

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104016**

ID профиля: **313118**

Вариант 17

Медовик

7

N1. По формуле суммы арифметической прогрессии  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ , где  $n$  - кол-во её членов. Тогда  $S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$ . Кроме того,  $a_n = a_1 + (n-1)d$ . ( $d$  - разность арифметической прогрессии). Тогда  $a_6 = 5d + a_1$ ;  $a_{12} = a_1 + 11d$ ;  $a_7 = a_1 + 6d$ ;  $a_{11} = a_1 + 10d$ . Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S_{11} \\ a_7 \cdot a_{11} < S_{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1d > 10a_1 + 45d + 1 - 55d^2 \\ a_1^2 + 16a_1d < 10a_1 + 45d + 17 - 60d^2 \end{cases}$$

Тогда, чтобы система имела решение, должно выполняться следующее:  $10a_1 + 45d + 17 - 60d^2 > 10a_1 + 45d + 1 - 55d^2$

$5d^2 < 16$ , т.к. арифметическая прогрессия возрастает и состоит из целых чисел, то  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $d > 0$ . Тогда неравенству  $5d^2 < 16$

можно удовлетворить лишь  $d = 1$  и  $d = 2$ . Подставим  $d = 1$  в систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$$

первое ~~неравенство~~ выполняется при любом  $a_1$ . Решим 2-ое:

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \Leftrightarrow a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$ . Следовательно также  $a_1$ ,

удовлетворяющее условию:

$9 < 11 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4$

Тогда

$$\frac{d}{4} = 9 + 22 = 11 \rightarrow a_1$$

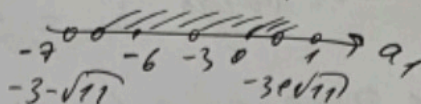
$$a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11})$$



$-5 < -3 - \sqrt{11} < -6$  Тогда нас интересует целый  $a_1$ ,

$0 < -3 + \sqrt{11} < 1$  Лемма на промежутке  $a_1 \in [-6; 0]$

Проверим, подходит ли целые значения:



кроме  $a_1 = -3$ , оно не подходит.

1)  $a_1 = -6$   $S_2 = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{-12 + 9}{2} \cdot 10 = -15$

$a_6 = -6 + 5d = -1$   $a_7 = 0$

$a_{12} = 5$

$a_{11} = 4$

$\begin{cases} -5 > -14 \\ 0 < 2 \end{cases}$  *выполняется*

2)  $a_1 = -5$

$S_2 = \frac{-10 + 9}{2} \cdot 10 = -5$

$a_6 = 0$

$a_7 = 1$

$a_{12} = 6$

$a_{11} = 5$

$\begin{cases} 0 > -4 \\ 5 < 12 \end{cases}$  *выполняется*

3)  $a_1 = -4$

$S_2 = \frac{-8 + 9}{2} \cdot 10 = 5$

$a_6 = 1$

$a_7 = 2$

$a_{12} = 7$

$a_{11} = 6$

$\begin{cases} 7 > 6 \\ 12 < 22 \end{cases}$  *выполняется*

4)  $a_1 = -2$

$S_2 = \frac{-4 + 9}{2} \cdot 10 = 25$

$a_6 = 3$

$a_7 = 4$

$a_{12} = 9$

$a_{11} = 8$

$\begin{cases} 2 > 26 \\ 32 < 42 \end{cases}$  *выполняется*

5)  $a_1 = -1$

$S_2 = 35$

$a_6 = 4$

$a_7 = 5$

$a_{12} = 10$

$a_{11} = 9$

$\begin{cases} 4 > 36 \\ 45 < 52 \end{cases}$  *выполняется*

6)  $a_1 = 0$

$S_2 = 45$

$a_6 = 5$

$a_7 = 6$

$a_{12} = 11$

$a_{11} = 10$

$\begin{cases} 5 > 46 \\ 60 < 62 \end{cases}$  *выполняется*

Ответ:  $-6; -5; -4; -2; -1; 0$ .



числовик.  
№3.

