Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104030**

ID профиля: **289109**

Вариант 17

Чистовик Вар 17

N1

$S = 10a_1 + d(1+2+\ldots+9) = 10a_1 + 45d$, a_1 - первый член ар. пр.
d - шаг прогрессии.

$a_6 a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > S+1$

$a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2+16a_1 d + 60d^2 < S+17$

$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 + S + 17 > S + 1 + a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2$

$5d^2 < 16 \quad d^2 < 3.2$ т.к. $\{a_n\} \in \mathbb{Z}$, то $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = -1; 0; 1$

Но из условия $\{a_n\}$ возрастает $\Rightarrow d = 1$

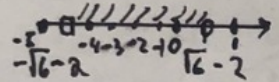
$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \quad a_1^2 + 4a_1 + 9 > 0$

$\frac{D}{4} = 4 - 9 < 0 \Rightarrow \forall a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \quad a_1^2 + 4a_1 - 2 < 0$

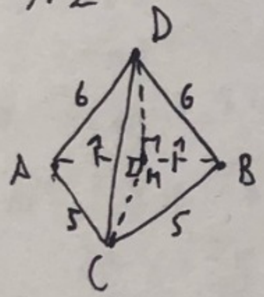
$\frac{D}{4} = 4 + 2 = 6 \quad a_1 = -2 \pm \sqrt{6} \quad 4 < 6 < 9 \quad 2 < \sqrt{6} < 3 \quad 0 < \sqrt{6} - 2 < 1$

$-2 > -\sqrt{6} > -3 \quad -4 > -2-\sqrt{6} > -5$

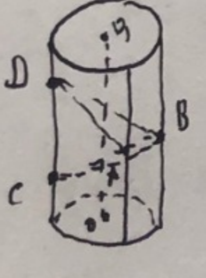


$a_1 = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

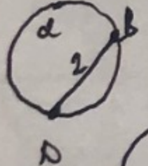
N2



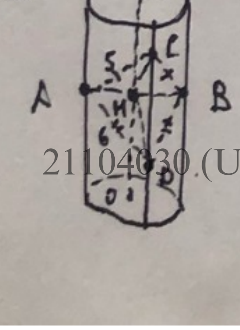
1) $CH \perp AB$ $AC = AB \Rightarrow CH$ - мед $\Rightarrow DH$ - медиана
$AD = DB \Rightarrow DH \perp AB$ $AB \perp \{CH; DH\} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CD$



2) $r \to$ мин OO_1 - ось цилиндра
$\{C; D\} \in$ цил $\Rightarrow CD \in$ цил.; $CD \parallel OO_1$; $AB \perp CD \Rightarrow AB \perp OO_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB$ - лежит в сечении, перпендикулярном OO_1
$AB \in \alpha$; λ - окружность, AB - хорда окр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \leq 2r \quad r \geq \frac{AB}{2}$; $r \to min \Rightarrow r_{min} = 1$
При этом AB - диаметр.

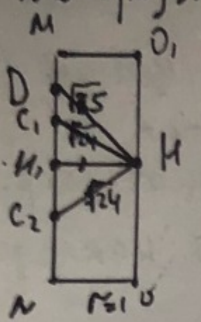


3) $CH \perp AB \Rightarrow CH$ - мед; $AB - d \Rightarrow$
$\Rightarrow H \in OO_1 \quad CH = \sqrt{AC^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$
$DH = \sqrt{35}$ (аналогично)



Чистовик вар 17

№2 продолжение



рассмотрю осевое сечение, в котором лежат C и D. Возможно 2 разных расположения точек C, D относительно H: 1) лежат по ~~обе~~ одну сторону от HH_1, $HH_1 \perp MN$ 2) лежат по обе стороны от HH_1. Обозначу точками C_1 и C_2 соответственно два возможных случая.

$C_1H_1 = \sqrt{C_1H^2 - r^2} = \sqrt{23} = C_2H_1$, $DH_1 = \sqrt{34}$ $DC_1 = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

$DC_2 = \sqrt{34} + \sqrt{23}$ Ответ: $\sqrt{34} - \sqrt{23}$; $\sqrt{34} + \sqrt{23}$.

№3

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$ рассмотрю 2-ую строчку:

1 случай: $2a + 2b \ge 2$ $a + b \ge 1$

$a^2 + b^2 \le 2$ $(a+b)^2 - 2ab \le 2$

$\begin{cases} (a+b)^2 \le 2(ab+1) \\ a+b \ge 1 \Rightarrow (a+b)^2 \ge 1 \end{cases}$ $ab + 1 \ge \frac{1}{2}$ $ab \ge -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} -1 \le 2ab \\ a^2 + b^2 \le 2 \end{cases}$ $a^2 + b^2 - 1 \le 2ab + 2$ $(a-b)^2 \le 3$

$\begin{cases} a - b \le \sqrt{3} \\ a - b \ge -\sqrt{3} \\ a + b \ge 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} a+b \ge 1 \ (1) \\ a - b \le \sqrt{3} \end{cases} \begin{cases} a+b \ge 1 \ (2) \\ a - b \ge -\sqrt{3} \end{cases}\right.$ 1) $\begin{cases} a+b \ge 1 \\ \sqrt{3} \ge a - b \end{cases}$ $a + b + \sqrt{3} \ge 1 + a - b$ $b \ge \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $a \ge$

