\Rightarrow \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 60d^2 - 17 < \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1 d} + 55d^2 - 1$

$5d^2 < 16$

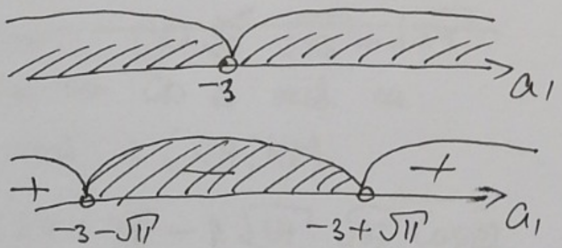
$d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d \in \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, но ~~т.к~~ прогр. $\nearrow \Rightarrow d > 0$

$\Rightarrow d \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, т.к $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 - 1 > 10a_1 + 45 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 - 17 < 10a_1 + 45 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3 \\ D = 36 + 8 = 44 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11} \end{cases}$



$\Rightarrow a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

21104057 (U873790 M1304438)

чистовик

(2) Дано: ABCD – тетр

$AB=2$

$AC=CB=5$

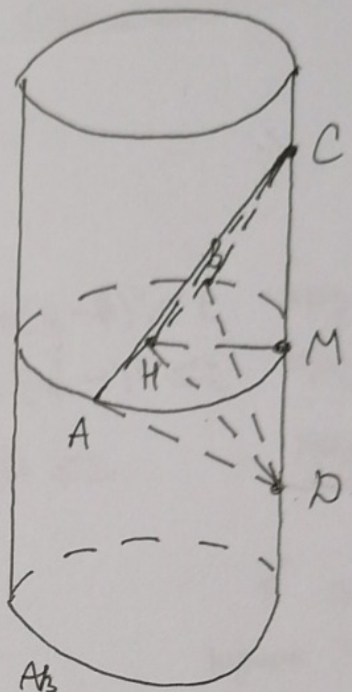
$AD=DB=6$

ABCD вписан в цилиндр

CD ∥ обр.

r наим

CD – ?



1° ~~т.к.~~ $CD \in$ обр и A, B ~~??~~ равноудалены от C и D => AB ∥ осн. цилиндра и чтобы r наим => AB – диаметр, а r наим = 1 => HM = 1, где H – серед AB

$CH=\sqrt{25-1}=\sqrt{24}$ => $CM=\sqrt{24-1}=\sqrt{23}$

$DH=\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$ => $MD=\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$ => наим $CD=\sqrt{23}+\sqrt{34}$

наиб. CD зависит от того, насколько образующая большая обр, точно $\cancel{\leq}\ \sqrt{23}+\sqrt{34}$ => наиб. CD, когда она совп с обр.

=> $CD \cancel{\leq} \sqrt{23}+\sqrt{34}$.

B

~~Ответ: $CD \leq \sqrt{23}+\sqrt{34}$~~

$\varphi < 180^\circ$

2°. $CD \notin$ обр => $CD \in$ осев. сеч.