(3)

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$

Для начала найдем  $a, b$  удовлетворяющие уравнению ~~уравнению~~ ~~неравенству~~

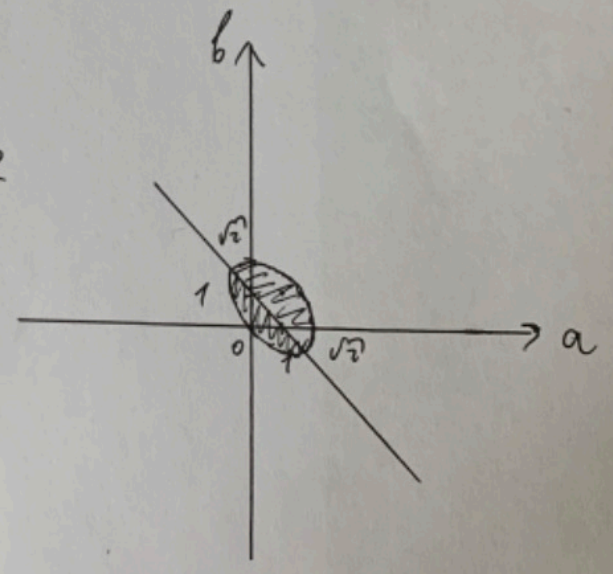
$a^2 + b^2 \leq \min(2a+2b, 2)$ . Сравним числа  $2a+2b$  и  $2$  очевидно, что при  $a+b \geq 1$   ~~$\min(2a+2b, 2) \geq 2$~~ . При  $a+b \geq 1$

$a+b < 1$   $\min(2a+2b, 2) = 2a+2b$ . Т.к. в данном случае  $2a+2b \geq a^2+b^2$ , но  $a+b \geq 0$ . Заменим последнее условие где  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \leq 2 \\ a+b < 1 \\ a+b \geq 0 \\ a^2+b^2 \leq 2a+2b \end{cases} \quad \begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \leq 2 \\ a+b < 1 \\ a+b \geq 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq 1-a \\ a^2+b^2 \leq 2 \\ b < 1-a \\ b = -a \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \end{cases}$$

Уотрежем последнее условие в модели  $a$  и  $b$ :



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2$  - уравнение окружности с центром в  $(a; b)$ .

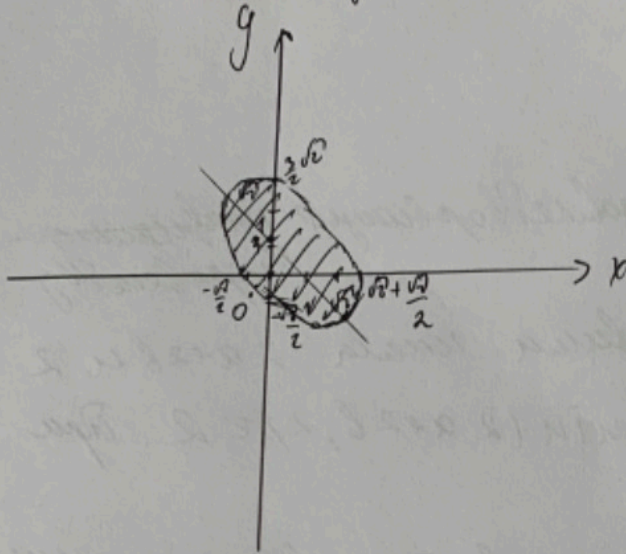
Множество  $M$  - будет совокупность окружностей, лежащих в центре с центром в  $(a; b)$ .



Числовий

(9)

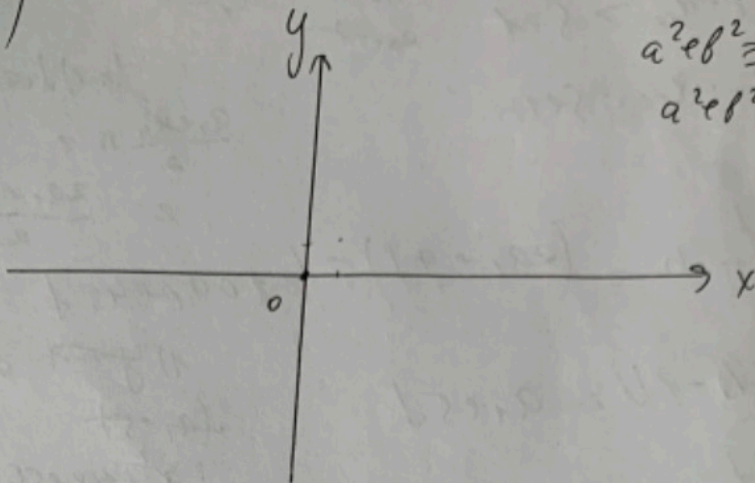
Схематично зобразити формулу  $M$ :