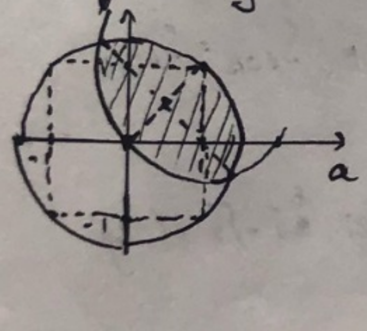
2 случай: $2a + 2b \le 2$ $a + b \le 1$ $a^2 + b^2 \le 2a + 2b$

№3 $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$ из 1-ого ур-ия видим, что т. $(a; b)$ - центр окружности радиусом $\sqrt{2}$

2-ая строчка - мн-во т. $(a; b)$

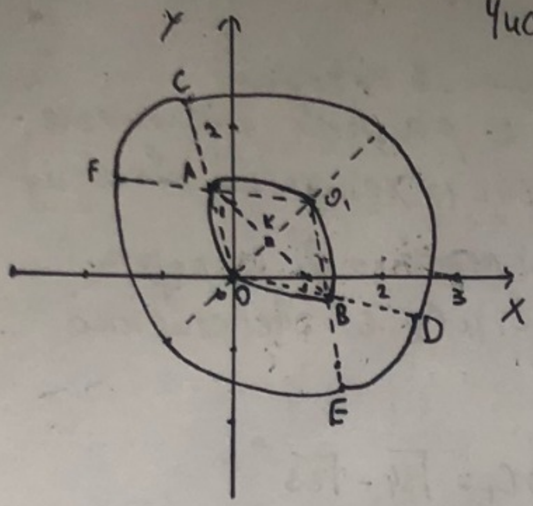
$a^2 + b^2 \le \min(2a+2b, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \le 2 \\ a^2 + b^2 \le 2a + 2b \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 \le 2 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \le 2 \end{cases}$

изобразу на пл-ти:



закрашенная область - мн-во центров окружностей

21104030 (U289109 M1297045)



Чистовик Вар-17.

Изображу фигуру M

1) Изображу границу мн-ва центров окружностей, назову это фигурой A

2) ~~из~~ около каждой точки надо описать окр., но эти окружности будут накладываться друг на друга =>

=> достаточно изобразить границы фигуры M, т.е. ~~из~~ для каждой точки границы ф. A надо найти самую удалённую точку границы ф. M.

3) Это можно осуществить, проведя радиус из центров 2-х дуг ((0;0) и (1;1)) и удвоить его (т.к. радиусы окр. $=\sqrt{2}$)

4) Получились 2 дуги с радиусом $R = 2\sqrt{2}$

5) На соприкосновении 2-х дуг фигуры A тоже построю окружности (дуги)

6) Введу обозначение точек через буквы.

7) $OO_1 = r = \sqrt{2}$ $\quad OK = KO_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad OA = r = \sqrt{2}$ $\quad AK = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$AB = \sqrt{6}$ $\quad \cos\angle AOB = \frac{2+2-6}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$ $\quad \angle AOB = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

Площадь сектора ~~сегмента~~ $\overset{\frown}{COD}$ $\quad S_{COD} = \cancel{\frac{120}{360}} \frac{2\pi}{2\cdot 3}\cdot 8 = \frac{8\pi}{3}$

Пусть $S_1 = S_{COD} - S_{AOB} = \frac{8}{3}\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \frac{8}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AK = KB$, $AO = OB \Rightarrow \angle O_1OB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ = \angle OO_1B = \angle OBO_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBE = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, Площадь сектора ~~сегмента~~ DBE $\quad S_{DBE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2 = \frac{\pi}{3}$

$S_M = S_{\overset{\frown}{COD}} + S_{\overset{\frown}{FO_1E}} - S_{AOB} - S_{AO_1B} + S_{\overset{\frown}{DBE}} + S_{\overset{\frown}{CAF}}$

В силу симметрии относительно AB $\; S_{COD} = S_{FO_1E}$; $S_{AOB} = S_{AO_1B}$

$S_{DBE} = S_{CAF}$ (симм. отн. OO_1)

$S_M = 2S_1 + 2S_{DBE} = \frac{16}{3}\pi - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = 6\pi - \sqrt{3}$ $\quad$ Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$ кв. ед.