найдем наиб $\angle(CH; HD)$

$CD^2 \leq 24+\cancel{35}-2\sqrt{24}\cdot\sqrt{35}\cos\varphi$

$CD^2 < 59+2\sqrt{24}\sqrt{35}\cdot(+1)$

$CD^2 <$

=

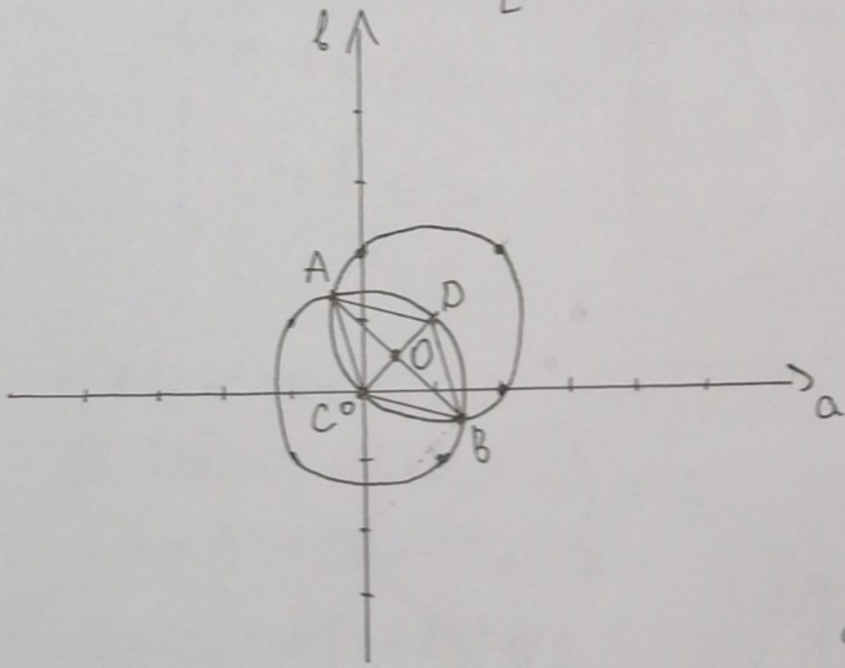
$-2b+1=0$

③ Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a^2+b^2 \le 2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & \text{круг с ц. } (x;y) \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 & \text{круг с ц } (1;1) \\ a^2+b^2 \le 2 & \text{круг с ц } (0;0) \end{cases}$$

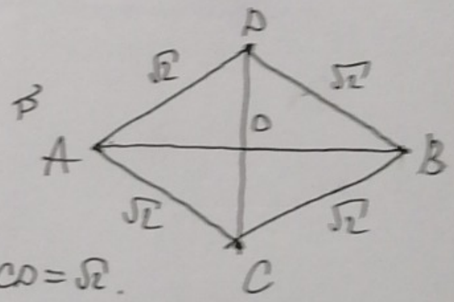
$R=\sqrt{2}$



В aOb

нужно чтобы $x, y \in ABCD \Rightarrow S_M = S_{ABCD}$.

$S_{сект\, ABC} = S_{сект\, ABD}$



$CD = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow AB = 2AO$; $AO = \sqrt{2-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow AB = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

По т. Косинусов

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,AD \cdot BD \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{6-2-2}{-2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi = 120^\circ = \angle ADB = \angle ACB$

$\Rightarrow S_{сект\, ABD} = S_{сект\, ACD} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2 = \frac{2\pi}{3}$

S_{ABCD} – пересечение кругов $= 2S_{сект} - S_{ABCD}$ – ~~тарап~~ ромба $=$

$= \frac{4\pi}{3} - \cancel{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} = S_M$

Ответ: $S_M = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

21104057 (U873790 M1304438)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104057**

ID профиля: **873790**

Вариант 17

(5) Чистовик

(1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\dfrac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}}=\dfrac{2}{\log_{4x+1}(5x-1)}=\dfrac{2}{a}$

(2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2b$ $\qquad$] $\log_{4x+1}(5x-1)=a$

(3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\dfrac{\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=\dfrac{a}{b}$ $\qquad$ $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=b$

ОДЗ: $\begin{cases}4x+1>0\\ \frac{x}{2}+2>0\\ 5x-1>0\\ 5x-1\neq 1\\ 4x+1\neq 1\\ \frac{x}{2}+2\neq 1\end{cases}$ $\begin{cases}x>-\frac{1}{4}\\ x>-4\\ x>\frac{1}{5}\\ x\neq 0\\ x\neq\frac{2}{5}\\ x\neq -2\end{cases}$ $\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$

1°. $\begin{cases}\frac{2}{a}=2b\\ \frac{a}{b}+1=2b\end{cases}$ $\begin{cases}ab=1\\ a+b-2b^2=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{1}{b}\\ 2b^3-b^2-1=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{1}{b}\\ (b-1)(2b^2+b+1)=0\\ D<0\end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & -1\\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 0\end{array}$$

$\Rightarrow\begin{cases}b=1\\ a=1\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{2}+2=4x+1\\ 5x-1=4x+1\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{7x}{2}=1 & x=\frac{2}{7}\\ x=2\end{cases}$ $\varnothing$.