перевести

3)



$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a+b)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$a^2 + b^2 \geq 2(a+b)$$

$$2ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad a+b$$

$$2(a+b) \geq 2$$

$$\min(2(a+b); 2) \geq$$

если  $a+b \geq 0$   
 $\min \geq 0$

если  $(a+b) \leq 1$   
 $\min \geq 0$

если  $(a+b) < 1$

$$\min \geq 2(a+b)$$

если  $a+b \geq 1$

$$\min \geq 2$$

$$a^2 + b^2 \leq \min(2a+2b, 2)$$

$$a^2 + b^2$$

$$(a+b) \geq 1$$

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

$$(a+b) \vee a^2 + b^2$$

$$2(a+b)/a$$

$$(a+b) \geq 1$$

$$a+b$$

$$\begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2 + b^2 \geq 2 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 \geq 1 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$$

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

$$a^2 + b^2 \geq 1 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

$$1 - 2ab \leq 2$$

$$ab \geq -\frac{1}{2}$$

$$2ab \geq -1$$







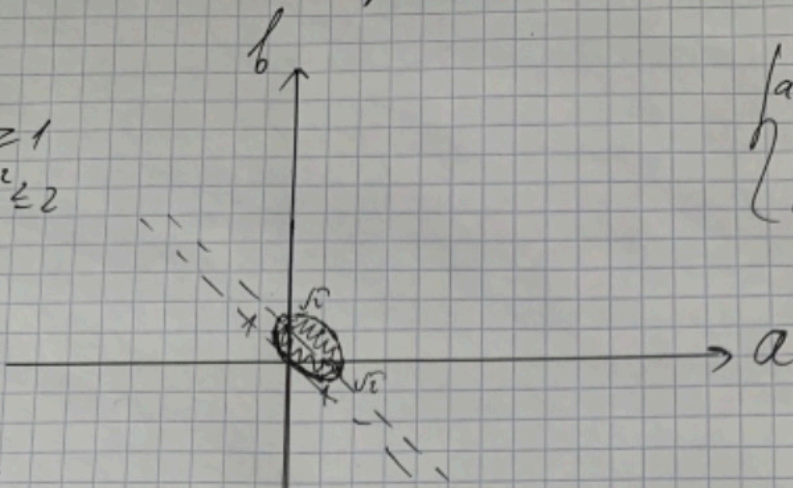
черпачок

3)

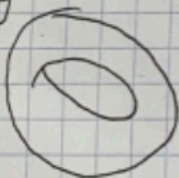
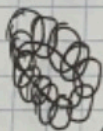
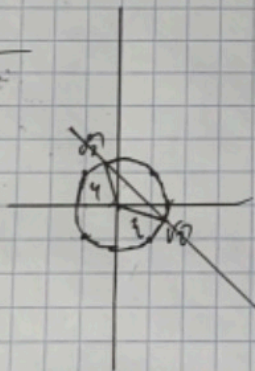
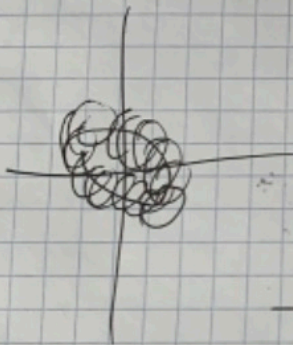
$$\begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \leq 2 \\ b \geq 1-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ a+b \leq 1 \\ a^2+b^2 \leq 2(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2-2a+1+b^2-2b+1 &\leq 2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 &\leq 2 \end{aligned}$$