21104030 (U289109 M1297045)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104030**

ID профиля: **289109**

Вариант 17

Чистовик Вар 17

N4

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$ $a;b;c \vdots 6 \Rightarrow a=6\cdot 2^{k_1}\cdot 3^{n_1};\ b=6\cdot 2^{k_2}\cdot 3^{n_2};\ c=6\cdot 2^{k_3}\cdot 3^{n_3}$

$\begin{cases} НОД(2^{k_1}\cdot 3^{n_1};\ 2^{k_2}\cdot 3^{n_2};\ 2^{k_3}\cdot 3^{n_3})=1 \\ НОК(2^{k_1}\cdot 3^{n_1};\ 2^{k_2}\cdot 3^{n_2};\ 2^{k_3}\cdot 3^{n_3})=2^{14}\cdot 3^{15} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \min(k_1;k_2;k_3)=0 \\ \min(n_1;n_2;n_3)=0 \\ \max(k_1;k_2;k_3)=14 \\ \max(n_1;n_2;n_3)=15 \end{cases} \Rightarrow$ $k_{min}=0;\ k_{max}=14;\ k_{cp}\in[0;14]$

$n_{min}=0;\ n_{max}=1\cancel{4}5;\ n_{cp}\in[0;15]$

Кол-во перестановок $N_k = 3\cdot 2\cdot \cancel{14}\,15 = \cancel{84}\,90$

Кол-во перестановок $N_n = 3\cdot 2\cdot \cancel{15}\,16 = \cancel{90}\,96$

Кол-во перестановок $N = N_k\cdot N_n = \cancel{7560}\ 8640$ Ответ: ~~7560~~ 8640

N5 $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1);\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2;\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} x>\frac{1}{5};\ x>-\frac{1}{4};\ x>-4 \\ x\neq\frac{2}{5};\ x\neq 0;\ x\neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$

~~1) Случай №1: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$~~

~~$\log_{\sqrt{5x+1}}(4x+1) + \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 - 2\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$~~

~~$\log_{5x-1}(4x+1) + \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) - \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1$~~

~~$\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1) + \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) - \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1$~~

~~$t=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$ $u=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$~~

~~$\frac{1}{tu}+t-u=1$ $1+t^2u-tu^2=tu$ $u^2t+u(t-t^2)-1=0$~~

~~$D=t^2(1-t)^2+4t$~~

Пусть $t=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\log_{5x-1}(4x+1);\ u=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$tu = 4\log_{5x-1}\frac{x}{2}+2$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\frac{4}{tu}$

1 случай: $t=u;\ t=\frac{4}{tu}+1=\frac{4}{t^2}+1$ $t^3-t^2-4=0$

$t^3-2t^2+t^2-2t+2t-4=(t-2)(t^2+t+2)=0$

$t=u=2$

$D=1-8<0$

2 случай: $t=\frac{4}{tu}$ $u=\frac{4}{t^2}$ $t=u+1=\frac{4}{t^2}+1$ $t^3-t^2-4=0$ $t=2$

$t=2;\ u=1$

3 случай: $u=\frac{4}{tu}$ $t=\frac{4}{u}$ $u=t+1=\frac{4}{u^2}+1$ $u^3-u^2-4=0$ $u=2$

$u=2;\ t=1$

Чистовик Вар 17

№5 продолжение

1) $t=u=2$ $t=2\log_{5x-1}(4x+1)=2$ $5x-1=4x+1$ $x=2$

проверка $u=2\log_{8+1}(1+2)=1$ не подходит.

2) $t=2$; $u=1$ $t=2\log_{5x-1}(4x+1)=2$ $x=2$

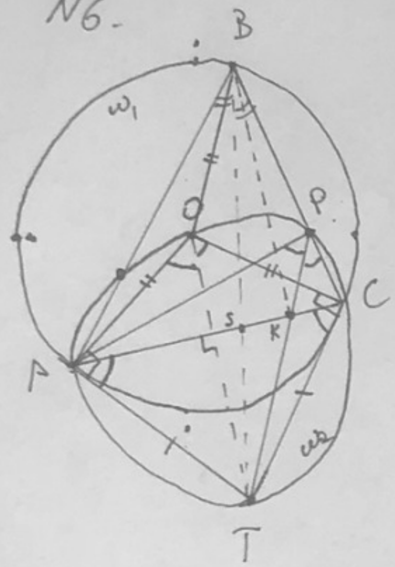
$u=2\log_{8+1}(1+2)=1$ подходит.

3) $t=1$ $u=2$ $u=2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)=2$ $4x+1=\frac{x}{2}+2$ $3,5x=1$ $x=\frac{2}{7}$

$t=2\log_{\frac{10}{7}-1}(\frac{8}{7}+1)=2\log_{3/7}\frac{15}{7}\neq 1$ не подходит

Ответ: $x=2$.

№6.



$\angle OCT=\angle OPT=90^\circ \Rightarrow T\in\omega_2$; OT - d

$\frac{AK}{KC}=\frac{S_{APK}}{S_{PKC}}=\frac{3}{2}$ $\frac{S_{ATK}}{S_{CKT}}=\frac{AK}{CK}=\frac{AT\cdot KT\cdot\sin\angle ATP}{KT\cdot CT\cdot\sin\angle CTK}$

$\frac{\sin\angle ATP}{\sin\angle CTK}\cdot\frac{3}{2}=\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}\Rightarrow PK$ - бисс

аналогично BT - бисс

$\frac{AS}{SC}=\frac{AB}{BC}$ $S_{ABC}=S_{PKC}\cdot\frac{AC\cdot BC}{KC\cdot CP}=\frac{BC}{CP}\cdot\frac{5}{2}S_{PKC}$

21104030 (U289109 M1297046)

Лист 2