2°. $\begin{cases}2b=\frac{a}{b}\\ \frac{2}{a}+1=2b\end{cases}$ $\begin{cases}2b^2=a\\ 2ab-a-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=2b^2\\ 4b^3-2b^2-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=2b^2\\ 2b^3-b^2-1=0\end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & -1\\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 0\end{array}$$

$\begin{cases}(b-1)(2b^2+b+1)=0 \quad b=1\\ D<0\\ a=2\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{2}+2=4x+1\\ 5x-1=(4x+1)^2\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{7x}{2}=1\\ 5x-1=16x^2+8x+1\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{2}{7}\\ 16x^2+3x+2=0 \quad D<0\end{cases}$ $\varnothing$.

3°. $\begin{cases}\frac{2}{a}=\frac{a}{b}\\ 2b+1=\frac{2}{a}\end{cases}$ $\begin{cases}2b=a^2\\ a^2-\frac{2}{a}+1=0\end{cases}$ $\begin{cases}a^3+a-2=0\\ 2b=a^2\end{cases}$ $\begin{cases}(a-1)(a^2+a+2)\neq 0 \quad D<0\\ a=1\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & -2\\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 0\end{array}$$

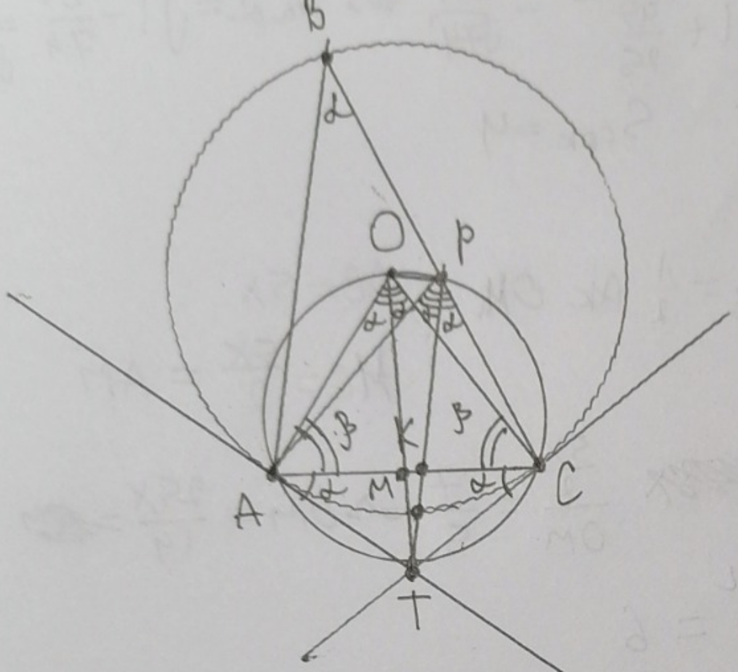
$\begin{cases}5x-1=4x+1\\ \frac{x}{2}+2=\sqrt{4x+1}\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\ x^2+8x+16=16x+4\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\ x^2-8x+12=0 \quad D=16\\ x_{1,2}=6;2\end{cases}$

$\Rightarrow x=2$

Ответ: $x=2$

чистовик

6



$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=4$

а) S_{ABC} – ?

$AT=TC$ $\angle A+\angle C=180^\circ$ (в □ $AOCT$)

$\Rightarrow \angle O+\angle T=360^\circ-180^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow T\in$ окр вокруг $\triangle AOC$

$\Rightarrow OT$ – диаметр

$\angle AOC=\angle APC$ (как опирающ. на $\smile AC$)

$\triangle OPT$ – п/у $\angle P=90^\circ$ (т.к. OT – диам)

$\alpha+\beta=90$ $\angle APC=2\alpha$

$\smile TC=2\alpha \Rightarrow \angle TPC=\alpha=\angle APT \Rightarrow PK$ – бис.

По лемме о бис $\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{AP}{PC}$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot AK}{\frac{1}{2}h\cdot KC}=\frac{AK}{KC}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{AP}{PC}$] $AK=3x$, $KC=2x$

$AC=5x$

$\angle AOC=2\alpha$ – ц.у $\Rightarrow \angle ABC=\alpha$ – вписан.

$\triangle ABC\sim\triangle KPC$ ($\angle B=\angle KPC$; $\angle C$ общ) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}}=k^2=\left(\frac{AC}{KC}\right)^2=\left(\frac{5\cancel{x}}{2\cancel{x}}\right)^2=\frac{25}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{25\cdot S_{KPC}}{4}=\frac{25\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}=25$

Ответ: 25

21104057 (U873790 M1304439)