1/2



$$\begin{cases} b \geq 1-a \\ a^2+b^2 \leq 2 \end{cases}$$

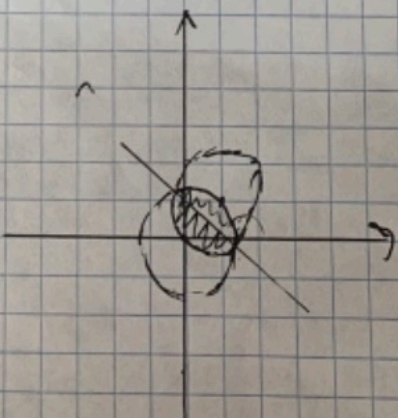
$$\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2 \\ b \geq 1-a \\ (a-1)^2+(1-a-1)^2 \leq 2 \\ (a-1)^2+(2a)^2 \leq 2 \\ a^2-2a+1+4a^2 \leq 2 \\ 5a^2-2a-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2+(1-a)^2 &\leq 2 \\ a^2+1-2a+a^2 &\leq 2 \\ 2a^2-2a-1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0}{4} &\leq 1 \pm 2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_2 &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} & b_2 &= 1 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ & & &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2(a+b)

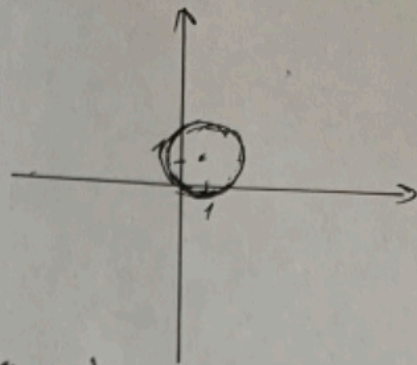


S2 1/2 a



чирковина

$$2) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2) \end{cases}$$



$$a^2 + b^2 \leq \min(2(a+b), 2)$$

$$a^2 + b^2 \in [0; 2]$$

$$\text{yму } a+b \geq 1$$

$$a+b < 1$$

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

$$\text{yму } a+b \geq 0 \leq a+b \leq 1$$

$$\begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2 + b^2 \geq 2 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 \leq 2a + 2b$$

$$a^2 + b^2 \leq 2(a+b)$$

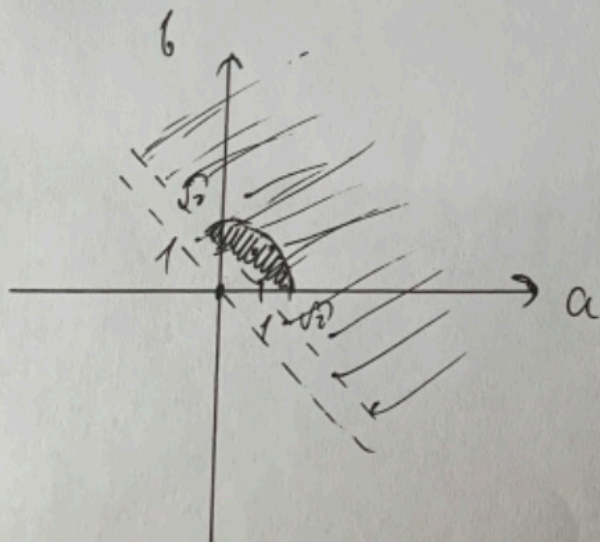
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \leq 2$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\neq 2ab \\ 2(a+b) &\neq 2ab \\ a+b &\neq ab \end{aligned}$$

$$a+b \geq \begin{cases} a+b < 1 \\ a+b > 0 \\ a^2 + b^2 \leq 2(a+b) \end{cases}$$

$$b \geq 1-a$$

$$b \geq -a$$



$$a^2 - 2a + b^2 - 2b \leq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - 1 + b^2 - 2b + 1 - 1 \leq 0$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104016**

ID профиля: **313118**

Вариант 17



Числотеория  
№4.

(1)

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 2 \cdot 3 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

Из того, что мы знаем, можно сделать вывод, что  $a, b, c$  представляются собой произведения 2 и 3!

$$a = 2^k \cdot 3^m$$

$$b = 2^l \cdot 3^n, \text{ где } k, m, l, n, t \text{ и } p - \text{натуральные числа.}$$

$$c = 2^t \cdot 3^p \text{ Так как } \text{НОД}(a; b; c) = 2 \cdot 3, \text{ то относительно } k, l, t \text{ и относительно } m, n, p \text{ будут равны единице.}$$

т.к.  $\text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$ , то относительно  $k, l, t$  и относительно  $m, n, p$  будут равны 15 и 16 соответственно. (т.к. НОК - это произведение делителей числа с максимальными показателями степеней).

Нам с грехом: способ выбрать 2 с показателем степени = 1 - 3, тогда способ выбрать 2 с показателем = 15 - 2, тогда оставшийся показатель может быть равен любой целому числу в промежутке от 1 до 15  $\Rightarrow$  всего вариантов способ грех  $3 \cdot 2 \cdot 15 = 90$ .

Аналогичная ситуация с показателем способ выбрать  $3^1 - 3$ ,  $3^{16} - 2$ , оставшийся может иметь любой целой показатель в промежутке от 1 до 16  $\Rightarrow$  всего возможных способ для грех  $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$

$$3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$$

Тогда всего чисел  $a, b, c$  может быть  $90 \cdot 96 = 8640$

ответ: 8640



Минус  
N5

2

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ ,  $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ ,  $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$   
 пусть  $\sqrt{5x-1} = a$ ;  $4x+1 = b$ ;  $\frac{x}{2}+2 = c$ . Тогда надо  
 преобразовать исходные логарифмы;

$$\log_a b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a^2 = 4 \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$$

$$= 4 \log_a c \cdot \log_c a = 4$$

Пусть степень числа  $a$  по отношению к  $c$  равна  $m$ . Тогда, чтобы  
 выполнялось условие:  $m \cdot m(m-1) = 4$

$$m^2(m-1) = 4$$

$$m^3 - m^2 - 4 = 0$$

$$(m-2)(m^2+m+2) = 0$$

т.к.  $m^2+m+2$  всегда  $> 0$  (д.к.д.  $= -7 < 0$ ), то

$m = 2$ . Получаем совокупность:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 & 1) \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 & \sqrt{5x-1}^2 = 4x+1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2 & 5x-1 = 4x+1 \\ & x = 2 \end{cases}$$

$$2) \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2$$

$$(4x+1)^2 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Leftrightarrow (4x+1)^2 - \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 0$$

$$4x+1 \neq \frac{x}{2}+2$$

$$(4x+1 - \frac{x}{2} - 2)(4x+1 + \frac{x}{2} + 2) = 0$$

$$\begin{cases} 3,5x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 4,5x = -3 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \frac{2}{7} > \frac{1}{5} \\ \frac{10}{35} > \frac{7}{35} \end{cases}$$

$x = -\frac{2}{3}$  - не подходит.

одз:

$$1) \sqrt{5x-1} > 0$$

$$5x-1 > 0$$

$$x > \frac{1}{5}$$

$$2) \sqrt{5x-1} \neq 1$$

$$5x-1 \neq 1$$

$$x \neq \frac{2}{5}$$

$$3) 4x+1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{4}$$

$$4) 4x+1 \neq 1$$

$$x \neq 0$$

$$5) \frac{x}{2}+2 > 0$$

$$x > -4$$

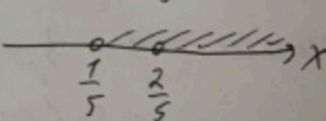
$$6) \frac{x}{2}+2 \neq 1$$

$$\frac{x}{2} \neq -1$$

$$x \neq -2$$

$$7) 5x-1 > 0$$

$$x > \frac{1}{5}$$





Числовик

(3)

$$3) \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 = 5x - 1$$

$$\frac{x^2}{4} + 2x + 4 = 5x - 1$$

$$\frac{x^2}{4} - 3x + 5 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 - 20 = 16$$

$$\sqrt{D} = 4$$

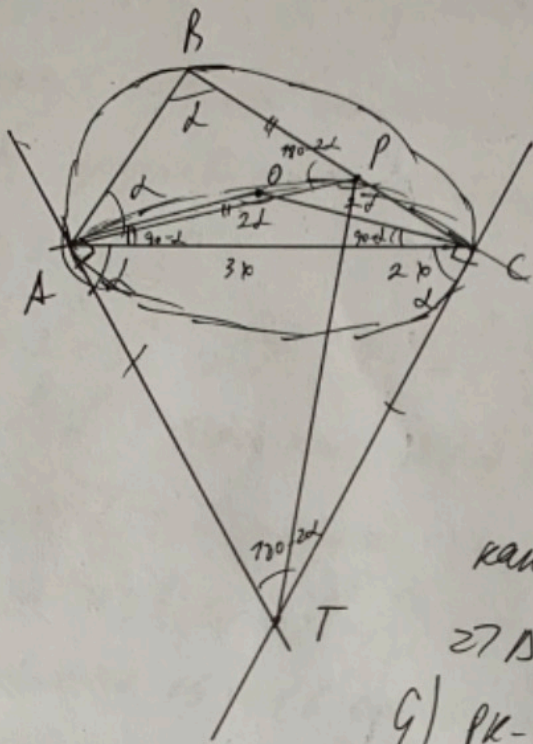
$$x = 2$$

$$\text{Ответ: } 2; \frac{2}{7}; 10$$



Условие  
N6.

(4)



$$1) S_{APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK = 6 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$$

$$S_{AKC} = \frac{1}{2} h \cdot KC = 4$$

2)  $\angle TAC = \angle ABC = 2\alpha$  как угол между кас. и хордой

3)  $\angle AOC = \angle OAC = 90^\circ - \alpha = \text{OCT.}$

Поэтому  $\angle AOC = 2\alpha = \angle APC$ , как описана окружность. Поэтому  $\angle BPA = 180^\circ - 2\alpha$ ,

как смежных. Поэтому  $\angle BAP = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABP$  - равнобедренный,  $AP = PB$

4) PK - диаметр,  $\angle KPC = 2\alpha \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$  по 2L.

$$5) S_{APC} = 6 \cdot 4 = 24 = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha$$

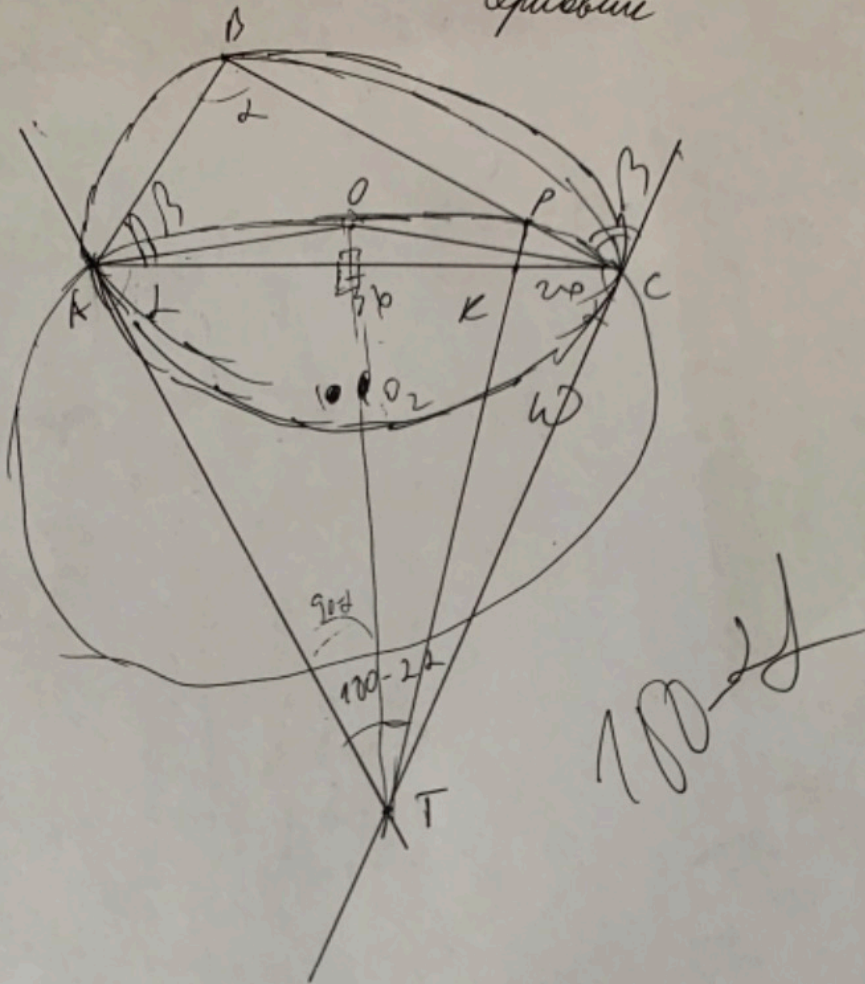
$$S_{ABP} = AP \cdot PB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\text{Поэтому } S_{ABP} = 20 \cdot \frac{PB}{PC} = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$$

Ответ: 30



репробин





непробук.

5)  $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1), \log_{4x+1}\left(\frac{x+2}{2}\right)^2, \log_{\frac{x+2}{2}}(5x-1) \quad \frac{x+2}{2} \neq 0$

$\log_a b \quad \log_b c^2 \quad \log_c a^2$   
 $\frac{a \cdot b \cdot c^2}{a \cdot b \cdot c^2}$

$2 \log_a c$

~~4~~

a, b, c

$\begin{cases} a \neq b \\ c = a - 1 \\ a < c \\ b = a - 1 \\ b < c \\ a < b - 1 \end{cases}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \log_{4x+1}\left(\frac{x+2}{2}\right)^2$   
 $\log_{\frac{x+2}{2}}(5x-1) = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) - 1$

$a^2(a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

1	-1	0	-4
2	1	2	0

$(a-2)(a^2+a+2) = a+2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2 \log_{4x+1}\left(\frac{x+2}{2}\right)^2$

$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5x-1}^2}{5x-1} = 4x+1$   
 $5x-1 = 4x+1$

$\frac{x+2}{2} = \frac{x}{4} + 2 \cdot \frac{x}{2} + 4 = \frac{x}{4} + 2x + 4$

$2 \cdot \frac{x^2}{4} + 2x + 4$

$\frac{2}{7} \quad \frac{1}{5}$

$m^3 + m^2$

$m^2$

$\frac{1}{4} = 36 - 20 = \frac{10}{35} = \frac{2}{35}$   
 $24^2$

$x = 6 \pm 4 \sqrt{\frac{10}{2}} \quad x$



Числа

4) a, b, c  
 НОД (a, b, c) = 6  
 НОК (a, b, c) = 2<sup>15</sup> · 3<sup>16</sup>

a: 6  
 b: 6  
 c: 6  
 2<sup>15</sup> · 3<sup>16</sup> : a  
 2<sup>15</sup> · 3<sup>16</sup> : b  
 2<sup>15</sup> · 3<sup>16</sup> : c

одно число = 6.

числа a, b, c - выражены 243 (составными)  
 делится только на 20.

a = 2<sup>k</sup> · 3<sup>m</sup>

3<sup>2</sup> 2<sup>6</sup> 7  
 2<sup>3</sup> 3  
 2<sup>3</sup> 3

2<sup>15</sup> · 3<sup>16</sup> пере

a = 2<sup>k</sup> · 3<sup>m</sup>

b = 2<sup>l</sup> · 3<sup>n</sup>

c = 2<sup>p</sup> · 3<sup>q</sup>

одно число = 6

15 16  
 2<sup>15</sup> · 3<sup>16</sup> - 15 байт

пере

2<sup>1</sup>

3<sup>3</sup>  
 3<sup>n</sup>  
 3<sup>p</sup>

2

16 · 2 · 3<sup>2</sup>  
 = 96

15 · 2 · 3<sup>2</sup> = 90

186

2<sup>1</sup> 2<sup>15</sup> 2<sup>15</sup> байт  
 2<sup>15</sup> байт 2<sup>15</sup>

3 2 15

90  
 596  
 9  
 8640



a)  $2 \cdot 180 - 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2$  Merupakan

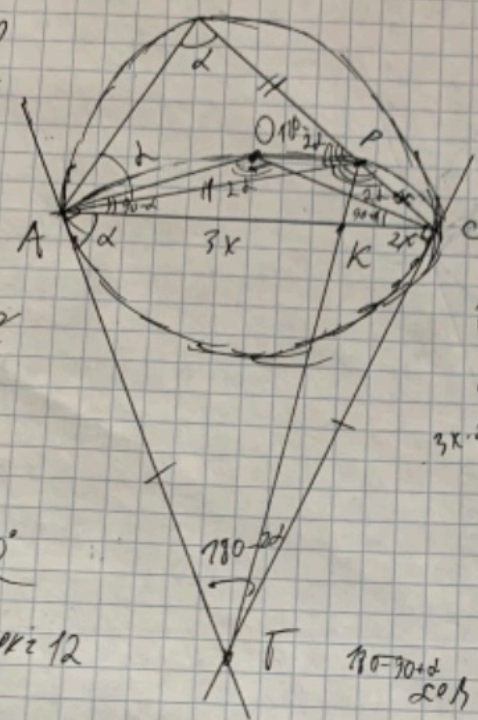
$BP = AP$

$S_{APK} = 6$

$\frac{AC}{AB} = \frac{AP}{AT}$

$S_{CPK} = 4$

$S_{ABC} = ?$



$\sin 90 - 2 \cdot \alpha = 2R$   
 $\sin(90 - 2\alpha) = \frac{1}{2}$   
 $90 - 2\alpha = 30$   
 $2\alpha = 60$

$\frac{AP \cdot PK}{PC} = \frac{1}{2}$   
 $3x \cdot 2x = \frac{1}{2} PC$   
 $S_{APC} = 10$

$\frac{abc}{4R}$   
 $\frac{1}{2} ab \sin C$

$AP \cdot PK \cdot \sin \angle APK = 12$

$AP \cdot PK \cdot \sin \angle PKC = 8$

$AP \cdot \sin \alpha$

$\angle APC = 180 - 2\alpha$

$180 - 2\alpha - \alpha - \alpha = 2\alpha$   
 $2\alpha = 60$

$\frac{5x}{\sin \alpha} = 2R$

$\frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 10$

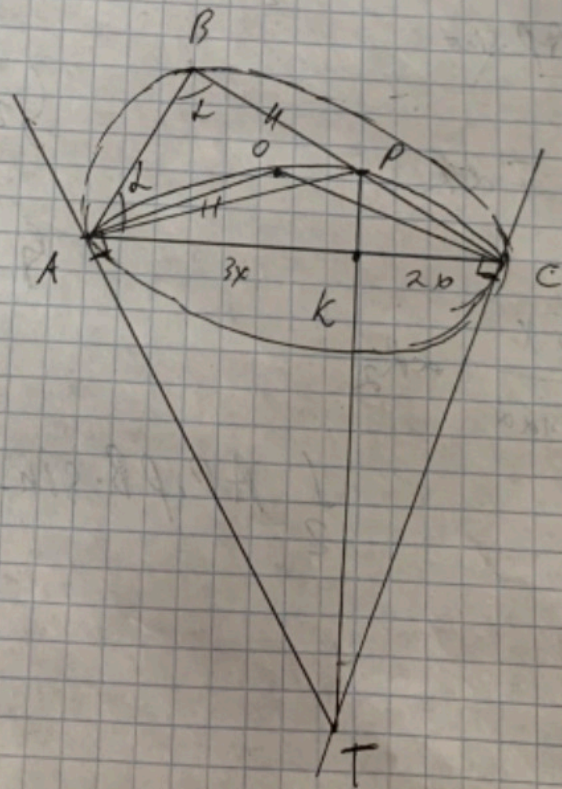
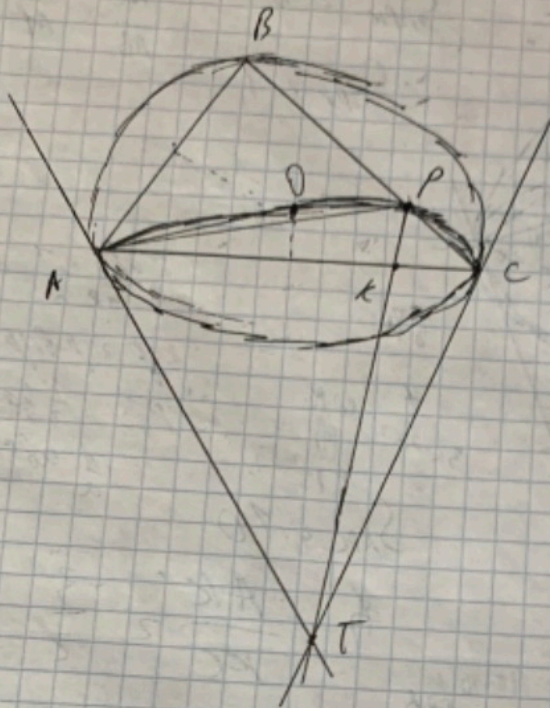
$AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 20$

$\frac{5x}{\sin \alpha} = 2R_2$

$\frac{1}{2} AP \cdot PB \cdot \sin 2\alpha = 20$   ~~$AP \cdot PC$~~   $\frac{20 PB}{PC} = \frac{10 AP}{PC}$



Чертёж



$$S_{APK} = 6$$

$$S_{PKC} = 9$$

$$\frac{1}{2} h \cdot AK = 6$$

$$\frac{1}{2} h \cdot KC = 9$$